CURSO COMPLETO

DE

MATEMATICAS PURAS.

El Curso completo de Matematicas puras *comprende las obras siguientes:*

Elementos de Aritmética, *con un nuevo método de calcular los logaritmos de los números enteros y quebrados, un Apéndice sobre las aproximaciones numéricas y una Tabla de los principales sistemas de pesos, medidas y monedas*; 1 *tomo.*

Elementos de Algebra, *inclusa la teoría de la resolucion de ecuaciones de órden superior*; 2 *tomos.*

Elementos de Geometría; 1 *tomo.*

Elementos de Algebra *aplicada á la* Geometría, *inclusas las dos* Trigonometrías, *rectilínea y esférica, y la* Geometría *de tres dimensiones*; 2 *tomos.*

Im. de Calleja.

ELEMENTOS

DE

ARITMETICA

POR M. BOURDON,

CABALLERO DE LA ORDEN REAL DE LA LEGION DE HONOR, INSPECTOR GENERAL DE ESTUDIOS, EXAMINADOR NOMBRADO PARA LA ADMISION DE ALUMNOS EN LA REAL ESCUELA POLITECNICA, MIEMBRO DE LA SOCIEDAD FILOMATICA DE PARIS, DE LA REAL DE CIENCIAS, ARTES Y AGRICULTURA DE LILA &c. &c. &c.

TRADUCIDOS DE LA 19.ª EDICION FRANCESA

POR DON CALISTO FERNANDEZ FORMENTANY.

MADRID:

LIBRERÍA DE LOS SEÑORES VIUDA É HIJOS DE CALLEJA.

1843.

Al Señor

DON JUAN ESTEVAN NAVARRO,

Profesor de Matemáticas en el Instituto de Jerez de la Frontera.

Al recordar la idea de poner vuestro nombre al frente de la obra de los célebres matemáticos MM. Bourdon y Vincent, despertais en mi corazon el vivo reconocimiento de que todo discípulo debe estar penetrado hácia su Profesor, como igualmente la grata satisfaccion que me cabe en dedicaros una obra tan digna ciertamente del celo con que trabajais por la instruccion de la juventud.

¡Dichoso yo si despues de mis débiles tareas he podido cooperar y contribuir de algun modo á los adelantos de ciencia tan bella como útil, y dichoso tambien el discípulo que aprovechándose de las sólidas ideas que enunciais desde vuestra Cátedra, pueda algun dia repetir tan noble ejemplo con suma perfeccion en honra vuestra y utilidad de nuestra magnánima Nacion!

Entretanto dignaos recibir esta pequeña prueba de homenaje y de la mas sincera amistad de vuestro discípulo y atento servidor

Calisto Fernandez
Formentany.

PROLOGO DEL TRADUCTOR.

La riqueza material de una nacion es la industria. Las Matemáticas, primera y principal de las ciencias exactas y positivas, son el único medio capaz de conducir directamente al hombre al desarrollo de aquella. He aquí porque el Boletin de Fomento *en su introduccion al plan de enseñanza de la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, dice muy bien que* "el gran » desarrollo y movimiento con que la industria y las » artes enriquecen al mundo civilizado, se lo impri- » men los hombres instruidos y versados en las cien- » cias de aplicacion." *Y á la verdad, si únicamente el cálculo matemático es capaz de poner la inteligencia del hombre al alcance de las teorías mas* *sublimes de la Física y de la Mecánica, ¿cómo conseguir el poderoso desarrollo mecánico sin el profundo conocimiento de aquel, cuando dichas dos ciencias tienen un influjo tan directo como indispensable en la industria y las artes?*

Forzoso es, pues, convenir con arreglo á este principio inconcuso en que para que la industria de un pais pueda llegar progresiva y metódicamente á su perfecto y total desarrollo, es indispensable el profundo conocimiento del cálculo con toda su estension en aquellos hombres que puestos al frente de cualquier arte ó manufactura, deban mediante su inteligencia en el mecanismo de las máquinas y aparatos llevar á cabo con la mayor perfeccion, sencillez y economía la empresa artística que les está cometida.

Una observacion lijera é imparcial sobre los adelantos de la industria y las artes en Inglaterra, Francia y Alemania, relativamente comparados con los muchos y grandes retrasos habidos en España de bastante tiempo á nuestros dias, bastará para convencerse íntimamente de la necesidad de las Matemáticas para los progresos de la industria y las artes. Y si esto sucede en España, si nuestra industria, á la sazon naciente, se halla paralizada tal vez á causa de la escasez de obras *elementales de Matemáticas puras, capaces de poner los jóvenes al alcance del estudio de las mistas, y de aquí poder proceder con exactitud y método á obtener los pingües y poderosos resultados de su influencia y aplicacion á las artes, ¿qué mayor prueba podríamos dar de decision é interés por la prosperidad industrial de España, que ocuparnos en la traduccion de una obra tan útil é interesante por su estension, como por la solidez, sencillez y exactitud con que estan tratadas las principales ideas y cuestiones de las Matemáticas puras?*

Inútil seria ciertamente cualquier elogio en obsequio al mérito de las obras de MM. Bourdon y Vincent, cuando la multitud de ediciones hechas en un corto espacio de tiempo, la unánime aceptacion que han tenido en los principales Colegios de Francia tan luego como salieron á luz, y la pronta adopcion del Consejo ó Junta de Instruccion pública para sus respectivas asignaturas, son pruebas harto convincentes del mérito del CURSO DE MATEMATICAS PURAS *que ofrecemos á la juventud estudiosa, pues no solo puede servir como auxiliar en las Cátedras de primero y segundo año de Filosofía, como ordena el plan vigente de la Direccion general de Estudios; sino que tambien* *presta nociones suficientes para prepararse á la admision de alumnos en las Escuelas especiales de* minas, puentes, caminos, canales, artillería, zapadores, estado mayor, marina &c. &c.

Intimamente convencidos de la asidua aplicacion de aquellos jóvenes que dedicados á estas carreras, han de ser un dia el sosten y apoyo de la industria española, no hemos dudado el mas mínimo instante en ofrecerles las sólidas ideas de tan célebres matemáticos; y quedaremos satisfechos si despues de sometida nuestra traduccion á una crítica severa é imparcial, hemos podido ser útiles á una parte tan interesante de la sociedad.

Madrid 12 de Diciembre de 1842.

PROLOGO DEL AUTOR.

El plan que me he propuesto al formar el presente *Tratado de Aritmética*, es establecer metódicamente la nomenclatura de los números y el modo de representarlos por medio de cifras ó guarismos; buscar en esta representacion y en la naturaleza de las operaciones á que pueden dar lugar, procedimientos propios y capaces de investigar sus resultados; considerar en seguida los números de un modo general é independiente de cualquier sistema de numeracion; penetrar, digámoslo así, en su interior, á fin de descubrir en ellos las propiedades relativas á su composicion y descomposicion; deducir de estas propiedades, bien sean métodos ó bien modificaciones y medios para simplificar los ya conocidos; y establecer finalmente, en cuanto sea posible, reglas fijas para resolver toda clase de cuestiones ó problemas, teniendo en consideracion las relaciones que entre sí tienen las cantidades que entran en su enunciado.

He dividido esta obra en dos partes, y cada una de ellas en cuatro capítulos.

La PRIMERA PARTE tiene por objeto el análisis de las cuatro reglas fundamentales, la *suma* ó *adicion*, *sustraccion*, *multiplicacion* y *division*. Así pues, el *primer capítulo* se ocupa de las operaciones de los números enteros; el *segundo* de las de los quebrados, cualquiera que sea su naturaleza; el *tercero* y *cuarto*, que no vienen á ser mas que una ampliacion del segundo, se ocupan de los *números complejos* ó *mistos* y de los *quebrados decimales*, á los cuales sigue inmediatamente el *nuevo sistema de pesos y medidas*.

La SEGUNDA PARTE abraza principalmente aquellas teorías cuyas demostraciones exigen el uso de diferentes signos para representar los números y las operaciones que sea indispensable ejecutar con ellos. Así es que despues de haber dado á conocer en una introduccion el uso de los signos y el modo de calcular los números indicados por letras, paso á analizar la teoría de los diversos sistemas de numeracion, las propiedades que tienen relacion con la divisibilidad de los números, y aquellas que la tienen con su composicion y descomposicion en factores. Retrocediendo despues á las materias tratadas en los primeros capítulos, deduzco de sus propiedades modificaciones para el método de reduccion de quebrados á un comun denominador y para el del máximo comun divisor de dos ó mas números: desenvuelvo la teoría de los quebrados decimales ó fracciones periódicas, y las principales propiedades de las continuas.

Estas últimas materias componen el *capítulo quinto.*

Los principios establecidos en la *introduccion* á la segunda parte me permiten trate en el *capítulo sesto* de los modos de hallar la raiz cuadrada y cúbica de los números, cuyas operaciones son indispensables para pasar de la Aritmética al estudio de la Geometría.

En el *sétimo capítulo* me ocupo de las *relaciones* y *proporciones*, y de sus aplicaciones á los problemas usuales del comercio y del banco, esforzándome en manifestar todas las ideas claras y precisas sobre esta parte, que debe considerarse como una de las mas importantes de las Matemáticas.

En el *octavo* y *último capítulo* hago una esposicion completa de las principales propiedades de las progresiones y logaritmos, tratando estos con mucho cuidado y estension, pues que por sus aplicaciones á las operaciones mas complicadas sirven de mucha utilidad al calculador.

La consideracion de los logaritmos de las fracciones y la necesidad de espresarlos tan bien como los de aquellos números mayores que la unidad, nos conduce naturalmente á los *números negativos* y al modo de usar de ellos en el cálculo.

Doy fin á este capítulo con una aproximacion establecida entre las diversas operaciones, dando lugar á un nuevo modo de considerar los logaritmos, que debiera ser una sétima operacion de la Aritmética.

Por esta reseña que llevo hecha, podrá verse que nada he omitido para hacer de mi obra un tratado completo.

Parécéme, pues, conveniente que así en esta edicion como en las anteriores conteste á la siguiente objecion que me ha sido presentada por algunos Profesores: *¿Por qué introducir en los* Elementos de Aritmetica *nociones que les son estrañas, y que mas bien pertenecen al Algebra?* Diré en primer lugar, para justificarme, que aquellos autores que han querido dar á conocer ciertas propiedades de los números, sin emplear los signos algebráicos, no han podido presentarlos sino de un modo incompleto y nada metódico; aun habiéndose visto precisados á usar signos abreviados de las operaciones aritméticas, cuando por el contrario el método que yo he observado, me ha permitido establecer una verdadera relacion entre estas propiedades y sus mas importantes aplicaciones. Y en segundo lugar, que estas propiedades, cuyo conocimiento es indispensable á cuantos quieran poseer á fondo la Aritmética, no podrian entrar á formar parte de los Elementos de Algebra, sin destruir la relacion ó encadenamiento que hay entre las teorías que constituye esta parte de las Matemáticas.

Así es que tan luego como en la primera edicion del Algebra dediqué un capítulo para la esposicion de estas mismas propiedades, se me hicieron varias observaciones sobre el particular; y he aquí como para conformarme con ellas, al publicar un Tratado de Aritmetica me he ocupado en esta parte de las Matemáticas de lo que generalmente se reconoce como objeto suyo.

Añadiré como última reflexion que estos Elementos estan destinados principalmente á aquellos jóvenes que deben someterse á rigorosas pruebas, y cuyos primeros pasos en la carrera de las ciencias deben darse de un modo seguro y ventajoso. Por lo tanto los principios fundamentales no podrán menos de ser tratados con escesivo rigor.

Esta nueva edicion, así como las cuatro que la preceden, termina con un APENDICE *sobre las aproximaciones numéricas*, en cuya esposicion me he ocupado al mismo tiempo que mi yerno M. Vincent, profesor de Matemáticas del Real Colegio de San Luis.

ELEMENTOS

DE ARITMETICA.

PRIMERA PARTE.

INTRODUCCION.

1. *Magnitud ó cantidad* es todo aquello que puede ser susceptible de aumento ó disminucion. Por ejemplo, las líneas, las superficies, el tiempo, los pesos, son magnitudes; lo mismo que toda coleccion ó reunion de objetos de igual naturaleza, como árboles, hombres, casas &c., pues que son susceptibles de aumento ó disminucion. No puede formarse idea exacta de una magnitud sino comparándola con otra de la misma especie, la cual destinada á servir como término de comparacion de todas las que son de su naturaleza, se llama UNIDAD. Así cuando se dice que una pared tiene *veinte varas* de largo, es porque se tiene idea de la unidad de la longitud llamada *vara*, y juntamente suponemos que despues de haberla tomado veinte veces sobre la pared se ha llegado á su fin.

La *unidad*, en Matemáticas, *es una magnitud de cualquiera especie, tomada arbitrariamente ó sacada de la misma naturaleza para servir de término de comparacion á todas las de su clase*: de donde se deduce que hay tantas unidades diferentes, como especies de magnitudes.

La unidad es arbitraria cuando la especie de magnitud á que pertenece puede variar en proporcion *continua*, es decir, que se la puede aumentar ó disminuir cuanto se quiera, como una línea, un tiempo &c.; por el contrario será de la misma naturaleza que la magnitud, siempre que esta se aumente ó disminuya en proporcion irregular y *descontinua*: tales son los diversos géneros de colecciones. De ahí es que la unidad en un grupo de árboles tomado como magnitud no puede ser mas que *el árbol.*

El resultado de la comparacion de una magnitud cualquiera con la unidad á que pertenece, es lo que se llama *número.*

Este puede ser *entero*, *quebrado* y *fraccionario*, *misto ó complejo.*

Se entiende por número *entero* el conjunto de unidades de una misma especie: por ejemplo, *veinte reales*, *treinta libras*, *ocho*, *doce*, *quince* unidades de cualquiera especie son números enteros.

Quebrado es toda magnitud que no llega á valer la unidad; y número *misto*, *fraccionario ó complejo* es el que se compone de entero y quebrado.

2. Además el número puede ser *concreto* y *abstracto*: proviniendo la primera de estas denominaciones de añadir al número la palabra que designa la especie de magnitud de que se trata: así *cinco varas*, *quince horas*, *seis leguas*, son números concretos. Dimana la segunda de no poder formarse idea del número que se pronuncia, si no nos presentamos una unidad de cierta especie con la cual se compare la magnitud de la misma; y como el entendimiento que poco á poco se va acostumbrando á las abstracciones, llega á figurarse una coleccion cualquiera de objetos semejantes, en la que cada uno de ellos es la unidad, resulta que en este caso la tal coleccion recibe el nombre de *número abstracto*, puesto que al anunciarla se ha hecho abstraccion de la especie de unidad á que corresponde. Este es, pues, el punto de vista bajo el cual deben considerarse los números en la esposicion de los procedimientos relativos á las operaciones que sea necesario efectuar con ellos, si semejantes procedimientos se han de establecer de un modo tal, que sean capaces de aplicarse á todos los problemas posibles.

DE LA NUMERACION.

3. El objeto de las primeras investigaciones sobre los números debe haber sido necesariamente el darles nombres fáciles de retenerlos; pero como *hay una infinidad de números*, pues que cada uno de ellos estando ya formado puede ser una unidad mas, la cual da lugar á otro número susceptible de ser aumentado tambien en una unidad, ha sido necesario inquirir un medio de *espresarlos todos con un limitado sistema de palabras combinadas entre sí de un modo conveniente.* Tal es el objeto de la *numeracion hablada.*

Además, como las palabras que forman la nomenclatura de los números estan por lo general compuestas de sonidos variables en los diversos idiomas, ha sido preciso inventar para reemplazarlas una escritura abreviada y mas general, con cuyo auxilio pueda el entendimiento comprender con facilidad é independencia del lenguaje verbal los razonamientos que es indispensable hacer para descubrir las propiedades de los números ó las leyes de su combinacion. Este es el fin de la *numeracion escrita*, que consiste en *representar los números por medio de una porcion limitada de* CARACTERES Ó CIFRAS.

4. NUMERACION HABLADA.—Aunque la nomenclatura de los números es generalmente conocida de los jóvenes para quienes se escriben estos Elementos, no obstante nos parece conveniente esponer un sucinto pero razonado análisis de ella.

Los primeros números son: *uno* (ó la misma unidad considerada como número), *dos* (ó la unidad mas la unidad), *tres* (ó dos unidades mas una unidad), *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho* y *nueve*.

Añadiendo al número *nueve* una unidad se forma el *diez*, que ya se considera como una nueva especie de unidad llamada *decena ó unidad de segundo órden*; al contrario de la unidad primitiva que se llama *unidad simple ó de primer órden*. Lo mismo se cuentan las decenas que las unidades: así se dice, una decena, dos decenas, tres decenas, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve decenas; ó de otro modo, *diez*, *veinte*, *treinta*, *cuarenta*, *cincuenta*, *sesenta*, *setenta*, *ochenta* y *noventa*. Entre diez y veinte hay nueve números, que son *diez y uno*, *diez y dos*, *diez y tres*, *diez y cuatro*, *diez y cinco*, *diez y seis*, *diez y siete*, *diez y ocho*, *y diez y nueve*; mas en lugar de las cinco primeras espresiones se usa de las palabras propias *once*, *doce*, *trece*, *catorce*, *quince*.

Entre veinte y treinta hay tambien nueve números que se espresan así: *veinte y uno*, *veinte y dos*, *veinte y tres*, *veinte y cuatro*,... *veinte y nueve* *. Por este mismo órden podrán espresarse todos los números que hay hasta *noventa y nueve*.

Si á este último número se le aumenta *uno*, equivaldrá á *diez decenas* ó al número *ciento*, que será una nueva especie de unidad llamada *centena ó de tercer órden*; cuya especie de unidades se contarán como las *simples y primitivas ó decenas*. Así pues, *ciento*, *doscientos*, *trescientos*, *cuatrocientos*, *quinientos*, *seiscientos*, *setecientos*, *ochocientos*, *novecientos*, espresan colecciones de una, dos, tres, cuatro,... nueve centenas. Colocando sucesivamente entre las palabras *ciento* y *doscientos*, *doscientos* y *trescientos*,... *ochocientos* y no-

---

* Para mayor claridad hemos usado de las palabras *veinte y uno*, *veinte y dos*, *veinte y tres*,... &c., separadas con la conjuncion *y*, pero en adelante conformándonos con las últimas disposiciones de la Academia y con el uso ya bastante generalizado, las escribiremos juntas diciendo, *veintiuno*, *veintidos*, *veintitres*, *veinticuatro*, *veinticinco*, *veintiseis*, *veintisiete*, *veintiocho y veintinueve*. EL TRADUCTOR.

vecientos, y despues de esta última las que designan los números comprendidos desde *uno* hasta *noventa y nueve*, se habrán formado los nombres de todos los números que hay entre *ciento* y *novecientos noventa y nueve*.

Nótese que en los enunciados de los números hasta aquí referidos no hemos empleado mas que las palabras genéricas, *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*, *diez*, *veinte*, *treinta*, *cuarenta*, *cincuenta*, *sesenta*, *setenta*, *ochenta*, *noventa* y *ciento*, sin hacer uso de las particulares que median entre *diez* y *veinte*, por sobreentenderse y no ser muy rigorosa su cita.

Añadiendo *uno* al número *novecientos noventa* y *nueve*, resultará el número *mil*, que equivale á la *unidad de millar* ó de *cuarto órden*. Hallado ya este número, á fin de no multiplicar mucho las palabras, se conviene en reconocerle como *unidad principal*, á cuya continuacion podrán añadirse todos los nombres de los números desde uno hasta novecientos noventa y nueve. Así se dirá, *mil*, *dos mil*,... *nueve mil*, *diez mil*, *once mil*,... *veinte mil*, *veintiun mil*,... *treinta mil*,... *cien mil*, *doscientos mil*,... *novecientos noventa y nueve mil*.

La decena de millar equivale á la *unidad de quinto órden* y la centena á la de *sesto órden*.

Poniendo despues de la unidad de cuarto órden todos los nombres de los números inferiores á *mil*, podrán enunciarse y se tendrán formados todos los que hay hasta *novecientos noventa y nueve mil*, *novecientos noventa y nueve*.

Este último número aumentado de *uno* da por resultado *diez centenas de mil* ó *mil de mil*, cuya coleccion recibe el nombre de *millon*; por el mismo consiguiente una coleccion de *mil millones* se le llama *billon* ó *millar de cuento*, de *mil billones trillon*, y así sucesivamente. Lo mismo se cuenta por millones, billones &c., que por mil; de modo que en añadiendo á las palabras genéricas anteriormente citadas las de millon, billon, trillon, cuatrillon, quintillon &c., se tiene formada la nomenclatura de todos los números enteros imaginables.

5. NUMERACION ESCRITA.—Por mas sencilla que fuese la nomenclatura de los números, bastantes dificultades habrian de esperimentarse en la combinacion de dos ó mas números considerables, á no poseer un medio sencillo y abreviado de espresarlos. Por esta razon, á poco que se medite, podrá comprenderse fácilmente dicha nomenclatura. En efecto, obsérvese que entre las palabras empleadas para enunciar los números, tales como *uno*, *diez*, *ciento*, *mil*, *cien mil*, *un millon*, *dos millones*, las unas espresan las unidades de varios órdenes, y las otras, como uno, dos, tres,... nueve, esplican cuántas veces cada una de estas clases de unidades entra en un número.

Esto supuesto, si convenimos en representar los nueve números primeros por los caracteres ó cifras

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
uno,	*dos*,	*tres*,	*cuatro*,	*cinco*,	*seis*,	*siete*,	*ocho*,	*nueve*,

toda la dificultad quedará reducida á hallar un medio de representar con estas cifras los varios órdenes de unidades que contenga el número propuesto. Luego en estableciendo por base este principio convencional, á saber, que *toda cifra puesta á la izquierda de otra espresa unidades de un órden superior á las de aquella*, ó con otros términos, que *cuando muchas cifras estan escritas unas á continuacion de otras*, *la primera de la derecha espresa unidades simples*, *la que le sigue inmediatamente á la izquierda*, *unidades de decenas ó decenas simplemente*, *la tercera de derecha á izquierda centenas*, *la cuarta unidades de millar*, *la quinta decenas de millar*,... se concibe fácilmente que bien se podrán representar todos los números por medio de dichos caracteres.

Así si quisiésemos representar el número *trescientos setenta y nueve*, no tendríamos mas que hacernos cargo de que se compone de 9 unidades, mas 7 decenas, mas 3 centenas, y segun lo dicho su espresion característica seria 379.

Del mismo modo el número *veintiocho mil doscientos cuarenta y siete* que se compone de 7 unidades, 4 decenas, 2 centenas, 8 millares y 2 decenas de millar, se representará por estas cinco cifras, 28247.

Uso de la espresion 0.—Hay números que no pueden representarse sin hacer uso de las nueve cifras arriba espuestas.

Supongamos que se quieren escribir los números *diez*, *veinte*, *treinta*,... *ochenta*, *noventa*: estos números no conteniendo en su espresion ningunas unidades simples, ha sido necesario inventar *una cifra que no teniendo valor propio*, se le destina á ocupar las unidades del órden que falta en la espresion del número: esta cifra es *o*, que se pronuncia *cero*, y usando de ella, los números diez, veinte, treinta &c. se escriben así: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Por el mismo estilo, los números *ciento*, *doscientos*, *trescientos* &c... que no contienen ni unidades simples ni decenas, se escriben de este modo: 100, 200, 300, 400,... 900.

En general la espresion *cero*, que no tiene valor propio, sirve para ocupar el lugar de los diferentes órdenes de unidades que pueden faltar en la enunciacion del número que se quiere representar.

Las otras cifras llamadas *significativas* tienen dos valores, uno *absoluto*, que no es otra cosa mas que el valor de la cifra aisladamente considerada, y el otro *relativo*, que es el valor que adquiere por el lugar que ocupa á la izquierda de las otras cifras.

Luego si consideramos que todo número se compone de unidades, decenas, centenas &c., que la coleccion de unidades de cada órden es todo lo mas igual á nueve, y que en caso en que el número esté privado de algun órden, hay una cifra destinada para ocupar su lugar, nos convenceremos de que no hay número entero que no pueda ser representado por los diez caracteres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Así pues, el número *doscientos ocho mil diez y nueve*, que consta de 9 *unidades simples*, 1 *decena*, 8 *unidades de millar* y 2 *centenas de millar*, pero que no tiene ni *centenas*, ni *decenas de millar*, bastará para su representacion usar de los caracteres 9, 1, 0, 8, 0, 2, puestos á continuacion unos de otros de derecha á izquierda, y será 2080 19.

El número *treinta y seis billones quinientos millones veinte mil cuatrocientos siete*, que contiene 7 *unidades simples*, 0 *decenas*, 4 *centenas*; 0 *unidades de millar*, 2 *decenas de millar*, 0 *centenas de millar*; 0 *unidades de millon*, 0 *decenas de millon*, 5 *centenas de millon*; 6 *unidades de billon* y 3 *decenas de billon*, estará bien representado por 36500020407 *.

El sistema que acabamos de esplicar se llama *sistema decimal*, porque en él se necesitan diez unidades de cierto órden para formar una del órden superior, y porque *diez* son las cifras ó caracteres que se emplean para representar todos los números; siendo el de *diez* la *base* de dicho sistema.

6. Hagamos ahora una observacion importante: resulta de la no-

---

* Adviértase que el autor en la cantidad 36500020407 pasa de las unidades de millon á las de billon, lo cual proviene de que los franceses en el sistema de numeracion no hacen uso mas que de periodos de tres cifras. Mas como nosotros contamos por periodos de seis, dividiendo cada uno en dos órdenes, nos parece será de mucha utilidad la siguiente fórmula:

$$\underbrace{S'''}_{cdu}\ \underbrace{B}_{cdu}\ \underbrace{S''}_{cdu}\ \underbrace{M'}_{cdu}\ \underbrace{S'}_{cdu}\ \underbrace{M}_{cdu}\ \underbrace{S}_{cdu.}$$

Las letras pequeñas *udc* representan las palabras genéricas, *unidades*, *decenas*, *centenas*. La letra S espresa las unidades símples, M los millares, S' las unidades de millon, M' los millones, S'' las unidades de billon, B los billones, y S''' las unidades de trillon. Así se dirá: *unidad*, *decena y centena*, *unidad de millar*, *decena de millar* y *centena de millar*: pasando á S', será *unidad de millon*, *decena de millon y centena de millon*, *unidad de millar de millon*, *decena de millar de millon y centena de millar de millon*: pasando á S'', será *unidad de billon*, *decena de billon y centena de billon*, *unidad de millar de billon*, *decena de millar de billon y centena de millar de billon*: por último en S''' diremos, *unidad de trillon*, *decena de trillon y centena de trillon*. Luego el número *ochocientos noventa y cinco trillones*, *setecientos veinticuatro mil billones*, *trescientos cinco billones*, *seiscientos diez y nueve mil millones*, *doscientos millones*, *quinientos mil trescientos cuarenta y siete* estará bien representado por la cantidad 895,724305,619200,500347. EL TRADUCTOR.

menclatura que todo número escrito en cifras se divide en centenas, decenas y unidades simples; en centenas, decenas y unidades de millar; en centenas, decenas y unidades de millon &c.; es decir, en *periodos* de unidades simples, de millar, de millon, de billon, espresándose cada uno de ellos por medio de *tres cifras*, escepto el último, que es el de mas valor, y puede constar no mas que de *dos* y aun de *una sola*. Acostumbrado ya á escribir periodos de tres cifras, bastará escribir sucesivamente y por su órden de derecha á izquierda los de las unidades, los de los millares, los de los millones, billones &c.

Tambien se puede principiar por la izquierda, esto es, *escribir en primer lugar el periodo de unidades mas crecidas, y á su derecha los demás periodos por órden respectivo de sus unidades*. Así es como podrán representarse fácilmente los números enunciados en lenguaje vulgar, y que no estan escritos con todas sus letras; mas es necesario tener mucho cuidado de no omitir los ceros destinados á ocupar el lugar de las unidades que faltan, en lo que no podrá ocurrir mucha dificultad, haciéndose cargo de que cada periodo, escepto el primero de la izquierda, debe constar de tres cifras.

Sea por último ejemplo el número *cuatrocientos seis billones veintiocho millones doscientos cincuenta mil cuarenta y ocho*. Escríbase, pues, á la izquierda el periodo de los *billones*, y á la derecha de este los demás periodos hasta llegar á las *unidades de primer órden*, y resultará que representado en cifras es 406,028,250,048.

7. Sobre la observacion que precede está fundado el modo de traducir al lenguaje vulgar cualquier número escrito por medio de cifras, que consiste en *dividir el número en periodos de tres cifras comenzando por la derecha, y despues traducirlos al lenguaje comun dando principio por la izquierda, cuidando de darle á cada uno el valor que espresan los caracteres que le componen*.

Así el número 70,345,601, dividido como se ha dicho, se ve que en lenguaje vulgar espresa la cantidad de *setenta* MILLONES, *trescientos cuarenta y cinco* MIL, *seiscientos uno*.

Del mismo modo el número 5,302,400,056,702 espresa la cantidad de *cinco* TRILLONES, *trescientos dos* BILLONES, *cuatrocientos* MILLONES, *cincuenta y seis* MIL, *setecientos dos*.

8. Falta, pues, para presentar en toda su latitud la teoría de los números, el indicar el medio de escribir por cifras las fracciones ó quebrados; pero antes de dar este paso es indispensable formarse una idea clara y exacta de esta clase de números, cual se les considera en Aritmética.

Supongamos que se quiere medir *la longitud de una pieza de tela*. Para esto elíjase la unidad de medida de la longitud llamada *vara*, y tomándola una, dos, tres, cuatro veces, en una palabra cuantas sea posible sobre el largo de la tela, se podrán hallar dos resultados, que son: ó despues de tomada dicha unidad de medida cierto número de veces, por ejemplo 15, no queda nada; ó bien podrá quedar un resto, menor que la vara. En el primer caso la pieza contendrá 15 varas que es *un número entero*, y en el segundo habrá que añadir á dicho número de varas la fraccion ó parte de vara que ha quedado. Pero ¿cómo valuar esta parte? ¿cómo compararla con la unidad? Muy fácilmente: concíbase la unidad de medida dividida en dos partes iguales, ó lo que es lo mismo, en *dos mitades*, y si el resto es igual á una de ellas, se dirá que la pieza en cuestion tiene 15 varas y *media* de longitud.

Si el resto que ha quedado es menor ó mayor que la mitad de la vara, se concebirá á esta *mitad* dividida en otras *dos* partes iguales llamadas *cuartas*, y si entonces *una* ó *tres* de ellas se contienen exactamente en el resto, se dirá que este es igual á *una cuarta* ó á *tres cuartas de vara.*

En vez de estar dividida la unidad en dos ó en cuatro partes iguales, puede estarlo en *tres* iguales tambien, y entonces estas partes se llamarán *tercias*, ó en *cinco* y se nombrarán *quintos*, ó en seis y se denominarán *sestos*, y así sucesivamente. Demos por supuesto para fijar las ideas, que la vara se divide en *treinta y seis* partes iguales, y una de ellas está exactamente contenida *siete* veces en el resto hallado, se dirá entonces que es igual á *siete* veces la *trigésima sesta* parte de vara, ó lo que es lo mismo, á *siete pulgadas*, y por tanto toda la pieza tendrá 15 varas y 7 pulgadas.

De aquí se deduce que para formarse una idea clara de una fraccion de unidad de cualquier especie, es necesario concebir la *unidad* dividida en un *número entero* de partes iguales, y de ellas tomar una, dos, tres, cuatro,... y su conjunto formará lo que propiamente se llama *fraccion ó quebrado.* Así el enunciado de una fraccion comprende dos números enteros, á saber: *el que designa en cuántas partes iguales está dividida la unidad*, se llama DENOMINADOR, *y el que señala cuántas de estas partes forman la fraccion*, se le da el nombre de NUMERADOR; y por tanto *cinco octavos* de vara, *trece veintavos* de libra son quebrados. En el primer caso se considera la vara dividida en *ocho* partes iguales llamadas *octavos*, y de ellas se toman *cinco*; *ocho* es el denominador y *cinco* el numerador; y en el segundo caso la libra se supone dividida en *veinte* partes iguales llamadas *veintavos*, y de ellas se toman *trece*: *veinte* es el denominador y *trece* el numerador.

Resulta de aquí igualmente que toda fraccion es una magnitud comparada con una parte de la unidad principal, parte que puede considerarse como una especie de unidad secundaria. Así pues, el quebrado *trece veintavos* de vara estando compuesto de trece veces la *veintava* parte de una vara, este *veintavo* es una unidad particular que la fraccion propuesta contiene *trece* veces. Luego dos fracciones cualesquiera serán de una misma especie, siempre que sus denominadores sean iguales. Por ejemplo, *cinco dozavos*, *siete dozavos*, *once dozavos*, son quebrados de una misma especie; mas no lo serán *tres cuartos* y *dos tercios*, cuyos denominadores son diferentes.

Para espresar las fracciones se ha convenido en poner el numerador encima del denominador, interponiéndoles una línea ó raya. Así el quebrado *tres cuartos*, en caracteres numéricos equivale á $\frac{3}{4}$; del mismo modo, *siete dozavos* se espresa por $\frac{7}{12}$; *veintitres, treinta y cincoavos* $\frac{23}{35}$.

Y recíprocamente, $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{47}{72}$, representan los quebrados siete *octavos*, trece *quinzavos*, cuarenta y siete *setenta y dosavos*. Para enunciar una fraccion se nombra primero el numerador, y despues el denominador, añadiendo al fin la partícula *avo* *.

9. Las primeras necesidades del hombre social le conducen á cada instante á resolver cuestiones que le obligan á combinar dos ó muchos números de una misma naturaleza ó diferentes. Estas combinaciones, pues, constituyen las *operaciones de la Aritmética* ó el *cálculo numérico*; y á fin de darlas á conocer vamos á proponer algunas cuestiones relativas al comercio.

PRIMERA CUESTION.—*Cierto mercader ha vendido á una persona* 5 *varas y* $\frac{2}{3}$ *de tela, á otra* 7 *varas y* $\frac{1}{2}$, *y á la tercera* 12 *varas y* $\frac{3}{4}$ *de la misma tela: se quiere saber el número total de varas vendidas.*

Para esto será necesario reunir los tres números de varas vendidas en uno solo; ó de otro modo, hacer la ADICION de dichos *tres números compuestos de enteros y quebrados.*

2.ª CUESTION.—*Estos tres números de varas se han tomado de una pieza cuya longitud total era de* 30 *varas y* $\frac{2}{3}$: *el mercader quiere saber qué tela deberá quedarle.*

Para ello búsquese la diferencia que hay entre el número 30 $\frac{2}{3}$, que espresa el valor primitivo de la pieza y el número total de las varas vendidas, es decir, que será necesario *sustraer el segundo número del primero.*

3.ª CUESTION.—*Una persona ha comprado* 48 *varas de cierto género á razon de* 25 *reales la vara: se pregunta cuánto le ha costado el número total de varas.*

---

* Se esceptuan de esta regla los quebrados cuyos denominadores son 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 y 10, pues para enunciarlos se dice, *medios, tercios, cuartos, quintos, sestos, sétimos, novenos y décimos.* EL TRADUCTOR.

Bien claro está que para obtener el resultado no habrá mas que tomar 48 veces 25 reales, ú obtener un resultado de 48 números iguales á 25 reales. Esta operacion se llama MULTIPLICACION, y no es mas que una especie de *adicion*: consiste en formar el conjunto de varios números iguales.

Veamos la misma cuestion, cambiados los valores de los números ó *datos del problema*.

Una persona ha comprado $\frac{4}{12}$ *varas de cierto género á razon de* $\frac{17}{20}$ *reales la vara: se pregunta cuánto deberá pagar por los* $\frac{4}{12}$ *de vara.*

Fácilmente se concibe que si la vara cuesta $\frac{17}{20}$ reales, $\frac{4}{12}$ varas que no viene á ser mas que una tercera parte de la vara, costará la tercera parte de $\frac{17}{20}$ reales, designada por $\frac{4}{12}$, es decir, que para obtener el resultado de la cuestion es preciso tomar los $\frac{4}{12}$ de $\frac{17}{20}$; cuya operacion se llama *multiplicacion de quebrados*. Llámasele así porque la cuestion á que da lugar es absolutamente la misma, con corta diferencia en cuanto á los *datos*, como cualquier otra que condujera á una multiplicacion de números enteros.

A primera vista se comprende que la palabra *multiplicacion*, designada para espresar una idea de aumento, no parece propia para representar una operacion que consiste en tomar de un número una parte indicada por una fraccion. Pero se ha hallado un medio de unir la multiplicacion de los números enteros con la de los quebrados, diciendo que *multiplicar un número cualquiera que sea por otro, es hallar otro tercero que sea respecto del primero lo que el segundo es respecto de la unidad.* Si ambos números son enteros, se ve por esta definicion que basta tomar el primero tantas veces como unidades hay en el segundo; y si por el contrario son quebrados, se debe tomar del primero *una parte* indicada por el segundo.

4.ª CUESTION. *Una persona ha comprado* 12 *varas de género, mediante la suma de* 84 *reales*: *¿á cómo le ha costado cada vara?*

Se ve, pues, desde luego que si este precio fuese conocido, tomándolo 12 veces ó multiplicándolo por 12 deberia dar un resultado igual á 84: la cuestion se reducé por consiguiente á *hallar un tercer número que multiplicado por el segundo* 12, *reproduzca el primero* 84. Esta operacion se llama DIVISION.

Para aclarar el sentido de esta denominacion, que indica la separacion de un número en partes iguales, supongamos que *la suma de* 84 *reales se quiere dividir igualmente entre* 12 *personas*. Claro es que si la parte de cada una de ellas estuviese conocida, multiplicándola por 12, el resultado debiera ser 84. Luego *dividir un número* 84 *en tantas partes iguales como unidades contiene el número* 12, *y buscar otro tercero, que multiplicado por un segundo* 12, *reproduzca el primero* 84, *son dos operaciones idénticas.*

Veamos la misma cuestion con valores fraccionarios.

Una persona ha comprado $\frac{5}{6}$ *de vara por la suma de* $\frac{19}{20}$ *de real: se pregunta cuál es el precio de la vara.*

En este caso la cuestion queda reducida á hallar un número tal, que en tomando los $\frac{5}{6}$ ó multiplicándolos por ellos resulte la fraccion $\frac{19}{20}$. Deberá por lo tanto efectuarse una *division* en el sentido que se le acaba de dar á esta palabra, y no en el de una separacion en partes iguales.

Muchas cuestiones podríamos citar, en las que fuese indispensable el uso de las cuatro operaciones ya vistas; y supuesto que ellas se presentan á cada paso en las circunstancias de la vida, forzoso será conocer medios de ejecutar las operaciones que su resolucion exige.

La Aritmetica *tiene por objeto especial establecer reglas fijas y ciertas para efectuar con los números todas las operaciones posibles.* Esta primera parte de las Matemáticas comprende una porcion de propiedades descubiertas en las investigaciones hechas para buscar dichas reglas y facilitar su aplicacion. Vamos, pues, á esponerlas en su órden respectivo, refiriéndonos á lo que dijimos en el n.° 2, que para tratar las reglas como independientes de las diversas especies de cuestiones, es muy útil considerar los números como *abstractos*, sin que por esto dejemos de hacer uso de los *números concretos* en aquellas cuestiones cuyo objeto es el de familiarizar á los principiantes con los procedimientos que conducen á su resolucion *.

A fin de proceder con método, nos ocuparemos antes de todo en esponer las reglas de las operaciones que se han de hacer con los números enteros.

---

* De aquí en adelante usaremos de la palabra *problema* en lugar de *cuestion*, por ser término mas propio de las Matemáticas que este último. El traductor.

CAPITULO PRIMERO.

Operaciones de los números enteros.

DE LA SUMA Ó ADICION.

10. *Añadir ó sumar muchos números entre sí es reunirlos en uno solo, ó mas bien, es formar un número que contiene tantas unidades como hay en dichos números considerados separadamente.*

El resultado de esta operacion se llama *suma* ó *total.*

La *adicion* de los números de una sola cifra es bien fácil, y los jóvenes en su infancia aprenden á hacerla con el auxilio de los dedos y la conservan grabada en su memoria.

Así si se quieren sumar los números 5, 7, 4, 8 y 6 se dirá: 5 y 7 son 12 *, y 4 son 16 y 8 son 24, y 6, 30: luego 30 es la suma pedida.

Del mismo modo se hallará que 42 es la suma de los números 7, 6, 5, 8, 7, 9.

EJEMPLO 1.º—*Se quiere saber el total de la adicion de los números* 7453 y 1534.

Despues de escritos los números como á continuacion se ve y haberlos rayado por debajo, se dice comenzando por las unidades simples, 3 y 4 son 7, cuyo resultado se colocará bajo la columna de las unidades.

$$\begin{array}{r} 7453 \\ 1534 \\ \hline 8987 \end{array}$$

---

* El uso de los dedos para obtener el número 12 supone las adiciones sucesivas de una unidad. Así se dice, 5 y 1 son 6, y 1, 7 y 1, 8... &c., siguiendo este órden hasta haber añadido al 5 todas las unidades del número 7.

En general es difícil establecer las operaciones del entendimiento que conducen al resultado de estas adiciones elementales, y hasta cierto punto puede asegurarse que cada cual tiene un medio mas ó menos sencillo de obtenerlo.

Pasando á las decenas, 5 y 3 son 8, que se colocará bajo la segunda columna correspondiente á las decenas.

A continuacion, 4 y 5 son 9: colóquese bajo la columna correspondiente á las centenas.

Por último, 7 y 1 son 8, que se escribirá en la correspondiente á los miles ó unidades de tercer órden.

El número 8987 hallado mediante esta operacion es la *suma* de los dos números propuestos, pues encierra en sí las unidades, decenas, centenas y miles que se han adicionado sucesivamente.

Ejemplo 2.° — Se quieren sumar los cuatro números 5047, 859, 3507, 846.

Escritos como en el anterior ejemplo, se principiará por las unidades diciendo: 7 y 9, 16 y 7, 23 y 6, 29; las 9 unidades simples se colocan bajo su columna correspondiente, y se reservan las dos decenas para añadirlas á las cifras de la columna siguiente que representa las decenas.

5047
859
3507
846
10259

Pasando á esta columna, diremos: 2 de reserva y 4 son 6 y 5, 11 y 4, 15: escríbase 5 bajo la columna de las decenas, reservando 1 centena, que deberá unirse á la columna de su órden.

Haciendo igual operacion con esta columna que con las anteriores se obtendrán 22 centenas, escribiendo 2 de ellas bajo la columna á que corresponden, y reservando 2 unidades de millar, que deberán sér incorporadas á la columna de su grado.

Por último, 2 reservadas y 5 son 7, y 3, 10; el 0 se colocará bajo la columna de las unidades de millar, y el 1 ocupará las decenas, resultando por *suma* el número 10259.

Regla general. *Para añadir ó sumar los números entre sí, se colocarán unos debajo de los otros, de modo que las unidades de un mismo órden ocupen una misma columna vertical, y en seguida se rayarán por bajo con una línea. Añádanse sucesivamente las cifras que componen cada una de las columnas, principiando por las de las unidades simples y pasando en seguida á las columnas situadas á la izquierda por el órden en que estan escritas. Escríbase bajo la línea la suma de cada columna, si está espresada por una sola cifra; pero si pasan de 9 (en cuyo caso la representan muchas de las que la primera á la derecha indica unidades de esta columna, y las de la izquierda decenas del mismo órden), se escribirá solamente la cifra de las unidades por debajo de su columna, reservando las decenas para añadirlas á la inmediata de la izquierda. Hecha la misma operacion con las demás columnas, tendremos bajo la línea divisoria la* suma pedida, *pues dicho resultado contiene las unidades, decenas, centenas* &c. *de los números propuestos.*

11. Nota. — Si la suma de las cifras contenidas en cada columna es todo lo mas igual á 9, será indiferente comenzar la operacion por la columna de las unidades simples, ó por las de mas alto grado.

Pero como muchas de estas sumas suelen ser mayores que 9, si se empieza por la izquierda, podrá acontecer que retrocedamos para rectificar una cifra ya escrita, aumentándola en tantas unidades como decenas de las unidades de la siguiente columna se hubieran obtenido operando sobre ella. Por eso conviene en todos los casos comenzar por la derecha mejor que por la izquierda.

DE LA SUSTRACCION.

12. El objeto de la sustraccion es *hallar el esceso de un número sobre otro mas pequeño. Este esceso* se llama *resto ó diferencia.*

Puede por lo tanto definirse la sustraccion una operacion cuyo objeto es este: *Dada la suma de dos números y uno de ellos, hallar el otro*: bajo este punto de vista la operacion de que hablamos es opuesta á la adicion.

Cuando los números propuestos no se componen mas que de una cifra, la sustraccion es bien fácil. Así la diferencia de 9 sobre 6 es 3, ó bien, quitando 6 de 9 quedan 3. Del mismo modo si de 7 se quitan 5, quedan 2.

Tambien es fácil sustraer un número de una sola cifra de otro mayor, siempre que el residuo no tenga mas que una sola. Así si de 13 se quitan 7, quedan 6, porque 7 y 6 componen 13: del mismo modo si de 17 se quitan 9, quedan 8, pues 8 y 9 son 17.

Estas operaciones que tan solo suponen el ejercicio de la memoria sobre la adicion de los números de una sola cifra, van á servirnos de base para la sustraccion de los números que se componen de muchas.

PRIMER EJEMPLO.—*Se quiere sustraer de* 8789 *el número* 5467.

Colocando el número mayor encima del menor y rayados por debajo, la operacion se comenzará por la primera columna diciendo: de 7 á 9 van 2, que se colocarán bajo la columna de las unidades simples: pasando á la segunda columna, se dirá de 6 á 8 van 2; colóquese bajo las decenas: haciendo igual operacion sobre la columna de las centenas y miles, 4 á 7, 3, 5 á 8, 3; lo que da por resultado final el número 3322, *resto pedido.*

$$\begin{array}{r} 8789 \\ 5467 \\ \hline 3322 \end{array}$$

En efecto, por la misma naturaleza de las operaciones que acabamos de efectuar, se ve que el número mayor contiene mas que el menor, 2 unidades simples, 2 decenas, 3 centenas, 3 unidades de millar, y por tanto le escede en la cantidad 3322.

EJEMPLO 2.º—*Hallar la diferencia que hay entre los dos números* 83456 y 28784.

Procediendo como anteriormente, diremos: de 4 á 6 van 2, que deberá colocarse bajo la columna de las unidades.

Pero al pasar á la columna de las decenas se presenta una dificultad, y es que la cifra inferior 8 es mayor que la superior 5, y por tanto no puede ser sustraida. Para allanar esta dificultad se toma mentalmente de las cifras de las centenas 1, cuyo valor es 10 decenas, y añadiéndola al 5, se tendrán 15 decenas; réstense en-

$$\begin{array}{r} 83456 \\ 28784 \\ \hline 54672 \end{array}$$

tonces las 8 de las 15, y quedarán 7, que ocupará el lugar correspondiente á las decenas.

Pásese á la columna inmediata, y como á la cifra superior 4 se le quitó 1 en la anterior sustraccion, se dirá, tomando de la inmediata 8, 1 millar, que vale 10 centenas, y añadiéndolas á las 3, de 7 á 13 van 6, que se escribirá bajo la columna de las centenas.

Pásese á las unidades de millar, y no pudiéndose sustraer 8 de 2, se tomará de la inmediata cifra una decena de millar, que vale 10 unidades del mismo órden, y entonces será 8 de 12, 4, que deberá escribirse debajo de la columna de los miles.

Finalmente, como á la cifra 8 se le ha rebajado 1, habrá quedado en 7, y deberá decirse de 2 á 7 van 5.

Así pues, el *resto pedido* ó el esceso del número mayor sobre el menor es 54672.

Para comprender fácilmente cómo por este medio se llega al fin propuesto, bastará notar que despues de los artificios empleados para efectuar las sustracciones parciales, se pueden colocar los números en cuestion del siguiente modo:

	Decenas de millar.	*Millares.*	*Centenas.*	*Decenas.*	*Unidades.*
1.er número. . .	7	12	13	15	6
2.º número. . . .	2	8	7	8	4
	5	4	6	7	2

Por lo cual se ve que el número superior contiene 2 unidades, 7 decenas, 6 centenas, 4 unidades de millar y 5 decenas de millar mas que el inferior, ó lo que es lo mismo, le escede en 54672 unidades.

3.er Ejemplo.—Se quiere restar el número 158429 de 300405.

$$\begin{array}{r} 99\ 9 \\ 300405 \\ 158429 \\ \hline 141976 \end{array}$$

Como 9, cifra de unidades del número inferior, es mayor que 5, cifra correspondiente al superior, deberá tomarse 1 decena de la primera cifra de la izquierda; pero como esta es 0, se necesita recurrir á la inmediata de las centenas y tomar 1, que vale 10 decenas; y supuesto que para efectuar la sustraccion es suficiente 1 decena, la añadiremos al 5, que formará 15, y dejando el 9 colocado sobre el 0, se dirá de 9 á 15 van 6, que se escribe debajo de la primera columna.

Pasando á las decenas se dirá: de 2 á 9 van 7.

Para las centenas como la cifra 4 ha quedado en 3 por la 1 que se le quitó, deberá recurrirse á la de los miles; pero siendo esta 0, pasaremos á la inmediata de las decenas de millar tomando de ella 1, cuyo valor es 10 del órden siguiente y 100 del órden de los miles; y como para que la sustraccion pueda verificarse basta 1, dejaremos las 99 sobre los dos ceros, y añadiéndolas á las 3 centenas resultarán 13, en cuyo caso diremos de 4 á 13 van 9, que se colocará debajo de la columna de las centenas.

En las dos sustracciones siguientes, como cada uno de los ceros está reemplazado por la cifra 9, se dirá: de 8 á 9 va 1, de 5 á 9 van 4, poniendo estos restos bajo las columnas á que correspondan.

Y finalmente pasando á la primera columna de la izquierda, deberá decirse de 1 á 2 (porque á la cifra 3 se le disminuyó de 1) va 1: así el *resto pedido* es 14197.6.

En efecto, reflexionando sobre el modo con que el número superior ha sido descompuesto, se podrá plantear así la operacion.

	Cent. de millar.	*Dec. de millar.*	*Miles.*	*Centenas.*	*Decenas.*	*Unidades.*
1.er número.	2	9	9	13	9	15
2.º número. .	1	5	8	4	2	9
	1	4	1	9	7	6

Luego el número superior tiene 6 unidades, 7 decenas, 4 centenas, 1 unidad de millar, 4 decenas de millar y 1 centena de millar mas que el inferior, ó lo que es lo mismo, le escede en la cantidad 141976.

Regla general. *Para sustraer de un número otro mas pequeño, se colocará el primero encima del segundo de modo que se correspondan las unidades de cada órden, rayándolas despues por debajo, y empezando por la derecha se harán sucesivamente las sustracciones de las unidades, decenas, centenas* &c., y *se escribirán los residuos parciales unos á continuacion de otros contando de derecha á izquierda*: el número representado por estas cifras es el *resto total* ó el *resultado pedido.*

Cuando una cifra de la línea inferior es mayor que la correspondiente á la línea superior, esta se aumentará mentalmente en 10 *unidades, quedando disminuida en una la inmediata de la izquierda.*

Si inmediatamente á la izquierda de una cifra superior menor que la correspondiente inferior hay ceros, se le aumentará mentalmente en 10 *unidades, reemplazando aquellos por* 9 *y disminuyendo de una unidad la cifra significativa superior que está junto á los ceros.*

Por este procedimiento se ve que si de.	603000401
se sustrae.	305724787
el resultado será.	297275614

13. Observacion primera.—Si cada una de las cifras del número inferior es menor que su correspondiente superior, será indiferente principiar la operacion por la derecha ó por la izquierda.

Pero como suele suceder que alguna de las cifras inferiores sea mayor que la correspondiente superior, en cuyo caso no se puede verificar la sustraccion si no se le aumenta á esta última con auxilio de su inmediata á la izquierda, será muy conveniente empezar siempre por la derecha, á fin de operar con facilidad lo necesario en tales casos.

14. **Observacion segunda.**—Es bien claro que al hacer la sustraccion de una cifra superior disminuida, se le puede considerar tal cual es, siempre que se aumente en una unidad la correspondiente inferior. Este método es mucho mas cómodo para la práctica.

Así en el ejemplo anterior despues de haber dicho en la sustraccion de las unidades de 7 á 11 van 4, al pasar á las decenas en vez de decir de 8 á 9, 1, se podrá decir tambien de 9 á 10, 1: en las centenas en lugar de decir de 7 á 13, 6, se dirá de 8 á 14, 6, y así sucesivamente.

Es necesario tener mucho cuidado en no aumentar la cifra inferior, en tanto que la sustraccion anterior no haya podido verificarse inmediatamente. En la division haremos muy frecuente uso de este nuevo método, ó mas bien modificacion.

PRUEBAS DE LA ADICION Y SUSTRACCION.

15. *Prueba de una operacion aritmética* es una segunda operacion que se hace con el objeto de asegurarse de la exactitud de la primera.

La prueba de la adicion se efectua volviendo á sumar los números ya sumados, pero principiando por la izquierda. *Despues de sumar las cifras de la primera columna de la izquierda se les resta de su parte correspondiente en el total, escribiendo debajo el residuo, que reducido mentalmente en unidades del órden de la cifra que sigue, se añade á las unidades del mismo órden contenidas en la suma total. Súmense tambien las cifras de la segunda columna, sustrayendo esta suma parcial de la parte correspondiente en el total, y continuando en este órden la operacion será exacta siempre que en la última sustraccion resulte* 0.

Así, despues de haber hallado que los cuatro números

$$\begin{array}{r} 5047 \\ 859 \\ 3507 \\ 846 \\ \hline \end{array}$$

componen el total. 10259

para ver si se verifica el resultado 10259, se sumarán los mismos números comenzando por la izquierda: 5 y 3 son 8 unidades de millar, que restadas de 10 mil dan por residuo 2 mil, que añadidos á la cifra 2 centenas producen 22 centenas: pasando á la segunda columna, será 8 y 5 son 13 y 8, 21, que restado de 22 queda 1 centena, la que sumada con las 5 decenas da 15 decenas: 4 y 5 son 9 y 4, 13; de 13 á 15 van 2, que siendo decenas, sumadas con 9 forman 29: por último, 7 y 9 son 16 y 7, 23 y 6, 29, que restados de 29, resulta 0. Luego la operacion es exacta.

La prueba de la sustraccion se hace añadiendo al número menor el resto hallado; cuya operacion debe reproducir el número mayor, pues el resto añadido no indica otra cosa que el esceso de dicho número sobre el menor.

Así en el ejemplo que tenemos á la vista, ...		83456
despues de haber hallado que 54672 es		28784
el esceso del número mayor sobre el menor,	resto. . . .	54672
si se suma (el esceso) con el número	prueba. . .	83456

28784, deberá resultar el otro 83456, lo cual se verifica efectivamente.

16. A continuacion citamos algunos ejemplos de adicion y sustraccion con sus correspondientes pruebas.

Ejemplos de adicion.

83054	700548
256870	897597
748759	6588
90874	69764
130909	407300
8746	987847
	1207046
1319212	4276690

Ejemplos de sustraccion.

4073050062	20004001003
2803767086	8405128605
1269282976	11598872398
4073050062	20004001003

Problema.—*Un comerciante cuyo capital es* 65750 *reales ha pagado á varios acreedores las sumas de* 13259 *reales al primero de ellos*, 18704 al *segundo*, 22050 al *tercero*, y finalmente 9850 al cuarto: hechos estos pagos se pregunta *en qué ha quedado el capital primitivo.*

Solucion.—Reunidos en uno solo estos diversos pagos, el comerciante sustrae la *suma total* de su primer capital; y el resultado de esta sustraccion es lo que debe quedar.

Tabla de las operaciones.

13259	65750	capital existente.
18704	63863	suma pagada.
22050	———	
9850	1887	diferencia.
———		
63863		Debe quedarle, hechos los pagos, 1887 reales.

Nótese que al efectuar la adicion y sustraccion anterior se han considerado como *abstractos* los números propuestos, aun cuando eran *concretos* en el enunciado; pero hallado el resultado 1887, se le ha dado el nombre de la especie de unidad tratada en el problema; marcha que deberá seguirse en las aplicaciones. Los procedimientos de las operaciones, siendo independientes de la naturaleza de los números, permiten se considere á estos bajo un punto de vista como si fuesen abstractos, reservándose el mirarlos como concretos para el resultado final.

DE LA MULTIPLICACION.

17. *Multiplicar un número por otro es* (véase n.º 9) *formar un tercer número que sea respecto del primero lo que el segundo es respecto de la unidad*; y cuando los números propuestos son enteros, su multiplicacion se reduce á *tomar el primero tantas veces como unidades contiene el segundo.*

Llámase *multiplicando* el número que se quiere multiplicar, y *multiplicador* aquel por el que se multiplica, ó el que designa cuántas veces debe tomarse el primero: *producto* es el resultado de la multiplicacion, y á los números propuestos se les denomina *factores del producto.*

Hablando con propiedad, la multiplicacion no es mas que una especie de adicion, pues bastaria colocar á continuacion unos de otros tantos números iguales al multiplicando como unidades contiene el multiplicador, y sumarlos despues para obtener el resultado. Pero como esta operacion llegaria en ciertos casos á ser muy complicada, se ha buscado un medio de simplificarla, el cual es la *multiplicacion.*

18. Cuando los factores constan de una sola cifra, la multiplicacion es fácil de efectuar por simples adiciones. Así para multiplicar 7 por 5 se dirá: 7 y 7 son 14, y 7 son 21, y 7 son 28, y 7, 35: este número, que es el resultado de la adicion del 7 cinco veces consigo mismo, espresa el producto de 7 por 5.

Conviene mucho que los principiantes se ejerciten muy á menudo en esta clase de multiplicaciones, á fin de conservar sus resultados en la memoria y poder obtener fácilmente los productos de números espresados por muchas cifras. No obstante, hasta tanto que no se haya adquirido bien esta práctica, será muy útil tener á la vista la siguiente *Tabla de multiplicacion* ó PITAGORICA del nombre de su inventor, ó al menos del primero que dió á conocer su uso.

TABLA DE MULTIPLICACION.

Direccion horizontal.

Direccion vertical.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La primera línea horizontal de esta tabla se forma añadiendo 1 sucesivamente hasta llegar al número 9.

La segunda añadiendo 2 por el mismo órden, la tercera añadiendo 3, y así con las demás.

Tambien podrá formarse esta tabla por columnas verticales, pues *cada columna de estas se compone de los mismos números que su correspondiente horizontal*: así la sesta columna horizontal componiéndose de los números 6, 12, 18,.... 54, su correspondiente vertical encierra los mismos números 6, 12, 18,.........54.

Supuesto esto, para hallar el producto de dos números espresados por una sola cifra se busca el *multiplicando* en la primera línea horizontal, en seguida se desciende *verticalmente* hasta encontrar el *multiplicador*, que deberá estar en la primera vertical, y el número contenido en la *casilla* respectiva es el producto.

Por ejemplo, si se quiere saber cuál es el producto de 8 por 5, tomado el 8 en la línea horizontal se descenderá verticalmente hasta hallar el 5, y el número 40 contenido en la casilla que á aquel corresponde es el producto pedido.

19. Supongamos ahora que el *multiplicando está compuesto de muchas cifras, y el multiplicador solo contiene una.*

PRIMER EJEMPLO. Se quiere multiplicar 8459 por 7.

Puede obtenerse el resultado (n.° 17) escribiendo el número 8459, como en la adicion, tantas veces como indica el multiplicador 7, de modo que escrita la operacion como aquí en frente se ve, ... y añadiendo sucesivamente las unidades, decenas, &c., se hallará el resultado 59213.

Es evidente que la operacion está reducida á tomar 7 veces las 9 unidades, las 5 decenas &c. del multiplicando, y á hacer la suma de estos productos parciales.

$$\begin{array}{r} 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ \hline 59213 \end{array}$$

Luego tambien podrá hacerse la operacion de este otro modo: colóquese primero el multiplicando y en seguida el multiplicador, rayándolos por debajo. Despues principiando por la derecha se dirá: 7 veces 9 (véase la tabla de la multiplicacion) son 63, ó 6 decenas y 3 unidades: el 3 se pone bajo las unidades, y el 6 se reserva para el producto de las decenas.

$$\begin{array}{r} 8459 \\ 7 \\ \hline 59213 \end{array}$$

Pasando á las decenas: 7 por 5 son 35 y 6 de resto 41; el 1 se coloca debajo de las decenas y el 4 se reserva para las centenas: 7 por 4 son 28 y 4 reservadas son 32 centenas, ó 3 unidades de millar y 2 centenas; estas quedan en su correspondiente lugar y las 3 se reservan.

Por último, 7 por 8, 56 y 3 son 59, que se colocará á la izquierda de las centenas por no quedar mas cifras en el multiplicando.

Así 59213 es el producto pedido.

De donde se sigue que PARA MULTIPLICAR UN NUMERO DE MUCHAS CIFRAS POR OTRO DE UNA SOLA, *es necesario multiplicar sucesivamente las unidades, decenas,* &c. *del multiplicando por el multiplicador, escribiendo la parte de estos productos parciales que corresponda, en el lugar que deban ocupar, y cuidando reservar las decenas para sumarlas con las decenas, las centenas para sumarlas con las centenas* &c.

2.° EJEMPLO. — Se quieren multiplicar 47008 por 9.

Colocando multiplicando y multiplicador como queda dicho, y empezando por la derecha tendremos: 9 por 8 son 72; el 2 se colocará en su lugar y el 7 se reserva.

$$\begin{array}{r} 47008 \\ 9 \\ \hline 423072 \end{array}$$

Despues, 9 veces 0 es 0; mas como se tienen 7 de reserva, este ocupará el lugar de las decenas.

9 veces 0 es 0; escríbase este en el lugar de las centenas, por la razon dada al tratar de la espresion 0.

Pasando á las unidades de millar: 9 por 7 son 63; se escribirá el 3 y se reservará el 6.

Finalmente, 9 por 4 „ 36 y 6 de reserva son 42, que se escribirá inmediatamente á la izquierda.

Así el producto pedido es 423072.

20. Antes de pasar al caso en que multiplicando y multiplicador se componen de muchas cifras, vamos á esponer el modo de hacer un número 10, 100, 1000....... veces mayor, ó de multiplicarlo por 10, 100, 1000.......

Resulta del principio fundamental de la numeracion (n.º 5) que si se coloca un 0 á la derecha de un número ya escrito, cada una de sus cifras significativas, adelantando un lugar hácia la derecha, se hace 10 veces mayor que antes era. Del mismo modo si son dos 0, se le hace 100 veces mayor, pues cada una de las cifras significativas representa unidades de un valor 100 veces mayor, y así sucesivamente.

Luego *para multiplicar cualquier número entero por* 10, 100, 1000.....&c., *bastará escribir á su derecha* 1, 2, 3......&c. *ceros.*

21. *Consideremos ahora el caso en que multiplicando y multiplicador se componen de muchas cifras.*

PRIMER EJEMPLO.— Se quiere multiplicar.	87468
por.	5847
	612276
	3498720
	69974400
	437340000
	511425396

Colóquese el multiplicador debajo del multiplicando de modo que se correspondan las unidades de un mismo órden, rayándolos por debajo.

Desde luego se ve que multiplicar 87468 por 5847 se reduce á tomar el multiplicando 7 veces, mas 40, mas 800, mas 5000, y á reunir estos productos parciales en uno solo.

De modo que con arreglo al n.º 19 el producto de 87468 por 7 es 612276.

Pero ¿cómo obtener el de 87468 por 40?

Muy fácilmente: supongamos por un momento que se hayan escrito unos debajo de otros 40 números iguales á 87468, haciendo la suma de estos *números* se obtendrá el producto pedido. Ahora bien: es evidente que estos 40 números formarán 10 grupos de á 4 números, cada uno igual á 87468; pero cada grupo de estos no son otra cosa mas que 4 veces el número 87468; luego segun el n.º 19 su producto será 349872. Multiplíquese este último por 10, lo que segun el n.º 20 se obtiene añadiendo un 0 á la derecha, y se tendrá que el producto de 87468 por 40 es 3498720.

Obsérvase, pues, que la multiplicacion está hecha como si el factor 4 espresase unidades simples, con la diferencia de aumentar al producto una cifra 0 y colocarle, como se ve en la operacion, debajo del primer producto parcial.

Por la misma razon para multiplicar 87468 por 800 bastará hacer la multiplicacion por 8 y añadirle dos 0 á la derecha, el producto que será 69974400, deberá colocarse debajo de los dos productos parciales anteriores. En efecto, 800 números iguales á 87468 forman 100 grupos de á 8 números iguales á 87468, ó bien 100 números iguales al producto de 87468 por 8, es decir, 69974400.

El mismo razonamiento nos conduce á la multiplicacion de 87468 por 5000, pues es evidente que no habrá mas que multiplicar dicho número por 5 y añadir tres 0 al resultado: el producto será 437340000, que deberá colocarse debajo de los tres productos parciales que le preceden.

Sumando estos cuatro productos, se hallará que el total de la multiplicacion de 87468 por 5847 es 511425396.

Nota. En la práctica puede dispensarse el colocar ceros á la derecha para llenar el lugar de las unidades, decenas, centenas &c.; mas en tal caso es necesario escribir cada producto parcial debajo del que le precede, adelantando un lugar hácia la izquierda con relacion á dicho producto, esto es, haciendo *que la primera cifra de la derecha ocupe el mismo lugar que el de la cifra por que se multiplica.*

Regla general. Para multiplicar uno por otro dos números que se componen de muchas cifras, *se hará la multiplicacion de todo el multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador colocando los productos parciales unos debajo de otros, adelantando una nota hácia la izquierda* (con relacion al producto parcial que precede): *en seguida se suman estos productos*, lo cual dará el *total de la operacion.*

22. Suele suceder muy á menudo que en el multiplicador haya ceros, y entonces es necesario hacer algunas modificaciones en la colocacion de los productos parciales.

2.º ejemplo.

$$\begin{array}{r} 870497 \\ 500407 \\ \hline 6093479 \\ 3481988 \\ 4352485 \\ \hline 435602792279 \end{array}$$

Hágase la multiplicacion de todo el multiplicando por 7, y se tendrá 6093479.

Como no hay decenas en el multiplicador, se pasa á la cifra 4 de las centenas, y haciendo su multiplicacion se tendrá 3481988, y como es necesario que esprese *centenas*, se le colocará bajo el primer producto parcial adelantando *dos* notas hácia la izquierda.

Por la misma razon, no habiendo tampoco en el multiplicador *unidades* ni *decenas de millar*, se pasa á la multiplicacion del 5, cifra de las centenas del mismo órden, y el producto 4352485 se escribirá bajo el anterior, adelantando con respecto á él tres notas hácia la izquierda.

En general, *cuando se encuentran ceros en el multiplicador, se pasa á la cifra significativa inmediata á su izquierda, cuidando en la colocacion del producto parcial adelantar en la misma direccion tantas notas como ceros hay*, MAS UNA *por razon de la que siempre deberá adelantarse.* Por último, para evitar todo error sobre el particular bastará inspeccionar al fin de cada operacion si la primera cifra de la derecha del producto parcial corresponde *á la columna de las unidades del mismo órden que la cifra por que se multiplica.*

23. Si uno ó ambos factores del producto terminan en ceros, la multiplicacion es bien fácil de abreviar, efectuándola como si no existieran tales ceros, y cuidando añadirlos á la derecha del producto total.

2.º EJEMPLO.—Se quiere multiplicar.	47000
por.	2900
	423
	94
	136300000

Despues de haber multiplicado 47 por 29 con arreglo al método ya dicho, se añaden 5 ceros al producto hallado, y el total será 136300000.

En efecto, si solo hubiese que multiplicar 47000 por 29, es claro que despues de haber multiplicado 47 por 29 era indispensable darle al producto el órden de unidades de *millar*, es decir, el del multiplicando, para lo cual bastaria añadir á la derecha *tres ceros*. Pero como el multiplicador contiene tambien ceros, será necesario añadirlos á los del multiplicando, y en este caso son 5 los ceros que deberán colocarse á la derecha del producto total. El mismo razonamiento ha de aplicarse á todos los casos de esta especie.

24. A poco que se medite sobre el modo de hacer la multiplicacion, deberá reconocerse la necesidad de empezarla por la derecha, *ó al menos en las multiplicaciones parciales por cada una de las cifras del multiplicador*, á causa de las unidades que se reservan cada vez que se hace la multiplicacion de una cifra del multiplicando por otra del multiplicador. Pero nada impide el que se invierta el órden de las multiplicaciones parciales por las cifras del multiplicador, como puede verse en el ejemplo siguiente:

3.er EJEMPLO.—Se quiere multiplicar. . . .	5704
por.	487
	22816
	45632
	39928
	2777848

La operacion se ha principiado por la cifra de las centenas del multiplicador, colocando el producto parcial en el lugar que á aquella corresponde; pero en el siguiente producto ha sido necesario adelantar un lugar *hácia la derecha*, es decir, colocarlo debajo del primero de modo que la última cifra 2 corresponda á las decenas de ambos factores. Otro tanto se ha hecho con el tercer producto para que su última cifra corresponda á las unidades. Sin embargo en la práctica se acostumbra ir de derecha á izquierda, por ser mas cómodo y natural.

DE ALGUNAS PROPIEDADES IMPORTANTES DE LA MULTIPLICACION.

Sucede con frecuencia en las aplicaciones tener que multiplicar sucesivamente muchos números entre sí.

Sean, por ejemplo, los cinco números

23, 35, 72, 49, 156.

Formar el producto de estos números por el órden en que estan escritos, es multiplicar 23 por 35, su producto (805) por 72, el de estos dos (57960) por 49, y finalmente este tercero (2840040) por 156, lo cual da por producto total 443046240.

Luego con estos cinco factores se puede obtener el mismo producto de muchos modos: para lo cual bastaria intervertir como se quisiese el órden de los factores, lo que equivale á decir que el *producto de la multiplicacion de muchos números entre sí es siempre el mismo, cualquiera que sea el órden en que se multipliquen.*

25. A fin de comprender bien esta propiedad, que tiene muchas aplicaciones en la ciencia de los números, vamos á considerar en primer lugar el caso en que la multiplicacion sea de dos factores, por ejemplo, de 459 y 237.

Si se concibe la unidad escrita 459 veces sobre una misma línea horizontal, y que se forman 237 líneas semejantes, es claro que la suma de las unidades contenidas en esta tabla es igual á tantas veces las 459 que hay en una línea horizontal, como unidades contiene una colum-

1,	1,	1,	1,	1,	. . . . .
1,	1,	1,	1,	1,	. . . . .
1,	1,	1,	1,	1,	. . . . .
1,	1,	1,	1,	1,	. . . . .
.	.	.	.	.	. . . . .
.	.	.	.	.	. . . . .

na vertical, ó lo que es lo mismo, el número 237; es decir, que dicha suma es igual al producto de 459 por 237. Mas tambien puede decirse que es igual á tantas veces las 237 unidades de una columna vertical, como unidades hay en la horizontal ó en 459; esto es, que es igual al producto de 237 por 459. Luego el producto de 459 por 237 es igual al de 237 por 459.

Este razonamiento es aplicable á cualesquiera otros números enteros. Luego &c..... *.

26. Antes de pasar á la proposicion general, comenzaremos por deducir de casos particulares ya demostrados una propiedad que puede enunciarse así: *Multiplicar un número cualquiera por un primer factor, y el resultado de esta multiplicacion por otro segundo, se reduce á multiplicar el número propuesto por el segundo factor, y este resultado por el primero*; ó mas generalmente, *en toda multiplicacion de dos ó mas números entre sí, aun cuando se cambie el órden de los factores, el producto no se altera.*

Así, si v. g. se multiplica 84 por 15 y su producto por 24, el resultado será el mismo que si se multiplicase 84 por 24 y despues por 15.

En efecto, resulta de lo establecido (n.° 25) que el producto 360, resultado de la multiplicacion de 15 por 24, podria obtenerse igualmente multiplicando 24 por 15; y si podemos demostrar que el producto de 48 por 360 es el mismo que se hallaria, ya multiplicando 48 por 15 y su producto por 24, ó ya alterando el órden de los factores, esto es, multiplicando 48 por 24 y su resultado por 15, la proposicion será evidente.

Luego para formar el producto de 48 por 360 bastará (n.° 17) colocar unos debajo de otros 360 números iguales á 360 y hacer la adicion de ellos.

Ahora bien, estos 360 números así dispuestos componen 24 grupos de 15 números iguales cada uno á 48, ó 15 grupos de á 24 números iguales cada uno á 48 **.

---

* Esta proposicion podria deducirse de la misma TABLA PITAGÓRICA observando el modo con que estan colocados los números (n.° 19): bastaria para esto suponerla prolongada mas allá de un límite conveniente, v. g. 10000 ó 100000 veces, si no se considerasen mas que dos factores bajo dicho límite; mas á pesar de esto nos parece mas útil la demostracion arriba citada.

Para dar á conocer una aplicacion de este principio, supongamos que la naturaleza de la cuestion haya conducido á la multiplicacion del número 75 por 5642. Será preferible el producto de 5642 por 75, pues no habrá mas que *dos* productos parciales, mientras que de la multiplicacion de 75 por 5642 resultarian *cuatro*.

** Este razonamiento es muy semejante al que hicimos en el nú-

Así pues, podrá fácilmente obtenerse la suma de estos 360 números, bien multiplicando 48 por 24 y tomando 15 veces el producto resultante, ó bien multiplicando 48 por 15 y tomando 24 veces el producto de dicha multiplicacion.

De donde se sigue que estos dos modos de operar conducen evidentemente al mismo resultado, y que por lo tanto este es igual aun cuando se altere el órden de los factores 15 y 24.

27. Observacion.—La demostracion que precede da lugar á una nueva proposicion que nos servirá de mucha utilidad en adelante.

Acabamos de ver que multiplicar 48 por 360, que es el producto de 24 por 15, es lo mismo que multiplicar 48 por 24, mas el resultado obtenido por 15. Pero siendo 24 igual al producto de 6 por 4, se puede decir tambien que multiplicar 48 por 24 se reduce á multiplicar 48 por 6, mas el resultado obtenido por 4, y el hallado por 5 y despues por 3 (pues 15 es igual al producto de 5 por 3). Luego *multiplicar un número por un producto de dos ó muchos factores es multiplicar sucesivamente dicho número por cada uno de los factores del producto.*

28. Pasemos ahora á la demostracion de este principio general: *el producto de muchos números es siempre el mismo, cualquiera que sea el órden en que se efectue la multiplicacion.*

Sean los cinco factores en cuestion

23, 35, 72, 49, 156.

Resulta del principio establecido en el n.° 26, que en las multiplicaciones sucesivas se puede pasar el factor 156 al lugar de 49; mas tambien podrá hacérsele pasar al lugar del factor 72, al del 35 y finalmente al del 23. Por la misma razon el factor 49 que ocupa el puesto del factor 156, puede ocupar el de 72, el de 35, y así sucesivamente. Se ve pues, por último, que cada factor puede ocupar todos los lugares posibles en el órden de las multiplicaciones sucesivas, sin que por eso el producto deje de ser el mismo. Luego &c.

DE LA DIVISION.

29. Dividir un número por otro es (n.° 9) *hallar un tercer número, que multiplicado por el segundo reproduzca el primero*; ó mas bien (n.° 25) *es hallar un tercer número tal, que multiplicado por el tercero reproduzca el primero.*

---

mero 21 para esplicar el modo de hacer la multiplicacion de las decenas, centenas &c. del multiplicador.

Así la division tiene por objeto: *dado un producto y uno de sus factores, hallar el otro factor*: esta operacion es la contraria á la multiplicacion.

Como en la multiplicacion de los números enteros el producto se compone de tantas veces el multiplicando como unidades contiene el multiplicador, se puede decir que dividir un número entero por otro *es buscar cuántas veces el primer número*, considerado como producto, *contiene al segundo*, considerado como multiplicando: este número de veces representa el multiplicador. Por último se ha visto igualmente en el n.º 9 que dividir un número entero por otro *es dividir el primer número en tantas partes iguales como unidades contiene el segundo.*

Estos dos últimos puntos de vista bajo los cuales suele considerarse la division, no tienen lugar mas que en la de los números enteros, al paso que la primera definicion es aplicable no solo á los números enteros, sino tambien á los fraccionarios. No obstante, las denominaciones dadas á los términos de una division han sido sacadas de ambos puntos de vista de que hemos hablado.

Así pues, el primer término se llama *dividendo* (que es el número que se quiere dividir), el segundo *divisor*, y el tercero *cociente*, de la palabra latina *quoties*, porque espresa cuántas veces el dividendo contiene el divisor.

De aquí resulta que si hecha ya la division se quiere saber si la operacion es exacta, ó lo que es lo mismo, se quiere hacer la prueba, *bastará multiplicar el divisor por el cociente*, ó viceversa, *y si de esta multiplicacion resulta el dividendo, la operacion es exacta.*

Y recíprocamente, en la multiplicacion el producto puede considerarse como el *dividendo*, el multiplicando como el *divisor* ó el *cociente*, y el multiplicador tambien como el *cociente* ó el *divisor*, en cuyo caso para hacer la prueba de la multiplicacion *bastará dividir el producto por uno de los factores, y si resulta el otro factor, la operacion será exacta.*

Dadas ya estas nociones, pasaremos á esponer el método de la division.

30. Así como la multiplicacion puede ejecutarse mediante una *adicion* de muchos números iguales entre sí, del mismo modo se puede hallar el cociente de una division por medio de una serie de sustracciones.

En efecto, quiérese *dividir*, por ejemplo, 60 por 12: en este caso cuantas veces pueda sustraerse 12 de 60, otras tantas estará el número 12 contenido en 60; de modo que el cociente será igual al número de sustracciones que sea necesario hacer para que desaparezca el dividendo.

En el presente ejemplo, como son cinco las sustracciones que se han de hacer para que desaparezca del dividendo 60, resulta que el *cociente* será 5.

60	
12	
48	1.er resto.
12	
36	2.º
12	
24	3.º
12	
12	4.º
12	
00	5.º

Pero este modo de dividir seria muy complicado en la práctica, sobre todo si el dividendo es muy grande respecto del divisor. Así la operacion que *constituye* la division propiamente dicha, es un procedimiento especial y abreviado para llegar al resultado final.

31. Conocidos perfectamente los productos de dos números de una sola cifra (ó la tabla pitagórica n.º 18), con facilidad se podrá *hallar el cociente de la division de un número de una ó dos cifras por otro de una sola, con tal que dicho cociente no conste mas que de una sola cifra.*

Por ejemplo: 35 dividido por 7 da de cociente 5; ó de otro modo 7 entre 35 cabe 5 veces (porque 35 es el producto de 7 por 5); ó finalmente la 7.ª parte de 35 es 5, porque 7 veces 5 son 35.

Otro ejemplo:

Se quiere dividir 68 *por* 9. Como 7 veces 9 ó 63, y 8 veces 9 ó 72, contienen á 68, resulta que 68 dividido por 9 da de cociente 7 (respecto á 63) con un resto 5, lo cual se espresa diciendo: la 9.ª parte de 68 es 7 (con respecto á 63), y restan 5.

Por la misma razon 47 entre 8 cabe á 5, ó la 8.ª parte de 47 es 5, y restan 7.

Mas adelante veremos lo que debe hacerse del resto cuando el divisor no está exactamente contenido en el dividendo.

32. Pasemos al caso en que *el dividendo consta de muchas cifras, mientras que el divisor se compone de una sola.*

Por la última relacion que existe entre la multiplicacion y la division, será muy útil deducir el procedimiento de esta última, del que empleamos para efectuar aquella.

Con este objeto volvamos al ejemplo del n.º 19.

$$\begin{array}{r} 8459 \\ 7 \\ \hline 59213 \end{array}$$

Resulta de esta multiplicacion que el producto 59213 se compone de 7 veces las unidades, mas 7 veces las decenas, mas 7 veces las centenas, mas 7 veces las unidades de millar del número 8459: así este producto es la suma de los cuatro productos parciales, correspondientes á la multiplicacion de las cuatro cifras del multiplicando.

Luego dado el producto 59213 y uno de sus factores 7, para hallar el otro factor es necesario procurar, al menos mentalmente, descomponer á 59213 en los cuatro productos parciales, de las unidades de *millar*, *centenas*, *decenas* y *unidades* de este segundo factor multiplicado por el primero, tomando entonces la 7.ª parte de cada uno de estos productos y reuniendo los cocientes parciales, se obtendrá el cociente total ó el segundo factor.

He aquí cómo se dispone la operacion.

Escríbase el divisor á la derecha del dividendo, sepáreseles por medio de una línea vertical, y el divisor se raya por bajo con una horizontal.

Primer ejemplo. . . . .

59213	7
32	8459
41	
63	
0	

Dispuesta en esta forma la operacion, se principia á ejecutarla por la izquierda; para lo cual se toman las 59 unidades de *millar*, que se consideran como el *primer producto parcial*, y se dice: 59 entre 7 (ó mas bien para conformarse con la práctica establecida, cuando el divisor es de una sola cifra), la 7.ª parte de 59 es 8 (con respecto á 56): el cociente 8 así obtenido espresa las unidades de millar del cociente total * y se escribe debajo del divisor, como se ve en el ejemplo dado: se sustrae el producto 56 de 59, que da de resto 3 unidades de *millar*, que deberá considerarse como proveniente de la reserva hecha en la multiplicacion de las *centenas* del cociente por 7.

Bájese la cifra 2 de las centenas, colocándola al lado del resto 3, lo cual formará 32 *centenas*, que deberán considerarse como segundo producto parcial, y se dirá: la 7.ª parte de 32 es 4 (relativamente á 28); escríbase la cifra 4, que debe espresar las *centenas* del cociente, á la derecha del 8, y réstese el producto 28 del *dividendo parcial*, lo que da 4 *centenas* de resto, que representan las reservas hechas en la multiplicacion de las *decenas* del cociente por 7.

Como 4 no puede dividir á 7, se bajará y colocará á su lado la cifra 1 de las decenas del dividendo, en cuyo caso se tendrán 41 decenas para la nueva division: así, la 7.ª parte de 41 es 5 (con respecto á 35); esta cifra 5, que espresa las *decenas* del cociente, se escribirá á la derecha de las dos anteriores; en seguida se hace la sustraccion de 35 del dividendo parcial 41, quedando 6 de resto, que espresa las *decenas* procedentes de la multiplicacion de las *unidades* del cociente por el divisor.

Por último, bájese la cifra 3 colocándola al lado del 6, y hágase la division de 68 entre 7: resultan 9, que se colocarán en el lugar de

---

* Si fuere necesario probar que 8 es la verdadera cifra de las unidades de millar del cociente, no habia mas que hacerse cargo de que no es ni muy grande ni muy pequeña respecto á la correspondiente del dividendo. No es *muy grande*, porque el producto de 7 por 8000 ó 56000 puede sustraerse del dividendo total: no es *muy pequeña*, porque el producto de 7 por 9000 ó 63000 no puede sustraerse de dicho dividendo.

las unidades del cociente; efectúese la sustraccion, y como resulta 0, es claro que 8459 es exactamente el *cociente pedido*.

Efectivamente se sigue de todas las operaciones hechas que se ha sustraido sucesivamente del dividendo 59213, 7 veces 8 unidades de millar, 7 veces 4 centenas, 7 veces 5 decenas, 7 veces 9 unidades; y como despues de todas estas operaciones no queda resto alguno, tendremos que 59213 es igual al producto de 8459 por 7, ó de 7 por 8459, y que por tanto este último número es exactamente el *cociente que se buscaba*.

2.º EJEMPLO. . . . .

754264	8
34	94283
22	
66	
24	
0	

La primera dificultad que se presenta es conocer la naturaleza de las unidades de mayor grado del cociente, y determinar su número. Para conseguirlo, observemos que si la primera cifra de la izquierda del dividendo es mayor que el divisor, ó le es igual, el cociente total contendrá unidades de la misma especie que la de las cifras del dividendo. Pero como en este ejemplo la primera cifra 7 es menor que 8, es necesario concluir que la especie de las unidades del cociente será la de la segunda cifra de la izquierda del dividendo. Así pues, se tomarán las dos primeras cifras de la izquierda, que componen 75 *decenas de millar*, y se dice: la 8.ª parte de 75 es 9 (con respecto á 72); luego el cociente total encierra 9 *decenas de millar*, pues que se puede sustraer 8 veces 9 ó 72 *decenas de millar* del dividendo: escríbase 9 bajo el divisor, y el producto 72 se restará del *dividendo parcial* 75; el resto 3 que se obtiene, proviene de las reservas halladas en la multiplicacion de las *unidades de millar* del cociente total por 8.

Bájese al lado del resto 3 la cifra 4 del dividendo: la 8.ª parte de 34 *unidades de millar* es 4 (con respecto á 32); el 4 se escribe en el cociente á la derecha de la cifra 9, y restando el producto 32 del dividendo parcial 34, se bajará la cifra 2 centenas del dividendo; opérese sobre el nuevo dividendo parcial 22, como sobre los anteriores, y continúese la operacion hasta hallar un resto 0, en cuyo caso veremos que 94283 es el *cociente pedido*.

PRUEBA.

$$\begin{array}{r} 94283 \\ 8 \\ \hline 754264 \end{array}$$

En la práctica, cuando el divisor se compone tan solo de una cifra, se abrevia la operacion disponiéndola y efectuándola como á continuacion se ve:

3.er EJEMPLO. . . . . . .

	45237324 | 6	
cociente. . .	7539554	
	6	prueba.
	45237324	

Principiando por la izquierda se dirá: la 6.ª parte de 45 es 7, que se escribirá debajo de 45; restan 3, que unido mentalmente á la cifra que sigue, se tendrá 32: la 6.ª parte de 32 son 5, que se pondrá á continuacion del 7; quedan 2, y añadidos al 3 son 23; la 6.ª parte de 26, 3, el que se escribe á la derecha del 5, y el resto 5 se añade al 7, resultando 57, cuya 6.ª parte es 9, que se apuntará á la derecha de los anteriores; sobran 3, que con el 3 siguiente son 33; 6.ª de 33 es 5; colóquese á continuacion de las demás cifras, y así sucesivamente hasta que no quede ninguna por dividir.

Concluida la operacion, resulta que el *cociente total* es 7539554, pues si lo multiplicamos por 6, que es el divisor, tendremos el número 45237324, que es el dividendo.

Igualmente, la 8.ª parte del número. . . . . 9725647 | 8

es. . . . . 1215705. . 7

y restan 7.

PRUEBA PARA LA MULTIPLICACION.

8
9725640
7
9725647

NOTA.—En este ejemplo cuando se llega á la cifra 7 de las *centenas* del cociente, como no se obtiene resto alguno y la cifra siguiente 4 es menor que 8, se necesita suplir esta falta, pues es prueba de que no hay *decenas* en el cociente: para esto basta colocar un 0, y haciendo seguir la cifra 4 de la 7 de las unidades, resultará 47: la 8.ª parte de 47 es 5, que se escribirá á la derecha del 0, quedando 7 de resto.

33. Pasemos al caso *en que dividendo y divisor se compongan de muchas cifras.*

Para hallar el procedimiento de la operacion propongámonos multiplicar los números 594 y 437; despues de lo cual comprobaremos el resultado por medio de la division.

Resulta de esta multiplicacion que el producto 259578 se compone de *tres productos parciales* del multiplicando 594 por las *unidades*, *decenas*, *centenas* del multiplicador 437. Luego *dado el producto* 259578 *y uno de sus factores* 594, para hallar el otro ó el cociente de la division del primer número por el segundo es necesario procurar esponer en el producto 259578 los tres parciales de que se compone. Bien difícil parece esto á primera vista, á causa de las reducciones hechas entre las cifras en la adicion de los productos parciales: sin embargo es fácil de conseguir haciendo la siguiente reflexion.

$$\begin{array}{r} 594 \\ 437 \\ \hline 4158 \\ 1782 \\ 2376 \\ \hline 259578 \end{array}$$

```
259578 | 594
2376   |----
------ | 437
 21978
 1782
 -----
  4158
  4158
  ----
  0000
```

El producto parcial de 594 por las centenas del cociente, no pudiendo dar menos que centenas, debe por precision estar comprendido en las 2595 centenas del dividendo. Luego si se busca la cifra que espresa *el mayor número de veces* que 594 está contenido en 2595, esta cifra será la de *las centenas* del cociente total.

Desde luego se ve que esta cifra no es *mayor* que la de las centenas, pues que su producto por 594, dando un número menor que 2595 centenas, el cociente total es al menos igual á tantas veces 100 como unidades hay en dicha cifra. Del mismo modo tampoco es *menor* que la de las centenas, pues si se le aumentase de *una sola unidad*, el producto de la nueva cifra por 594 daria á lo menos 2596 centenas, y por tanto no podria sustraerse del dividendo 259578: luego dicha cifra debe ser de la de las *centenas* del cociente.

La dificultad de determinar la cifra de las centenas del cociente consiste en hallar cuántas veces 2595 contiene á 594, ó lo que es lo mismo, en buscar la cifra que multiplicada por 594 da el mayor producto contenido en 2595. Podrá obtenerse fácilmente sustrayendo cuantas veces sea posible 594 de 2595, cuya operacion podrá simplificarse, segun la regla (n.º 19) de la multiplicacion de un número de muchas cifras por otro de una sola, haciéndose cargo de que 25, por ejemplo, *es respecto á algunas unidades inmediatamente procedentes de las reducciones* el resultado de la cifra 5 de 594 por la cifra buscada.

Luego si se divide 25 por 5, se obtiene 5 de cociente, que es evidentemente una cifra *mucho mayor*; porque en la multiplicacion de 594 por 5 el producto de 9 por 5 es 45 decenas, lo que da 4 centenas mas que llevar sobre el producto de 5 por 5 ó 25. Veamos si puede ser 4: el producto de 594 por 4 es 2376, que es mas pequeño que 2595, y que deberá escribirse debajo de este último número: así 4 es la verdadera cifra de las centenas del cociente, y por esta razon se pondrá debajo del divisor, como consta por la operacion. (Se ve, pues, que 2376 es el 3.er *producto parcial* que se ha obtenido en la multiplicacion de 594 por 437.)

Sustrayendo 2376 de 2595 y bajando al lado del resto 219 las siguientes cifras del dividendo se tiene 21978, número que se compone de la suma de los *productos parciales* de 594 por las *decenas* y por las *unidades* del cociente.

Para obtener las *decenas* nos serviremos del mismo razonamiento que antecede.

El producto de 594 por las decenas, no pudiendo dar unidades de un órden inferior al de aquellas, se halla necesariamente en las 2197 decenas del nuevo dividendo, y si se busca la cifra que espresa *el mayor número de veces que* 594 *está contenido en* 2197, ella será la de las *decenas* del cociente.

A primera vista se observará que dicha cifra no es *mucho mayor*, pues que su producto por 594 pudiendo sustraerse de las 2197 decenas, el cociente es al menos igual á tantas *decenas* como unidades contiene aquella. Y recíprocamente no es *menor*, porque si se le aumentase tan solo de una unidad, el producto de la nueva cifra por 594 daria al menos 2198 decenas y no podria sustraerse del dividendo 21978.

Veamos, pues, cuántas veces 2197 contiene á 594, ó mas bien conformándonos con la observacion arriba hecha, cuántas veces 21 contiene á 5. El resultado es 4; pero en la multiplicacion de 594 por 4, el producto de 9 por 4 es 36, lo cual da 3 *centenas* mas que llevar sobre el producto de 5 por 4 ó 20: así 4 es mayor. Ensayemos si puede ser 3: el producto de 594 por 3 es 1782, número menor que 2197 (escríbasele debajo de 2197): así 3 es la cifra de las *decenas* del cociente, que deberá colocarse á la derecha de la cifra 4 ya hallada. (El producto 1782 es ciertamente el segundo *producto parcial* de la multiplicacion 594 por 437.)

Sustrayendo 1782 de 2197 y bajando al lado del resto 415 la cifra 8 del dividendo, se obtiene 4158, que representa el producto parcial de 594 por las unidades del cociente.

Buscando en fin, cuántas veces 4158 contiene á 594, ó de otro modo, cuántas veces 41 contiene á 5, resulta 8; pero 8 es mayor, como es bien fácil de conocer: veamos si puede ser 7: el producto de 594 por 7 es 4158, número que sustraido de la parte restante del dividendo da de resto 0; así pues, 7 es la cifra de las unidades del cociente: luego 437 es el cociente pedido.

En efecto, resulta de las operaciones anteriores que se han sustraido sucesivamente del dividendo 259578 los productos parciales de 594 por 4 *centenas*, 2 *decenas* y 7 *unidades*; y supuesto que despues de todas estas operaciones no queda resto alguno, se sigue que 259578 es igual al producto de 594 por 437.

34. 4.° EJEMPLO. Se quieren dividir los dos números 3844637 y 657, el primero por el segundo.

La primera dificultad que presenta esta operacion consiste en determinar el *órden* mayor de las unidades mas crecidas del cociente y el *número* de ellas. Es bien claro que si tomamos á la izquierda del dividendo igual número de cifras al que encierra el divisor, á saber, tres, y el conjunto de dichas cifras le contienen ó le dividen, el cociente deberá tener *decenas de millar*; pero como este caso no tiene lugar en el presente ejemplo, resulta que todo el mayor órden de unidades que pueda tener el cociente, es las *unidades de millar*, de las que

3844637	657
85	5851
559637	
5256	
34037	
3285	
1187	
657	
530	

al menos contiene *una*, pues que el producto de 657 por 1000 ó 657000 es menor que el dividendo: así es evidente que el cociente debe componerse de *unidades de millar, centenas, decenas y unidades.*

Para hallar los *miles* observemos que el producto de 657 por las unidades de *millar*, no pudiendo dar menos que unidades de dicho órden, se halla necesariamente en los 3844 *miles* del dividendo, y si se busca la cifra que espresa el *mayor número de veces* que 657 está contenido en 3844, ella será la de las *unidades de millar* del cociente.

Fácil será comprender que dicha cifra no es *mucho mayor*, pues que su producto por 657, dando un resultado menor que 3844, puede ser sustraido del dividendo, y el cociente es al menos igual á tantas veces 1000 como unidades contiene la tal cifra: tampoco es *menor*, porque si se le aumentase, por ejemplo, de una unidad, el producto por 657 seria á lo menos 3845 *unidades de millar*, y por lo tanto no podria sustraerse del dividendo.

Averigüemos ahora cuántas veces 3844 contiene á 657, ó simplemente 38 á 6. Se halla que este número de veces es 6; pero 6 es mucho mayor, pues en la multiplicacion de 657 por él, el producto de 5 por 6 es 30, lo cual da 3 centenas mas que llevar sobre el de 6 por 6 ó 36. Veamos si puede ser 5: el producto de 657 por 5 es 3285 (que deberá escribirse debajo de 3844); y colóquese el 5 en el cociente en el lugar de las *unidades de millar*, pues debe espresar dicho órden de unidades.

Haciendo la sustraccion de 3285 á 3844 y colocando al lado del resto 559 las otras cifras del dividendo, se obtiene 559637, que se compone de los productos parciales de 657 por las *centenas*, *decenas* y *unidades* del cociente, y sobre el cual es necesario reflexionar y operar del mismo modo que sobre el primer dividendo.

Para obtener las centenas se tomarán las 5596 centenas del nuevo dividendo, y se buscará el número de veces que 5596 contiene á 657, ó simplemente 55 á 6.

Resulta 9 para el cociente; pero este número es mayor y por tanto impide la sustraccion. Ensayemos la prueba con 8: el producto de 657 por 8 es 5256, número menor que 5596: así 8 es la cifra de las *centenas* del cociente, que deberá colocarse al lado de la ya hallada. En seguida se hará la sustraccion de 5256 á 5596.

Efectuando esta nueva sustraccion y escribiendo al lado del resto 340 las otras cifras 37 del dividendo, se tendrá 34037, número que contiene los productos parciales de las *decenas y unidades* del cociente.

Dividiendo 3403 por 657, ó mas bien 34 por 6, resulta 5. El producto de 657 por 5 es 3285, número menor que 3403: así 5 es la cifra de *decenas* que despues de escrita al lado de las dos anteriores, deberá hacerse la sustraccion del producto parcial 3285 y el dividendo 3403.

Poniendo al lado del resto 118 la última cifra 7 del dividendo se tendrá 1187, que contiene *una vez* á 657, y por tanto 1, que es la cifra de las *unidades* del cociente, deberá colocarse á la derecha de las tres anteriores: así 5851 es el *cociente pedido.*

Sustrayendo 657 de 1187, se hallará de resto 530, lo cual indica que el dividendo propuesto está comprendido entre el producto de 657 por 5851 y del de 657 por 5852.

La operacion podrá verificarse multiplicando 657 por 5851 ó por 5852 y añadiendo al producto el resto 530.

He aquí los detalles de esta prueba:

$$
\begin{array}{r}
5851 \\
657 \\
\hline
40957 \\
29255 \\
35106 \\
\hline
3844107 \\
530 \\
\hline
3844637
\end{array}
$$

Nota.—Es de advertir que en la práctica basta bajar al lado del resto la siguiente cifra del dividendo y seguir la operacion por este medio hasta que ya no quede cifra alguna.

35. La determinacion del cociente parcial segun el método hasta aquí indicado exige cierta práctica mas ó menos larga de parte del calculador, y aun con todo esto no se puede estar muy seguro de la cifra propuesta, sino despues de haber podido sustraer del dividendo parcial el producto de ella por el divisor.

Sin embargo, hay un medio de asegurarse si dicha cifra es ó no *buena* antes de pasar á la sustraccion de que acabamos de hablar. Consiste, pues, en *hacer mentalmente la division del dividendo parcial por la cifra propuesta*, operando como en el 3.er ejemplo del n.° 32, *á fin de conseguir que las cifras obtenidas en el cociente de esta division mental sean las mismas que las correspondientes en el divisor propuesto*, *y aprovecharse del momento en que la cifra obtenida es mayor ó menor que la respectiva del divisor.* Si es *mayor*, no es buena; si por el contrario es *mas pequeña*, puede aun afirmarse que la cifra propuesta es *mayor*: *en este caso se le rebaja en una unidad y se opera sobre la nueva cifra como sobre la anterior.*

5.° Ejemplo.—Se quiere dividir 137836 por 1583.

157836	1583
12664	87
11196	
11081	
115	

Siendo el primer dividendo parcial 13783, lo primero que es necesario ver á cómo cabe 13 entre 1, y se ve que á 13. Pero el primer cociente parcial no pudiendo esceder de 9, es preciso averiguar si puede ser 9, para lo cual se dirá: la 9.ª parte de 13 es 1 (respectivamente á 9) y quedan 4; la 9.ª parte de 47 es 5 (con relacion á 45) y restan 2; la 9.ª de 28 es 3, número menor que la 3.ª cifra 8 del divisor propuesto: luego 9 es *mayor*, porque siendo la 9ª parte de 13783 menor que este divisor, no se puede sustraer el producto de su multiplicacion por 9 del dividendo parcial. Veamos si puede ser 8: la 8.ª parte de 13 es 1, y sobra 5; la 8.ª de 57 es 7, cifra mayor que la 2.ª 5 del divisor propuesto; así pues, 8 es *buena cifra*, porque la 8.ª parte de 13783 siendo superior al divisor propuesto, puede sustraerse el producto de dicho divisor por 8 del dividendo parcial.

Multiplicando 1583 por 8 y sustrayendo el producto 12664 del dividendo parcial, se obtiene 1119 de resto y 11196 por segundo dividendo parcial.

Operando sobre el nuevo dividendo se dirá: 11 entre 1 cabe á 11, pero es bien claro que el segundo cociente parcial no puede esceder de 8, pues que el nuevo dividendo parcial es menor que el primero. Hagamos la prueba con 8: la 8.ª parte de 11 es 1 (respecto de 8); la 8.ª parte de 31 es 3, cifra *menor* que la del divisor propuesto, de donde se sigue que 8 es muy grande, pues no se podria restar 8 veces este divisor del dividendo parcial. Veamos si puede ser 7: la 7.ª parte de 11 es 1 (relativamente á 7) y quedan 4; la 7.ª de 41 es 5 (respectivamente á 35) y restan 6; la 6.ª de 69 es 9, cifra mayor que la 3.ª 8 del divisor primitivo: luego la cifra 7 es *buena*, porque la 7.ª parte de 11196 siendo mayor que 1583, puede sustraerse 7 veces este último número del dividendo parcial en cuestion.

Multiplicando 1583 por 7 y sustrayendo el producto de 11196, se obtiene por resto 115, y por cociente total 87.

Nota.—Cuando es indispensable llevar el ensayo hasta la cifra de las unidades de primer órden, resulta la ventaja de hallarse hecha la sustraccion.

Así para dividir 12670 por 1583, despues de haber hallado que 9 seria muy grande, se ensaya el 8 diciendo: la 8.ª parte de 12 es 1 (con relacion á 8) y quedan 4; la 8.ª de 46 es 5 (respecto á 40) y sobra 6; la 8.ª de 67 es 8 (relativamente á 64) y quedan 3; la 8.ª de 30 es 3 (respectivamente á 24) y resulta 6 de resto.

Al mismo tiempo se ve que el cociente es 8 y que el resto de la sustraccion es 6, es decir, que el dividendo contiene 8 veces el divisor, mas 6 unidades.

36. Regla general.—Para dividir dos números enteros el uno por el otro *se escribirá el divisor á la derecha del dividendo separados por una línea vertical, y rayado el segundo por debajo con una horizontal.*

Dispuesta así la operacion, *tómese á la izquierda del dividendo igual número de cifras al que hay en el divisor, ó* UNA *mas si el conjunto de las primeras es menor que el divisor: la union de ellas formará* UN PRIMER DIVIDENDO PARCIAL, cuya cifra de la derecha espresa unidades del mismo órden que las mayores del cociente. *Búsquese* (n.º 35) *cuántas veces este dividendo parcial contiene al divisor: multiplíquese por él y réstese el producto del primer dividendo parcial.*

Bájese al lado del resto la cifra siguiente del dividendo, lo cual da UN SEGUNDO DIVIDENDO PARCIAL. *Búsquese como anteriormente cuántas veces este segundo dividendo contiene al divisor, y apuntando este segundo cociente á la derecha del primero, multiplíquese el divisor por él y réstese el producto del segundo dividendo parcial.*

Bajando al lado de este último resto la siguiente cifra del dividendo, se obtendrá UN TERCER DIVIDENDO PARCIAL.

Continúese la misma serie de operaciones hasta haber bajado la última cifra del dividendo cuidando poner el cociente obtenido á la derecha de las anteriores cifras, para darle su verdadero valor.

Si despues de todas estas operaciones no queda *nada*, la division es *exacta*: si hay resto, se añadirá en la prueba al producto del divisor por el cociente *hallado*.

37. Ya familiarizados en las diversas partes de este procedimiento se pueden abreviar las operaciones ejecutando la multiplicacion y sustraccion simultáneamente, como puede verse en el siguiente ejemplo, que es uno de los mas difíciles que pueden proponerse.

6.º EJEMPLO.—Se quieren dividir 9639475 por 2789.

Tomo, pues, las cuatro primeras cifras de la izquierda, por ser su conjunto mayor que el divisor: divido 9639 por 2789, ó simplemente 9 por 2, y se tiene 4 por cociente; pero es fácil de ver (n.º 35) que esta cifra es mayor. Veo si puede ser 3, que es la verdadera cifra, porque el *tercio* de 9 es 3, número mayor que la primera cifra 2 del divisor.

Supuesto esto, en vez de multiplicar 2789 por 3 y escribir el producto bajo 9639, para hacer la sustraccion se opera como sigue: 3 por 9 son 27; réstese de 9 (última cifra de la derecha de 9639), lo que es imposible; supóngase á 9 aumentado de 2 decenas, lo cual da 29: sustráigase 27 de 29; queda 2 de resto; que se escribirá debajo de 9639 despues de haber rayado por abajo este último número.

Observemos ahora que las 2 decenas añadidas se reputan como tomadas de la cifra 3 que ha quedado en el valor 1; pero (n.º 14) viene á obtener su valor primitivo, y así es mas cómodo retener las 2 decenas para añadirlas al producto de las del divisor por el cociente 3, y para sustraer el todo de las decenas del dividendo 9639 tomadas en la totalidad.

En seguida se dirá: 3 por 8 son 24 y 2 de reserva 26; esto no tiene lugar porque 26 de 3 no puede sustraerse, pero tomando 3 centenas de la cifra de dicho órden del dividendo parcial, se tendrá 33, que puede restarse de él el 26, quedando 7 de residuo, que se escribirá bajo el 3 del dividendo parcial, reteniendo las 3 centenas.

3 por 7 son 21 y 3 de reserva 24; 24 de 6 no puede restarse; pero sí 24 de 26: queda 2 de resto, que se escribe debajo del 6 del dividendo parcial, cuidando retener las 2 *unidades de millar*.

Por último, 3 por 2 son 6 y 2 de reserva 8; 8 de 9 resta 1, que se escribirá bajo el 9.

Sobra la cantidad 1272, á cuya derecha se bajará la cifra 4 del dividendo, lo cual da *un segundo dividendo parcial* 12724, con el que deberá operarse como anteriormente.

Lo primero que será preciso averiguar es cuántas veces 2789 cabe en 12724, ó de otro modo, 2 entre 12. Resulta 6; pero tanto este número como 5 no convienen, como puede verse fácilmente segun el número 35. El 4 sí es *bueno*; por tanto deberá colocarse en el cociente á la derecha del 3, y operando tendremos: 4 por 9, 36; 36 de 4 no puede ser, pero sí 36 de 44 y quedan 8, que se apuntará bajo el 4, reteniendo los 4 que se han tomado para que la sustraccion se verificase.

4 por 8 son 32 y 4 reservadas 36; 36 de 3 no puede restarse, pero sí 36 de 42: queda 6, escríbase bajo el 2, reteniendo 3.

4 veces 7 son 28 y 4 de reserva 32: 32 de 37 quedan 5, que se escribirá debajo del 7, y se retendrá el 3.

Por último, 4 por 2 son 8 y 3 reservadas 11: 11 de 12 queda 1, que se escribirá debajo del 2.

El resto de esta nueva operacion es 1568, á cuya derecha deberá bajarse la siguiente cifra del dividendo; en este caso se tendrá 15687 por *tercer dividendo parcial*, sobre el cual deberá operarse del mismo modo: el cociente total que se obtiene es, pues, 3456 con el resto 691.

He aquí la tabla de operaciones para un nuevo ejemplo.

7.º EJEMPLO.—Se quieren dividir 200658969 por 39837.

200658969	39837
147396	
278859	5037
0	

38. PRIMERA OBSERVACION sobre la division.—Este último ejemplo da lugar á una observacion muy importante.

Despues de haber hallado por primer cociente 5 y por primer resto 1437, se baja al lado de este la siguiente cifra del dividendo, lo cual da 14739 por segundo dividendo parcial. Este dividendo no contiene al divisor, porque el cociente total no tiene centenas, pues si tuviese tan solo una, su producto por 39837 podria ser sustraido del dividendo parcial 14739, lo cual bien se ve que no tiene lugar.

Pero á fin de que el 5 conserve su verdadero valor, se escribe á su derecha un 0, destinado á ocupar el lugar de las *centenas*, y bajando inmediatamente al lado de 14739 la siguiente cifra 6 del dividendo, se continúa la operacion, que dará la cifra de las *decenas y unidades.*

En general, siempre que bajando al lado del resto la cifra siguiente del dividendo se obtiene un número menor que el divisor, es señal de que el cociente no contiene unidades del órden de la cifra bajada; *en este caso se pone un* 0 *en el cociente* para ocupar el lugar de las unidades de dicho órden y dar el valor relativo á las cifras significativas. *En seguida se baja al lado de este dividendo parcial una nueva cifra y se continúa la operacion.*

39. Segunda observacion.— Cuando una operacion parcial ha sido bien hecha, es decir, cuando la cifra del cociente relativa á esta operacion se ha *determinado exactamente*, en la siguiente no podrá hallarse en el cociente mas de 9, pues que suponer que se ha obtenido 10 por ejemplo, seria suponer que la cifra anterior es menor de una unidad.

Hay pues una señal por la cual fácilmente se reconoce si la cifra del cociente *está bien determinada*; la cual consiste en obtener *un resto menor que el divisor* cuando se hace la sustraccion del dividendo parcial. Si este resto es superior ó igual al divisor, la cifra del cociente deberá aumentársele en una unidad.

40. Como en las primeras operaciones de la Aritmética los cálculos se efectuan comenzando *por la derecha*, es muy natural dar la razon porque en la division se comienza *por la izquierda*. Para ello bastará observar que el dividendo siendo la suma de los productos parciales del divisor por las *unidades*, *decenas*, *centenas* &c..... del cociente, todos estos productos estan contenidos los unos en los otros y no es fácil poner en evidencia el producto del divisor por las unidades, por las decenas &c., hasta tanto que por medio del método ya enunciado se determine en qué parte del dividendo se halla *el producto por las unidades de mayor órden.*

No obstante podrá comenzarse la operacion por la derecha siempre que se haga mediante una serie de sustracciones, como queda indicado en el n.º 30.

41. Hagamos algunas aplicaciones de la multiplicacion y division.

Problema 1.º—*Se quiere saber cuál es el precio de* 2564 *toesas de fortificacion, á razon de* 47 *reales la toesa.*

Supuesto que cada toesa vale 47 reales, es claro que en repitiendo este valor 2564 veces se tendrá el precio total. Así bastará efectuar la multiplicacion de 47 por 2564, ó mas bien de 2564 por 47 (n.º 25), y el producto espresará el valor total de las 2564 toesas de fortificacion.

He aquí la operacion y su prueba por la division.

```
  2564          120508 | 47
    47           265   |-----
 ------           300  | 2564
  17948            188
 10256             000
 ------
 120508
```

Luego el precio de las 2564 toesas de fortificacion es 120508 reales.

2.° *La toesa de cierta obra de mazonería cuesta* 39 *reales: se pregunta cuántas toesas podrán hacerse con* 8395 *reales.*

Bien fácilmente se concibe que cuantas veces 39 esté contenido en 8395, otras tantas toesas podrán construirse, y por tanto bastará dividir 8395 por 39, y el cociente indicará el número de toesas pedido.

```
8395 | 39                     Prueba..  215
 59  |-----      10                      39
 205 | 215 toe. ----                   -----
  10             39                     1935
                                        645
                                          10
                                        -----
                                        8395
```

Como además del cociente 215 hay un resto 10, es necesario saber el uso que deberá hacerse de él.

Obsérvese que si el dividendo tuviese 10 reales menos de valor, seria igual al producto del divisor por el cociente 215, y por tanto el número de toesas seria igual á dicho cociente; mas como hay un resto 10, es necesario averiguar qué *fraccion* de toesa podrá construirse con estos 10 reales.

Ahora bien, si 39 reales dan 1 toesa, 1 real dará $\frac{1}{39}$ de toesa, y 10 reales 10 veces $\frac{1}{39}$ de toesa ó $\frac{10}{39}$ (n.° 8): así 215 toesas, mas $\frac{10}{39}$ de toesa forman el resultado pedido.

Tal es *en general* el uso que deberá hacerse del resto de una division, cuando al efectuar la operacion se trata de números concretos.

Se concibe la unidad del cociente (cuya naturaleza queda determinada en el enunciado del problema) *dividida en tantas partes iguales como unidades contiene el divisor, se toma una de estas partes tantas veces como unidades contiene el resto de la division y se añade la fraccion que resulta al número entero ya obtenido.*

3.º *Se han pagado* 21478 *reales por* 895 *varas de género: se pregunta cuál es el precio de cada vara.*

Si se conociese el precio de la vara, repitiéndolo 895 veces se tendrian los 21478 reales, y por tanto será suficiente dividir 21478 por 895 para hallar el resultado.

$$\begin{array}{r|l} 21478 & 895 \\ \cline{2-2} 3570 & 23 \text{ reales } \dfrac{893}{895} \\ 893 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 895 \\ 23 \\ \hline 2685 \\ 1790 \\ 893 \\ \hline 21478 \end{array}$$

Como el dividendo y el producto de 895 por 23 contienen á los 893, se sigue que el precio de la vara es 23 reales, mas *una fraccion* que se trata de determinar.

Para conseguirlo observemos que $\dfrac{1}{895}$ repetido 895 veces da 1:

así pues, $\dfrac{895}{893}$ repetido 895 veces da 893, y por consiguiente 23,

mas $\dfrac{893}{895}$ *es un número, que multiplicado por* 895 reproduce á 21478.

Luego el precio pedido es 23 reales, mas $\dfrac{893}{895}$ de real.

Este resultado está conforme con la regla establecida en el anterior ejemplo.

4.º *Se quiere dividir igualmente entre* 498 *personas la cantidad de* 1348708 *reales: se pregunta qué parte corresponde á cada una.*

$$\begin{array}{r|l} 1348708 & 498 \\ \cline{2-2} 3527 & 2708 \text{ reales } \dfrac{124}{498} \\ 4108 & \\ 124 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2708 \\ 498 \\ \hline 21664 \\ 24372 \\ 10832 \\ 124 \\ \hline 1348708 \end{array}$$

Siendo 2708 el cociente y 124 el resto, es claro que si el dividendo tuviese 124 menos de valor, la parte de cada persona estaria bien representada por 2708. Pero como la suma total encierra 124 mas que el producto de 2708 por 498, resulta que la parte de cada persona debe ser 2708 reales, mas una parte de 124 reales. Para formarse una idea de esta parte se puede *considerar el número* 124 *como* UN TODO *que es necesario dividir en* 498 *partes iguales, y una de ellas es la fraccion que debe completar el cociente*; pero aun es mas sencillo segun el n.º 8, *pues con arreglo á lo allí establecido se divide la unidad que aquí es el real en* 498 *partes iguales de las que se toman* 124, *lo que da* $\frac{124}{498}$, fraccion que deberá añadirse al cociente entero.

42. NOTA.—Este último ejemplo nos conduce á una observacion de la que mas adelante tendremos que hacer uso. Consiste en que dividir el número 124 en 498 partes iguales es lo mismo que tomar 124 veces la 498.ª parte de la unidad. En efecto, si en vez de 124 solo se tuviese que dividir 1 en 498 partes iguales, cada una de ellas seria $\frac{1}{498}$; pero como el número que se quiere dividir es 124 veces mayor, se concibe que el resultado de la division sea tambien 124 veces mayor, ó igual á 124 veces $\frac{1}{498}$, ó finalmente á $\frac{124}{498}$.

Del mismo modo, dividir 15 en 28 partes iguales se reduce á tomar 15 veces la 28.ª parte de la unidad. Porque si solo hubiese 1 que dividir en 28 partes iguales, cada parte seria igual á $\frac{1}{28}$; pero como es 15 lo que se quiere dividir, el resultado será 15 veces mayor, y por tanto igual á 15 veces $\frac{1}{28}$ ó á $\frac{15}{28}$.

En general, *dividir un número en tantas partes iguales como unidades contiene otro, se reduce á dividir la unidad en tantas partes iguales como unidades contiene el segundo y tomar una de estas partes igual número de veces al que contiene de unidades el primero.*

ALGUNOS OTROS PRINCIPIOS SOBRE LA MULTIPLICACION Y DIVISION.

43. De los principios establecidos en los números 25, 26, 27 y 28 se deducen algunas consecuencias que será muy conveniente esponer y analizar por las muchas aplicaciones que tienen en la Aritmética.

Observemos antes de todo que segun las definiciones de la multiplicacion y division de los números enteros, *se hace á un número de esta especie tantas veces mayor ó menor como unidades hay en otro, multiplicando ó dividiendo el primer número por el segundo.*

Así cuando se multiplica 24 por 6, el producto que se obtiene es 6 veces mayor que 24, pues que resulta de la adicion de 6 números iguales á 24. Y recíprocamente, si se divide 24 por 6, el cociente es 6 veces menor que 24, pues repetido 6 veces reproduce el mismo número.

Esto supuesto, fácilmente se concibe la evidencia del siguiente principio: *si en una multiplicacion al muliplicando ó multiplicador se le hace cierto número de veces mayor ó menor, en igual cantidad se le aumenta ó disminuye al producto.*

Segun esto, si al multiplicar 47 por 6, en vez de efectuar esta operacion se multiplica 47 por 24, que es 4 veces mayor que 6, como con arreglo á lo establecido en el n.º 26, multiplicar 47 por 24 es lo mismo que multiplicar 47 por 6 y el producto obtenido por 4, resulta que el producto de 47 por 24 es igual á 4 veces el producto de 47 por 6, ó bien es 4 veces mayor que dicho producto.

Y viceversa, el producto de 47 por 6 (que es la *cuarta parte* de 24) siendo 6 veces menor que el de 47 por 24, se sigue que si se hace al multiplicador 4 veces menor ó se le divide por 4, el producto queda por lo tanto 4 veces menor.

Hemos visto (n.º 25) que en una multiplicacion de dos factores se puede invertir el órden de ellos sin que por eso varie el producto: por lo mismo lo que acabamos de establecer se aplica igualmente al multiplicando que al multiplicador. Luego &c.......

De aquí es que *el producto no varía cuando al multiplicando se le aumenta en cierta cantidad siempre que en la misma se disminuya al multiplicador*, es decir, *cuando al multiplicando se le multiplica por un número y al multiplicador se le divide por el mismo*: porque segun lo anteriormente establecido hay una compensacion mediante la cual la segunda operacion destruye el efecto de la primera.

Sobre está última consecuencia estriba un medio de que hemos hecho uso algunas veces para *comprobar la multiplicacion.*

Multiplicar 347 por 72 es lo mismo que multiplicar 2 veces 347, ó 694 por la mitad de 72 ó por 36. Así despues de haber multiplicado 347 por 72 se puede multiplicar 694 por 36, en cuyo caso si la primera operacion es exacta, la segunda deberá dar igual resultado.

Ahora bien, supuesto que en la division el dividendo es un producto cuyos factores son el divisor y el cociente, es bien claro que si *se hace al dividendo cierto número de veces mayor ó menor*, es decir, *si se le multiplica ó divide por cierto número entero, el cociente es*, mediante esta alteracion, *multiplicado ó dividido por el mismo número.*

En efecto, como segun la alteracion hecha el cociente multiplicado por el divisor ha de reproducir un dividendo cierto número de veces mayor ó menor que el primero, es indispensable que quedando el mismo divisor, el cociente sea igual número de veces mayor ó menor.

Por el contrario si suprimiendo la alteracion del dividendo, *se hace al divisor cierto número de veces mayor ó menor, en el mismo sentido deberá aumentar ó disminuir el cociente*: esta es en efecto la sola hipótesis admisible para que la multiplicacion dé el mismo producto ó el mismo dividendo.

Luego si *dividendo y divisor se multiplican ó dividen por un mismo número, el cociente no se altera*; pues que si por la alteracion hecha con el dividendo se multiplica ó divide el cociente por cierto número, en igual cantidad se multiplica ó divide mediante la alteracion hecha con el divisor. Hay, pues, una verdadera compensacion, y el resultado por lo tanto permanece el mismo.

CAPITULO II.

De los quebrados ó fracciones.

44. Ya hemos visto en los números 1 y 8 qué se entiende por fraccion ó quebrado y qué idea debemos formarnos de esta parte de la cantidad numérica. En todo quebrado se distinguen dos términos, el *denominador* y el *numerador*. El denominador representa *el número de partes iguales en que se considera dividida la unidad*, y el numerador *cuántas de estas partes deben tomarse*: el conjunto de ellas constituye la *fraccion*.

Así en el quebrado $\frac{3}{4}$, que se enuncia verbalmente diciendo *tres cuartos*, 4 es el denominador, que indica que la unidad está dividida en 4 partes iguales, y 3 el numerador, que señala que 3 son las partes que deberán tomarse.

Del mismo modo la fraccion $\frac{11}{12}$, que se enuncia *once dozavos*, espresa 11 partes de la unidad dividida en 12 partes iguales.

Asimismo se ha visto (n.º 42) que una fraccion, tal como $\frac{13}{15}$, es equivalente á la 15.ª parte del *todo* espresado por 13, esto es, que *una fraccion puede considerarse como el cociente de su numerador dividido por el denominador* de tal modo que *trece veces la quinzava parte* de la unidad, ó *trece quincenos* ó *la quinzava parte de trece*, ó *trece dividido por quince* son espresiones idénticas.

45. De la definicion que acabamos de dar del numerador y denominador, se siguen evidentemente las consecuencias siguientes:

1.ª Si, omitiendo la alteracion del denominador de una fraccion, *se multiplica ó divide su numerador por un número, la nueva fraccion será este número de veces mayor ó menor que la primera.*

En efecto, tan luego como se multiplica el numerador por 2, 3, 4.., &c., se indica que se toman 2, 3, 4... &c. veces mas partes; y como estas son las mismas, la nueva fraccion es 2, 3, 4... &c. veces mayor que la primera.

Así, *sea el quebrado* $\frac{6}{25}$: es claro que $\frac{12}{25}$, $\frac{18}{25}$, $\frac{24}{25}$.... son quebrados 2, 3, 4... &c. veces mayores que el primero.

Por el contrario si se divide el numerador por 2, 3, 4... &c., se indica que se toman 2, 3, 4... &c. menos partes; luego &c... Así $\frac{3}{25}$ y $\frac{2}{25}$ son fracciones respectivamente 2, 3... veces menores que $\frac{6}{25}$.

2.ª Si, sin alterar el numerador, *se multiplica ó divide el denominador de un quebrado por un número, la fraccion queda multiplicada ó dividida por este guarismo.*

En efecto, cuando se multiplica el denominador por 2, 3, 4,... la unidad se halla dividida en 2, 3, 4... &c. veces mas partes iguales; las nuevas partes son, pues, 2, 3, 4... &c. veces menores, y como siempre se toma el mismo número, se sigue que la fraccion resultante es 2, 3, 4... veces menor que la primera.

3.ª *El valor de una fraccion no varía porque se multipliquen ó dividan sus dos términos por un mismo número.*

Así que, sabemos por los dos primeros principios que el efecto de la operacion ejecutada con el denominador destruye el de la operacion hecha con el numerador, y que por tanto hay una compensacion.

Por ejemplo, los quebrados $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{15}{20}$... son todos equivalentes á la fraccion $\frac{3}{4}$, pues que cada uno resulta de la multiplicacion de sus dos términos por 2, 3, 4...

Por el mismo consiguiente, la fraccion $\frac{24}{36}$ es igual á cada una de las fracciones $\frac{12}{18}$, $\frac{8}{18}$, $\frac{6}{9}$,... pues que se han obtenído dividiendo los dos términos de la primera por 2, 3, 4...

Estas diversas proposiciones son análogas á los principios establecidos (n.º 43) sobre la division de los números enteros, y deben por lo tanto considerarse como una aplicacion de dichos principios á las fracciones.

46. Como la tercera proposicion es de mucho uso, nos parece conveniente dar de ella una demostracion directa é independiente de las dos primeras.

Pongamos por ejemplo el quebrado $\frac{5}{8}$ y multipliquemos por 3 los dos términos 5 y 8, lo cual da $\frac{15}{24}$: esta fraccion es equivalente á la primera.

Efectivamente estando la unidad principal dividida en *ocho* partes iguales, si cada *octavo* se divide en *tres* partes iguales, en tal caso la unidad quedará dividida en *veinticuatro* partes iguales tambien. Cada *octavo* vale tres *veinticuatravos*, y cinco *octavos* valdrán cinco veces tres ó quince *veinticuatravos*, es decir, que los quebrados $\frac{5}{8}$ y $\frac{15}{24}$ son absolutamente iguales.

Del mismo modo se demuestra que los quebrados $\frac{11}{12}$ y $\frac{55}{60}$, de los que el segundo se forma multiplicando por 5 los dos primeros términos 11 y 12 del precedente, son iguales.

Y así recíprocamente, como se pasa del quebrado $\frac{15}{24}$ al $\frac{5}{8}$ tomando el *tercio* de cada término del primero, y del quebrado $\frac{55}{60}$ al $\frac{11}{12}$ tomando el *quinto* de los dos términos del anterior, se puede concluir diciendo que *un quebrado no cambia de valor porque se multipliquen ó dividan sus dos términos por un mismo número.*

Vamos, pues, á pasar á la esposicion y análisis de las diversas operaciones que pueden tener lugar en la resolucion de un problema cuyos *datos* son fracciones ó números fraccionarios ó complejos. Mas antes de tratar de las cuatro operaciones fundamentales, es necesario que demos á conocer dos *trasformaciones* de un uso frecuente y *particulares* al cálculo de los quebrados.

REDUCCION DE LOS QUEBRADOS Á UN COMUN DENOMINADOR.

47. Esta trasformacion tiene por objeto: *dados dos ó muchos quebrados de especies diferentes ó de diversos denominadores, reducirlos á una misma especie ó á un comun denominador.* Así pues, el principio establecido de que una fraccion no cambia de valor porque se multipliquen ó dividan sus dos términos por un mismo número, nos suministrará un medio bastante fácil y sencillo para verificar esta trasformacion.

Primer ejemplo.—*Se quieren reducir á un comun denominador los quebrados* $\frac{3}{4}$ *y* $\frac{5}{7}$.

Si se multiplican los dos términos 3 y 4 del primero por 7, denominador del segundo, y los dos términos 5 y 7 del segundo por 4, denominador del primero, tendremos los dos quebrados pedidos $\frac{21}{28}$ y $\frac{20}{28}$.

Estas fracciones tienen el mismo valor que las propuestas segun el principio establecido en el n.º 46; además de que tienen denominadores iguales, pues que cada uno de ellos es el producto de los dos denominadores primitivos 4 y 7.

2.º *Sean los quebrados* $\frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{6}{11}$.

Multiplíquense los dos términos 4 y 7 del primer quebrado por 88, producto de los denominadores 8 y 11 del segundo y tercero; despues los dos términos 5 y 8 del segundo por 77, producto de los denominadores del primero y tercero; y por último los dos términos 6 y 11 del tercero por 56, producto de los denominadores 7 y 8 del primero y segundo: tendremos, pues, los nuevos quebrados $\frac{352}{616}, \frac{385}{616}, \frac{336}{616}$.

Estas fracciones tienen el mismo valor que las primitivas, y sus denominadores son los mismos, pues que cada uno es el producto de los tres denominadores 7, 8 y 11 multiplicados en un órden diferente (Véanse los n.os 25—28).

Regla general.—*Para reducir un número cualquiera de quebrados á un comun denominador se multiplicarán los dos términos por el producto (ya efectuado) de los denominadores de los otros.*

He aquí el modo de aplicar ó hacer uso de esta regla en la práctica:

3.º *Sean los cinco quebrados* $\frac{3}{8}, \frac{7}{11}, \frac{10}{13}, \frac{23}{25}$ y $\frac{29}{43}$.

Para mayor sencillez se dispone así la operacion:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{3}{8}, & \frac{7}{11}, & \frac{10}{13}, & \frac{23}{25}, & \frac{29}{43}, \\
153725, & 111800, & 94600, & 49192, & 28600, \\
\hline
\frac{461175}{1229800}, & \frac{782600}{1229800}, & \frac{946000}{1229800}, & \frac{1131416}{1229800}, & \frac{829400}{1229800}.
\end{array}$$

Despues de haber formado los productos de los cinco denominadores 8, 11, 13, 25, 43, lo cual da por denominador comun de los quebrados trasformados, 1229800, divídase sucesivamente este producto por cada uno de los denominadores particulares, y de este modo se obtendrán los cinco *cocientes* 153725, 111800, 94600, 49192 y 28600, que deberán colocarse respectivamente debajo de los cinco quebrados propuestos; despues de esto se multiplica el numerador de cada quebrado por el *cociente* que le corresponde, obteniéndose de esta suerte los diversos numeradores y quedando reducidos los quebrados á un comun denominador.

La razon que hay para proceder de este modo es bien fácil de comprender: porque siendo el número 1229800 producto de los cinco denominadores, el cociente 153725 de la division de 1229800 por 8 espresa necesariamente el producto de los cuatro denominadores 11, 13, 25 y 43. Del mismo modo siendo 111800 el cociente de la division de 1229800 por el segundo denominador 11, es igual al producto de los otros cuatro denominadores 8, 13, 25 y 43: el mismo razonamiento ha de hacerse con relacion á los otros cocientes. Este medio es sin contradiccion mucho mas fácil de poner en práctica que si para cada quebrado se efectuase la multiplicacion de los denominadores de los otros cuatro. Pero sus ventajas no son ciertas sino cuando solo hay que reducir mas de tres quebrados á un comun denominador.

48. Hay un caso en que esta reduccion puede verificarse de un modo mas sencillo: este es *cuando el mayor de los denominadores es exactamente divisible por los otros.*

4.° *Sean los quebrados*

$$\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{7}{12},\quad \frac{23}{36},$$
$$12,\quad 9,\quad 6,\quad 3,\quad 1,$$
$$\overline{\frac{24}{36},\quad \frac{27}{36},\quad \frac{30}{36},\quad \frac{21}{36},\quad \frac{23}{36}.}$$

Bien fácil es de ver que 36 es exactamente divisible por cada uno de los otros cuatro denominadores 3, 4, 6 y 12.

Esto supuesto, se efectuan sucesivamente estas divisiones y se colocan los cocientes 12, 9, 6, 3 debajo de los cuatro primeros quebrados; despues se multiplica el numerador de cada uno de ellos por el cociente que le corresponde, y dejando sin alteracion alguna el quebrado $\frac{23}{36}$, todos los demás quedarán reducidos al comun denominador 36.

Algunas veces aun cuando el mayor de los denominadores no sea exactamente divisible por los demás, bastará multiplicarle por 2, 3, 4... para obtener *un producto exactamente divisible por todos los denominadores*: en este caso tiene lugar la simplificacion de que hemos hablado.

5.º *Sean los nuevos quebrados*

$$\frac{3}{4},\quad \frac{7}{8},\quad \frac{11}{12},\quad \frac{13}{18},\quad \frac{17}{24},\quad \frac{25}{36},$$
$$18,\quad 9,\quad 6,\quad 4,\quad 3,\quad 2,$$
$$\frac{54}{72},\quad \frac{63}{72},\quad \frac{66}{72},\quad \frac{52}{72},\quad \frac{51}{72},\quad \frac{50}{72}.$$

El denominador 36 que tan solo es divisible por 4, 12 y 18, se hace que lo sea exactamente por todos los demás denominadores multiplicándolo por 2: el denominador comun será 72.

Hecha ya esta operacion, se pasa á formar los cocientes de la division de 72 por los demás denominadores, colocándolos respectivamente debajo de cada uno de los quebrados; en seguida se multiplica el numerador de cada uno por el cociente que le corresponde: esta última operacion dará nuevos numeradores, siendo el denominador comun, como ya hemos dicho, 72.

La ejecucion de tales simplificaciones exige mucha práctica por parte del calculador. Mas adelante espondremos (*capítulo* V) el modo de *reducir un número cualquiera de quebrados al mas mínimo comun denominador.*

He aquí algunas aplicaciones de la trasformacion que precede.

49. Problema primero.—*Se quiere saber cuál de los dos quebrados* $\frac{3}{5}$ *y* $\frac{7}{12}$ *es mayor.*

A primera vista parece difícil hallar la solucion de este problema, porque si por una parte se observa que la unidad en el segundo quebrado se halla dividida en mayor número de partes que en el primero, tambien es cierto que el número de partes que en él se toma es mayor, pues bien se ve que 7, numerador del segundo, es mayor que 3, numerador del primero. Esta dificultad se allana fácilmente mediante la reduccion á un comun denominador, pues es evidente que *de dos quebrados cuyos denominadores son iguales, tiene mas valor aquel cuyo numerador es mayor.*

Hecha pues la reduccion, resulta $\frac{36}{60}$ para el primer quebrado y $\frac{35}{60}$ para el segundo; de donde se deduce que el quebrado primero $\frac{3}{5}$ es el mayor, llevando un esceso de $\frac{1}{60}$ sobre el segundo.

Por el mismo consiguiente se reconocerá que de los tres quebrados $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{11}$ y $\frac{8}{13}$ el mayor es $\frac{8}{13}$, el menor $\frac{6}{11}$ y el mediano $\frac{4}{7}$, porque reducidos á un comun denominador, resulta $\frac{572}{1001}$, $\frac{546}{1001}$ y $\frac{616}{1001}$.

Tambien podrán reducirse los quebrados á un comun numerador (*multiplicando los dos términos de cada uno de ellos por el producto de los numeradores de los demás*), y de los resultantes tendrá mas valor aquel que menor denominador tenga, pues aun cuando el numerador sea igual, la especie de las partes es mayor, por cuanto siendo menor el denominador, resulta que la unidad se halla dividida en menor número de partes.

Pero el primer medio (es decir, reducirlos á un comun denominador) es mejor, pues tiene la ventaja de dar á conocer la diferencia que hay entre los quebrados propuestos, considerados dos á dos.

Problema 2.º—*Se quiere saber qué alteracion podrá sufrir cualquier quebrado añadiendo un mismo número á sus dos términos.*

Sea, por ejemplo, el quebrado $\frac{7}{12}$ *á cuyos dos términos se ha de añadir la cantidad* 6: la fraccion resultante será $\frac{13}{18}$.

Si ambos quebrados se reducen á un comun denominador, resultará para el primero $\frac{126}{216}$ y para el segundo $\frac{156}{216}$; de donde la fraccion propuesta ha aumentado de valor en $\frac{30}{216}$.

Para hacernos cargo de lo que acabamos de decir, observemos que la unidad siendo igual á $\frac{12}{12}$, su esceso sobre $\frac{7}{12}$ estará bien representado por el quebrado $\frac{5}{12}$: del mismo modo el que tenga sobre $\frac{13}{18}$, lo está por el quebrado $\frac{5}{18}$. Los numeradores de estas dos diferencias son los mismos, y así debe ser efectivamente; porque 18 y 13 estando formados por la adicion del número 6 á los dos términos 7 y 12, resulta que la misma diferencia habrá entre 18 y 13 que entre 12 y 7.

Pero la diferencia $\frac{5}{18}$ es necesariamente menor que $\frac{5}{12}$, pues que el primer denominador es mayor, siendo así que los numeradores son iguales: de donde la fraccion $\frac{13}{18}$ difiere menos de la unidad que la fraccion $\frac{7}{12}$; luego la primera es mayor que la segunda.

Desde luego se ve que cuanto mayor sea el número añadido al quebrado $\frac{7}{12}$, tanto menor será la diferencia entre la nueva fraccion y la unidad, pues permaneciendo siempre 5 el numerador de esta diferencia, el denominador aumentará sucesivamente de valor y la fraccion será cada vez mayor.

Este razonamiento que es capaz de aplicarse á cualquiera otra fraccion, se enuncia generalmente diciendo que *si á los dos términos de una fraccion se añade un mismo número*, *la fraccion resultante es tanto mayor que la propuesta*, *cuanto mayor sea el número que se añade.*

Y recíprocamente, *cualquier fraccion disminuye de valor restando un mismo número de sus dos términos.*

Nos ha parecido conveniente entrar en algunos pormenores sobre esta proposicion con el objeto de que los principiantes no confundan este caso con el en que *se multiplican ó dividen los dos términos de una fraccion por un mismo número*, pues entonces la fraccion solo varía en su forma, y su valor queda el mismo: por el contrario cuando hay adicion ó sustraccion de un mismo número respecto de ambos términos, no solo varía la espresion, sino que tambien aumenta ó disminuye el valor de la fraccion.

REDUCCION DE UN QUEBRADO Á MENORES TERMINOS.

50. Sucede muy á menudo en el cálculo de esta clase de números tener que resolver fracciones, que estando espresadas por términos mayores, se ofrece una gran dificultad en formarse una idea clara y exacta de ellas.

Por ejemplo, el quebrado $\frac{12}{15}$ indica que es necesario dividir la unidad en 15 partes iguales y de ellas tomar 12. Pero como 12 y 15 son igualmente divisibles por 3, resulta que la fraccion propuesta $\frac{12}{15}$ estará bien representada por $\frac{4}{5}$, que le es equivalente segun lo establecido en el n.º 46. Así para formarse una idea exacta de la fraccion $\frac{12}{15}$ bastará concebir la unidad dividida en 5 partes iguales y de ellas tomar 4, lo cual, como bien se ve, es muy fácil.

Luego siempre que haya una fraccion cuyos términos sean muy crecidos, será muy útil procurar en cuanto sea posible reducirla á términos menores.

El primer medio que se presenta es dividir ambos términos por los números 2, 3, 4,... si hay lugar á ello.

Sea, por ejemplo, la fraccion $\frac{108}{144}$ *que se quiere reducir á términos menores.*

Como ambos términos son divisibles por 2, se efectuará la division y se tendrá por primer resultado $\frac{54}{72}$.

Los dos términos de esta última fraccion son tambien divisibles por 2, y así se tendrá por segundo resultado $\frac{27}{36}$.

Ensayando la division por 3 se tendrá $\frac{9}{12}$, quebrado que tambien puede dividirse por 3, resultando $\frac{3}{4}$ por la mas mínima espresion del quebrado $\frac{108}{144}$.

Este método es bien fácil y cómodo; mas por ahora no podremos ocuparnos en generalizarlo.

He aquí otro medio de *reducir un quebrado cualquiera á su mas mínima espresion*: consiste en determinar el mayor número que divide exactamente tanto al numerador como al denominador, ó de otro modo, en hallar el *máximo comun divisor*.

51. Principiemos por establecer algunas nociones preliminares.

Un número es *múltiplo* de otro, cuando le contiene un número entero de veces, es decir, cuando el primero es exactamente divisible por el segundo.

Y recíprocamente, el segundo de estos números se llama *submúltiplo*, *parte alícuota*, ó *divisor* del primero.

Así pues, 24 es *múltiplo* de 6, porque 4 veces 6 son 24: 4 y 9 son *divisores*, *submúltiplos* ó *partes alícuotas* de 24. Del mismo modo 60 es *múltiplo* de 12, pues que 5 veces 12 dan 60: como tambien 5 y 12 son *divisores* ó *submúltiplos* de 60.

Se llama *número primo* un número que solo es exactamente divisible por sí mismo y por la unidad (la cual se considera como *divisor* de todo número). Así; 2, 3, 5, 7, 11, 13,.... son *números primos*; mas no lo son 4, 6, 8, 9, 12, pues estos admiten por divisores cualquiera de los números 2, 3, ó los dos á la vez.

Dos números son *primos entre sí* cuando no tienen divisor comun (además de la unidad): así 4 y 9, 7 y 12, 12 y 25, son números *primos entre sí*; mas no lo son 8 y 12, pues son divisibles ambos, bien por 2 ó bien por 4.

Primer principio.—*Todo número que divida exactamente á otro, divide tambien á un múltiplo cualquiera de este segundo número.*

Por ejemplo, 24 siendo divisible por 8 y dando de cociente 3, 5 veces 24 ó 120 dividido por 8 dará (n.° 43) por cociente 5 veces 3 ó 15. Del mismo modo 60 siendo divisible por 12 y dando 5 de cociente, 7 veces 60 ó 420 dividido por 12 dará por cociente 7 veces 5 ó 35.

Segundo principio.—*Todo número que descompuesto en dos partes exactamente divisibles por otro, lo será igualmente por este segundo número.*

Así es en efecto, pues que el cociente de la division del número total siendo igual á la suma de los dos cocientes parciales, si estos son enteros, su suma, es decir, el cociente total, lo será igualmente.

Tercer principio.—*Todo número que divide separadamente á* una suma *descompuesta en dos partes y tambien á una de ellas, divide por precision á la otra.*

Porque resultando el cociente total igual á la suma de los dos cocientes parciales, si uno de estos es entero y el otro fraccionario, podria decirse que un *número entero* era igual á *un número fraccionario* (n.° 1), lo cual no puede verificarse por ser cosa absurda.

52. Esto supuesto, *propongámonos hallar el* maximo comun divisor *de los dos números* 360 y 276 (n.° 50).

Desde luego se ve que este máximo comun divisor no deberá ser mayor que el número menor 276, y siendo este divisible por sí mismo, siempre que divida á 360, podrá considerarse como el máximo comun divisor pedido.

Ensayando la division de 360 por 276 se halla por cociente 1 y por resto 84: de donde 276 no es máximo comun divisor. Pero sí lo será *el que haya entre el número menor* 276 *y el resto* 84 *de la division.*

En efecto, el máximo comun divisor que se busca, debiendo dividir á 360 y á una de sus partes 276, divide necesariamente (n.° 51) á la otra parte 84: de donde podremos deducir que el máximo comun divisor entre 360 y 276 *no puede ser mayor que el de los números* 276 y 84, pues que debe dividir á dichos dos números. En segundo lugar el máximo comun divisor entre 276 y 84, dividiendo las dos partes del *todo* 360, divide necesariamente á este último número, el cual siendo divisor exacto de 360 y 276, *no puede ser mayor que el máximo comun divisor de dichos dos números* 360 *y* 276. De donde se deduce que el máximo comun divisor de 360 y 276 y el de 276 y 84 deben *ser iguales*.

Así pues, la cuestion queda reducida á hallar el máximo comun divisor entre 276 y 84, números que forman un sistema mas sencillo que 360 y 276.

Para conseguirlo razonemos sobre 276 y 84, como hemos razonado sobre los números primitivos; es decir, ensayemos la division entre 276 y 84, y si es exacta, se podrá concluir que 84 es el máximo comun divisor de 276 y 84, y por consiguiente de 360 y 276.

Efectuando esta nueva division, se obtienen 3 por cociente y 24 por resto; de donde 84 no es el máximo comun divisor pedido. Mas por un razonamiento análogo al que ya hemos hecho anteriormente, probaremos que el máximo comun divisor entre 276 y 84 *es el mismo que el que existe entre* el primer resto 84 y el segundo 24.

Hagamos uso de dicho razonamiento: el máximo comun divisor entre 276 y 84, debiendo dividir á 84, divide necesariamente á *su múltiplo* 3 veces 84: así dividiendo *al todo* 276 y á una de sus partes, 3 veces 84, divide á la otra parte 24; de donde el máximo comun divisor de 276 y 84 *no deberá ser mayor que el de* 84 *y* 24. Por otra parte, el máximo comun divisor entre 84 y 24 dividiendo 3 veces á 84 y 24, que son las dos partes de 276, divide necesariamente á 276: así dividiendo á 84 y 276 *no puede ser mayor que el máximo comun divisor de* 84 *y* 276. El máximo comun divisor de 276 y 84 es el de 84 y 24: así que no puede ser el uno mayor ni menor que el otro; luego son iguales.

Reducida ya la cuestion á hallar el máximo comun divisor entre 84 y 24, será necesario dividir el uno por el otro. Efectuando esta nueva division se obtienen 3 por cociente y 12 por resto, de donde 24 no puede ser el máximo comun divisor; pero como este máximo comun divisor es el mismo que hay entre 24 y el resto 12, dividamos 24 por 12, y hallaremos un cociente exacto, cual es 2: así 12 es el máximo comun divisor entre 24 y 12, entre 84 y 24, entre 276 y 84 y finalmente entre 360 y 276. Luego 12 *es el máximo comun divisor buscado*.

En la práctica se dispone así la operacion:

	1	3	3	2
360	276	84	24	12
84	24	12	0	

Despues de haber dividido 360 por 276, lo cual da por cociente 1, que se coloca encima del divisor (en lugar de ponerlo debajo como se acostumbra regularmente), y por resto 84, se coloca este resto á la derecha del número menor 276: en seguida se divide este último número 276 por 84; el nuevo cociente 3 se pone como antes encima del divisor y el resto 24 á la derecha del número menor 84: continúese de este modo la operacion hasta hallar un cociente exacto, en cuyo caso el número menor será el máximo comun divisor de los números propuestos.

Regla general.—*Para hallar el máximo comun divisor de dos números se dividirá el mayor por el menor, y si de esta division no resulta resto alguno, el menor de los números propuestos será el máximo comun divisor.*

Si por el contrario la division no es exacta, sino que resulta algun resto, se dividirá el menor de los números por él mismo, y si la division es exacta, el resto hallado en la primera será el máximo comun divisor.

Si esta segunda division aun no es exacta, se dividirá el primer resto por el resultante en ella, y así sucesivamente se irá dividiendo el último resto por el que le precede, hasta que hayamos obtenido una division exacta: entonces el último resultante será *el máximo comun divisor buscado.*

Si el último divisor es la unidad, es una prueba de que los números propuestos son *primos entre sí*, pues que no tienen mas divisor comun que la *unidad.*

Por consiguiente si dos números propuestos son *primos entre sí*, aplicándoles el procedimiento de que acabamos de hablar *se hallará necesariamente por último resto* 1. Porque segun la naturaleza de dicho procedimiento los restos van disminuyendo sucesivamente, y por tanto no podrá obtenerse un *resto nulo* antes de obtener un resto *igual* á 1, pues que cualquiera otro divisor que diese este *resto nulo* seria máximo comun divisor de dos números. Así por precision despues de ejecutado un cierto número de operaciones mayor ó menor deberá obtenerse la unidad por resto.

53. He aquí algunas aplicaciones de este procedimiento:

1.er ejemplo.—*Reducir á su mas mínima espresion el quebrado* $\frac{592}{999}$.

Apliquemos el método del máximo comun divisor á estos dos números 999 y 592, y despues que hallemos el número mayor que divide á ambos efectuaremos su division por este número, obteniendo de este modo el quebrado pedido.

	1	1	2	5	999	37	592	37
999	592	407	185	37	259	27	222	16
407	185	37	0		0		0	

Resulta pues que el máximo comun divisor es 37: así dividiendo

999 y 592 por 37 se tendrá $\frac{16}{27}$ por la fraccion $\frac{592}{999}$ reducida á menores términos.

2.º EJEMPLO.—*Sea el nuevo quebrado* $\frac{912}{3072}$.

	3	2	1	2	2
3072	912	336	240	96	48
336	240	96	48	0	

3072	48
192	64
0	

912	48
432	29
0	

Aquí el máximo comun divisor es 48, y por tanto dividiendo los dos términos del quebrado por él se tendrá $\frac{19}{64}$ para el quebrado $\frac{912}{3072}$ reducido á menores términos.

3.er EJEMPLO.—*Se quiere reducir á su mas mínima espresion el quebrado* $\frac{317}{873}$.

	2	1	3	15	1	1	2
873	317	239	78	5	3	2	1
239	78	5	28	2	1	0	
			3				

El método empleado en este ejemplo nos conduce á un resto igual á 1, lo cual como ya hemos visto indica que los números 873 y 317 son *primos entre sí*; en este caso la fraccion se llama *irreductible*, pues no puede reducirse á una espresion mas simple mediante la division de sus términos por un mismo número.

OBSERVACION.—En la tercera operacion se ha obtenido el resto 5, que es un *número primo* (n.º 51), y como 5 no divide al resto 78 que le precede, se puede inferir sin necesidad de pasar mas adelante que los dos términos del quebrado son *números primos entre sí.* En efecto se ha visto en la demostracion del procedimiento que el máximo comun divisor de dos números divide necesariamente al resto de cada division: así es que siendo 5 un *número primo*, debe tener lugar una de las dos cosas siguientes: ó bien 5 divide al resto que le precede, en cuyo caso él será el máximo comun divisor, ó bien no le divide, y entonces ni 5 ni ningun otro número que no sea la unidad podrá ser máximo comun divisor entre los dos números propuestos.

En general, *tan luego como se llegue á un resto que sea* NUMERO PRIMO, *si este resto no divide al precedente, podrá deducirse que los números propuestos son primos entre sí, sin necesidad de llevar mas adelante la operacion.*

En el *capítulo* V nos estenderemos mas sobre el modo de hallar el máximo comun divisor, que deberá considerarse como una de las operaciones mas importantes de la Aritmética.

Pasemos ahora á tratar de las cuatro operaciones fundamentales sobre los quebrados.

SUMA DE LOS QUEBRADOS.

55. La suma de los quebrados tiene por objeto *hallar un solo número cuyo valor sea el mismo que el de muchos quebrados reunidos.*

Pueden presentarse dos casos: ó bien las fracciones son de una misma especie, es decir, que tienen un mismo denominador, ó bien son de especie diferente: en el primer caso *se hace la suma de los numeradores, y al total se le pone el denominador comun*, y en el segundo se principiará la operacion por *reducir los quebrados propuestos á un comun denominador*, segun la regla del n.° 47., y en seguida se opera sobre los nuevos quebrados, como acabamos de decir.

Así la suma de los quebrados $\frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11}$ es igual á $\frac{9}{11}$.

Del mismo modo la de los quebrados $\frac{5}{23}, \frac{2}{23}, \frac{7}{23}, \frac{4}{23}$ es igual á $\frac{18}{23}$.

Propongámonos ahora sumar los quebrados $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}.$

$$\begin{array}{ccc} 32 & 24 & 12 \\ \hline \frac{64}{96} & \frac{72}{96} & \frac{84}{96}. \end{array}$$

Despues de haber reducido estos quebrados á un comun denominador segun la regla del número 47, se sumarán los numeradores, lo cual da 220, y poniéndole el denominador 96 resultará $\frac{220}{96}$ por la suma pedida.

56. **Este último ejemplo conduce á un resultado $\frac{220}{96}$, que deberá interpretarse de la manera siguiente:**

Así como es necesario tomar dos *medios*, tres *tersios*, cuatro *cuartos*, cinco *quintos* para formar la unidad, del mismo modo lo es noventa y seis *noventa y seisavo* para componerla: luego tantas veces como 220 contenga á 96, igual número de unidades habrá en el quebrado $\frac{220}{96}$.

Por tanto como dividiendo 220 por 96 resulta 2 de cociente y 28 de resto, tendremos con arreglo á lo establecido en el n.° 1 un número fraccionario compuesto de 2 unidades, mas una fraccion $\frac{28}{96}$ ó $\frac{7}{24}$ (omitiendo el factor comun 4 en ambos términos).

Por lo comun, siempre que se llegue á un resultado de forma fraccionaria y en el que el numerador sea mayor que el denominador, *para sacar el entero contenido en esta espresion bastará dividir uno por otro* los términos del quebrado: el cociente de esta division representará el *entero*, y el resto el numerador de la *fraccion* que deberá añadirse á aquel.

Por este medio hallaremos que $\frac{17}{12}$ es igual á $1\frac{5}{12}$, $\frac{153}{15}$ igual á $10\frac{3}{15}$ ó $10\frac{1}{5}$, y $\frac{654}{89}$ igual á $7\frac{31}{89}$.

Por el mismo consiguiente, siempre que se obtenga *un entero unido á un quebrado*, para formar un solo número fraccionario, lo cual es muy útil, es necesario *multiplicar el entero por el denominador, añadir al producto el numerador y dar á la suma el denominador de la fraccion propuesta.*

Por ejemplo, $3\frac{2}{5}$ es igual á $\frac{3 \text{ veces } 5}{5}$, *mas* $\frac{2}{5}$, ó á $\frac{17}{5}$; $11\frac{7}{12}$ es igual á $\frac{132}{12}$, *mas* $\frac{7}{12}$, ó á $\frac{139}{12}$; $8\frac{17}{24}$ es igual á $\frac{209}{24}$.

SUSTRACCION DE LOS QUEBRADOS.

57. Esta operacion tiene por objeto *hallar el esceso de un quebrado mayor sobre otro menor.*

Si los dos quebrados tienen un mismo denominador, *no habrá que hacer otra cosa que restar el numerador mas pequeño del mayor y á la diferencia darle el denominador comun.* Si los denominadores son diferentes, *será necesario reducirlos á un comun denominador, y en seguida proceder á la sustraccion de los numeradores.*

Así sustrayendo $\frac{5}{12}$ de $\frac{11}{12}$ quedan $\frac{6}{12}$ ó $\frac{1}{2}$. Del mismo modo si del quebrado $\frac{17}{24}$ se resta el $\frac{7}{24}$ quedará $\frac{10}{24}$ ó $\frac{5}{12}$.

EJEMPLO.—*Se quieren restar* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{7}{8}$.

Reducidas estas dos espresiones á un comun denominador, resulta $\frac{16}{24}$ y $\frac{21}{24}$, cuya diferencia es $\frac{5}{24}$. Por la misma razon si del quebrado $\frac{19}{20}$ se quitan $\frac{13}{17}$ quedará de resto $\frac{63}{340}$.

Puede suceder muy á menudo tener que restar *quebrados que esten acompañados de un número entero.*

$$\begin{array}{lrcr}
\text{Por ejemplo, } \textit{del número fraccionario} & 13\,\frac{3}{4} & \ldots\frac{39}{52}\ldots & \frac{91}{52} \\
\textit{se quiere sustraer el número}\ldots & 3\,\frac{11}{13} & \ldots\ldots\ldots & \frac{44}{52} \\
\hline
& 7\,\frac{47}{52}. & &
\end{array}$$

Para efectuar esta operacion se principia por reducir las fracciones á un comun denominador, lo que da $\frac{39}{52}$ por la primera y $\frac{44}{52}$ por la segunda. En seguida, como no pueden sustraerse $\frac{44}{52}$ de $\frac{39}{52}$, se toma una *unidad* del entero 13, la cual se reduce al quebrado $\frac{39}{52}$: de este modo se obtiene el quebrado $\frac{91}{52}$, del cual se sustrae $\frac{44}{52}$, que da por resto $\frac{47}{52}$. Pasando á la sustraccion de los enteros es necesario tener presente que 13 se halla disminuido de una unidad, y por lo mismo dirèmos: 5 de 12 queda 7; luego el resultado pedido es $7\frac{47}{52}$.

58. He aquí un problema en el cual entran tanto la adicion como la sustraccion de números enteros unidos á quebrados.

Un mercader de paño ha vendido varias porciones de una pieza cuyo contenido es 30 *y* $\frac{7}{8}$ *de vara: las porciones vendidas son* $7\frac{3}{4}$, $9\frac{2}{3}$ *y* $11\frac{5}{12}$ *de vara: se pregunta qué tela deberá quedarle.*

Hecha la suma de las porciones vendidas, se sustraerá del total de la pieza $30\frac{7}{8}$, y el resultado de la sustraccion deberá representar la cantidad de género que le ha quedado.

Para mayor sencillez conviene disponer de este modo la operacion:

	12		
7 v.	$\frac{3}{4}$	3	9
9	$\frac{2}{3}$	4	8
11	$\frac{5}{12}$	1	5
			$\overline{22}$
28	$\frac{10}{12}$		

30 v.	$\frac{7}{8}$	$\frac{21}{24}$
28	$\frac{10}{12}$	$\frac{20}{24}$
2	$\frac{1}{24}$	

Colocados unos debajo de otros los tres números que se quieren sumar, se observa á primera vista que los quebrados propuestos pueden reducirse á un comun denominador 12: colóquese este número á la derecha un poco encima de los quebrados y ráyesele por bajo. En seguida se escriben debajo de este número 12 y respectivamente sobre la misma línea horizontal que los tres quebrados los cocientes 3, 4 y 1 que han resultado de la division del 12 por cada uno de los denominadores: despues de esto se multiplican los numeradores de estos quebrados por 3, 4 y 1, lo que da 8, 9 y 5: hágase la suma 22 de estos tres nuevos numeradores y tendremos por la suma de los tres quebrados $\frac{22}{12}$ ó $1\frac{10}{12}$: este $\frac{10}{12}$ se escribe debajo de las tres fracciones, reteniendo 1 para añadirlo á la columna de los números enteros, como regularmente se acostumbra.

Resulta pues que $28\frac{10}{12}$ es el total de varas vendidas.

Averiguado este número de varas, para hallar el resto pedido no habrá mas que restar aquel del número total de varas de que se compone la pieza; para lo cual bastará colocar la suma hallada debajo de $30\frac{7}{8}$ y efectuar la sustraccion, observando que ambos quebrados pueden reducirse al denominador comun 2 veces 12 ó 24.

Hecha la operacion se obtienen 2 varas $\frac{1}{24}$ por el resto resultante de la pieza de género, lo que el mercader podrá fácilmente averiguar midiendo el *retazo* que le quedó hechas las tres ventas.

MULTIPLICACION DE QUEBRADOS.

59. La multiplicacion tiene generalmente por objeto (n.º 9), *dados dos números, el formar un tercero que sea respecto del primero lo que el segundo es respecto de la unidad.*

Supuesto esto, consideremos los principales casos que hay en la multiplicacion de los quebrados:

1.º Multiplicar un quebrado por un entero.

Por ejemplo, $\frac{7}{12}$ por 5.

Segun la definicion arriba enunciada, como el multiplicador 5 contiene 5 veces la unidad, el producto deberá ser igual á 5 veces $\frac{7}{12}$, ó de otro modo, deberá ser 5 veces mayor que $\frac{7}{12}$. Ahora bien, hemos visto (n.° 45) que un quebrado se hace 5 veces mayor multiplicando su numerador por 5, luego el producto pedido será $\frac{5 \text{ veces } 7}{12}$ ó $\frac{35}{12}$.

Por consecuencia, *para multiplicar un quebrado por un entero es necesario multiplicar el numerador por el entero, y al producto ponerle por denominador el del quebrado.*

El producto $\frac{35}{12}$ equivale á $2\,\frac{11}{12}$, como puede verse fácilmente sacando el entero que contiene el quebrado propuesto (n.° 56).

Del mismo modo se hallará que el producto de $\frac{13}{24}$ por 29 es igual á $\frac{377}{24}$ ó $15\,\frac{17}{24}$.

Otro ejemplo.—*Se quieren multiplicar* $\frac{11}{18}$ *por* 9.

Efectuando la multiplicacion, el producto será $\frac{99}{18}$, ó sacando el entero $5\,\frac{9}{18}$, es decir, $5\,\frac{1}{2}$.

Este resultado podria obtenerse de un modo mas sencillo, porque para multiplicar $\frac{11}{18}$ por 9, en lugar de hacer la multiplicacion del numerador por 9, se puede dividir el denominador por 9, lo cual da $\frac{11}{2}$ ó $5\,\frac{1}{2}$.

Lo único que podrá deducirse de este modo de operar aplicable al ejemplo propuesto, es que el denominador es divisible por el multiplicador; pero no todas veces hay lugar á esto, en tanto que la regla establecida siempre puede aplicarse. Así que la práctica es el solo medio capaz de poner al calculador al alcance de esta clase de simplificaciones.

2.° MULTIPLICAR UN ENTERO POR UN QUEBRADO.

EJEMPLO.—*Se quieren multiplicar* 12 *por* $\frac{4}{7}$.

Supuesto que en este caso el multiplicador $\frac{4}{7}$ es igual á 4 veces la 7.ª parte de la unidad, el producto deberá serlo á 4 veces la 7.ª parte de 12. La 7.ª parte de 12 es (n.° 44) $\frac{12}{7}$: ahora bien, para tomar este número 4 veces, ó lo que es lo mismo, para obtener un número 4 veces mayor que $\frac{12}{7}$ basta (n.° 45) multiplicar el numerador por 4; hecha esta operacion resulta $\frac{48}{7}$ ó $6\frac{6}{7}$ por el producto pedido.

Luego *para multiplicar un entero por un quebrado basta multiplicar el entero por el numerador y al producto darle por denominador el del quebrado*: en seguida podrá sacarse el entero que contenga, si hay lugar á ello.

Así que el producto de 29 por $\frac{7}{8}$ es igual á $\frac{203}{8}$ ó á $25\frac{3}{8}$. Del mismo modo el de 24 por $\frac{5}{6}$ es igual á $\frac{120}{6}$ ó á 20; resultado que tambien puede hallarse dividiendo 24 por 6 y el cociente 4 multiplicándolo por 5. Pero volvemos á repetir que semejantes simplificaciones no siempre tienen lugar.

3.° MULTIPLICAR UN QUEBRADO POR OTRO.

EJEMPLO.—*Quiérense multiplicar* $\frac{3}{4}$ *por* $\frac{5}{8}$.

El razonamiento que para este caso debe emplearse es análogo al del precedente, pues que siendo el multiplicador $\frac{5}{8}$ igual á 5 veces la 8.ª parte de la unidad, el producto deberá serlo á 5 veces la 8.ª parte del multiplicando $\frac{3}{4}$; luego para tomar la 8.ª de $\frac{3}{4}$ es necesario (n.° 45) multiplicar el denominador por 8, lo cual da $\frac{3}{32}$, y para obtener un quebrado 5 veces mayor que $\frac{3}{32}$ se debe multiplicar el denominador por 5, de donde resulta $\frac{15}{32}$ por el producto pedido.

Luego *para multiplicar un quebrado por otro se hace la multiplicacion de numerador por numerador y denominador por denominador; y despues se dará el segundo producto por denominador al primero.*

De aquí es que el producto de $\frac{7}{12}$ por $\frac{5}{6}$ es igual á $\frac{35}{72}$; así como tambien el de $\frac{8}{15}$ por $\frac{3}{4}$ es igual á $\frac{24}{60}$, ó reduciéndolo á menores términos, á $\frac{2}{5}$.

60. Nota.—Es de advertir que en los dos casos anteriores *el producto es siempre menor que el multiplicando*, lo cual proviene de que el objeto de la operacion es realmente tomar del multiplicando una parte indicada por *el quebrado multiplicador*.

61. Finalmente los dos factores de la multiplicacion ó uno de ellos pueden ser *enteros unidos á quebrados*; mas su ejecucion es muy fácil siempre que se esté bien penetrado del modo de efectuarla en los dos casos anteriores.

Ejemplo.—*Se quieren multiplicar* $7\frac{2}{3}$ *por* $5\frac{7}{8}$.

Estos números pueden reducirse respectivamente (n.° 56) á sus iguales $\frac{23}{3}$ y $\frac{47}{8}$: efectuando ahora la multiplicacion como queda indicado se obtiene por producto $\frac{1081}{24}$, ó estrayendo los enteros, $45\frac{1}{24}$.

Tambien podrá verificarse la multiplicacion por partes, esto es, multiplicar desde luego 7 por 5, $\frac{2}{3}$ por 5, 7 por $\frac{7}{8}$ y $\frac{2}{3}$ por $\frac{7}{8}$, y en seguida hacer la suma de estos *cuatro* productos; mas esta operacion tiene el gran inconveniente de ser muy complicada.

DIVISION DE QUEBRADOS.

62. La division tiene por objeto (n.º 29): *dado un producto y uno de sus factores, determinar el otro.* Resulta, pues, tanto de esta definicion cuanto de la de la multiplicacion (n.º 59) que el primer número llamado *dividendo* se compone con el tercero llamado *cociente*, como el segundo que es el *divisor* se compone con la unidad.

Esto supuesto, tanto en la division como en la multiplicacion de los quebrados se presentan tres casos principales, á saber:

1.º DIVIDIR UN QUEBRADO POR UN ENTERO.

EJEMPLO.—*Quiérese dividir el quebrado* $\frac{5}{7}$ *por el entero* 6.

Como el divisor 6 es igual á 6 veces la unidad, resulta que el dividendo $\frac{5}{7}$ debe serlo á 6 veces el cociente buscado, ó lo que es lo mismo, el cociente deberá ser la 6.ª parte de $\frac{5}{7}$. Luego para tomar la 6.ª parte de un quebrado, ó para obtener un quebrado 6 veces menor es necesario (n.º 45) multiplicar el denominador por 6: por lo tanto $\frac{5}{6 \text{ veces } 7}$ ó $\frac{5}{42}$ es el cociente pedido.

De aquí se sigue que *para dividir un quebrado por un entero se multiplica el denominador de aquel por este último, dejando el numerador sin alteracion alguna.*

Así $\frac{11}{12}$ dividido por 8 da $\frac{11}{96}$ de cociente, y $\frac{23}{30}$ dividido por 12 da $\frac{23}{360}$.

El cociente de $\frac{18}{25}$ por 6 es $\frac{18}{150}$; pero tambien podrá efectuarse la division de $\frac{18}{25}$ por 6 tomando la 6.ª parte del numerador, lo cual da $\frac{3}{25}$; resultado á que equivale por otra parte el quebrado $\frac{18}{150}$ tan luego como se suprima el factor 6, comun á ambos términos de la fraccion.

2.° Dividir un entero por un quebrado.

Ejemplo.—*Sea el entero 12, el cual se quiere dividir por* $\frac{7}{9}$.

Una vez que el divisor $\frac{7}{9}$ es igual á la 9.ª parte de la unidad, el dividendo 12 deberá serlo á 7 veces la 9.ª del cociente buscado. Luego tomando la 7.ª de 12, que es $\frac{7}{12}$, se tendrá la 9.ª del cociente hallado, y para obtenerlo bastará tomar 9 veces $\frac{12}{7}$, lo que se hace multiplicando el numerador por 9: el resultado de la operacion será $\frac{9 \text{ veces } 12}{7}$ ó $\frac{108}{7}$, ó sacando el entero, $15\frac{3}{7}$.

Por consiguiente, *para dividir un entero por un quebrado se multiplica el entero por el denominador, se divide el producto por el numerador y despues se saca el entero, si lo hay, al quebrado resultante.*

Observemos que tomar la 7.ª de 12 y multiplicar el resultado por 9 se reduce á multiplicar 12 por $\frac{9}{7}$: por tanto se podrá decir tambien que *para dividir un entero por un quebrado bastá multiplicar aquel por este, invertidos sus términos* (Véase el n.° 59, 2.°).

3.° Dividir un quebrado por otro.

Ejemplo.—*Sea el quebrado* $\frac{3}{5}$, *que se quiere dividir por* $\frac{8}{11}$.

El razonamiento que debemos emplear para efectuar esta operacion es enteramente semejante al anterior. El divisor $\frac{8}{11}$ siendo igual á 8 veces la 11.ª parte de la unidad, el dividendo $\frac{3}{5}$ debe serlo á 8 veces la 11.ª del cociente; de donde la 8.ª de $\frac{3}{5}$ ó $\frac{3}{40}$ es la 11.ª del cociente, y 11 veces $\frac{3}{40}$ ó $\frac{33}{40}$ es el cociente buscado.

Luego *para dividir un quebrado por otro es necesario multiplicar el numerador del quebrado dividendo por el denominador del quebra-*

do divisor, y viceversa el denominador del quebrado dividendo por el numerador del quebrado divisor, y dar por denominador el segundo producto al primero; ó bien en menos palabras, *multiplicar el quebrado dividendo por el quebrado divisor, invertidos sus términos* (Véase el n.º 59, 3.º).

Así $\frac{3}{4}$ dividido por $\frac{5}{7}$ se reduce á multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{7}{5}$, y el resultado de esta operacion será $\frac{21}{20}$ ó $1\frac{1}{20}$.

Del mismo modo $\frac{23}{30}$ dividido por $\frac{13}{15}$ es lo mismo que multiplicar $\frac{23}{30}$ por $\frac{15}{13}$, mediante cuya operacion tendremos $\frac{345}{390}$, ó mas simplificado $\frac{23}{26}$ (porque se dividen ambos términos por 15, que es el factor comun de ellos).

Por último, si se ofreciese dividir *un entero y un quebrado por otro entero unido á otro quebrado*, se reduciria cada entero á la especie del quebrado que le acompañase, despues de lo cual se procederia á la division de los nuevos quebrados del modo ya indicado.

Ejemplo.—*Dividir* $12\frac{3}{4}$ *por* $6\frac{2}{3}$.

Reduciendo los enteros tendremos $\frac{51}{4}$ y $\frac{20}{3}$, y haciendo la division el cociente será $\frac{153}{80}$ ó $1\frac{73}{80}$.

Por el mismo consiguiente, $4\frac{7}{11}$ dividido por $15\frac{5}{8}$ da de cociente $\frac{408}{1375}$.

63. Nota.—Siempre que en la division el *divisor sea un quebrado, el cociente es mayor que el dividendo*; porque resulta de la multiplicacion de este por el mismo *divisor, invertidos sus términos*, el cual viene á ser un número mayor que la unidad.

64. Hagamos algunas aplicaciones de las reglas de la multiplicacion y division de los quebrados.

Problema 1.º—*Si una vara de cierto género cuesta* $47\frac{2}{5}$ *reales, ¿cuánto costarán* $12\frac{7}{8}$ *varas del mismo género?*

Puesto que una sola vara cuesta $47\frac{2}{5}$ reales, es claro que $12\frac{7}{8}$ de vara deberán costar 12 veces $47\frac{2}{5}$ reales, mas los $\frac{7}{8}$ de $47\frac{2}{5}$ reales, es decir, que es necesario multiplicar $47\frac{2}{5}$ por $12\frac{7}{8}$; el producto espresará en reales el precio pedido.

Ahora bien, $47\frac{2}{5}$ multiplicado por $12\frac{7}{8}$ es lo mismo que $\frac{237}{5}$ multiplicado por $\frac{103}{8}$; el producto de esta multiplicacion será $\frac{24411}{40}$, ó estrayendo los enteros, $610\frac{11}{40}$: así el *precio pedido* es $610\frac{11}{40}$ reales.

Para hacer la prueba podrá dividirse $610\frac{11}{40}$ por $12\frac{7}{8}$ y se tendrá $47\frac{2}{5}$; pero es mas sencillo (n.º 43) duplicar la cantidad $47\frac{2}{5}$ y tomar la mitad de $12\frac{7}{8}$.

El duplo de $47\frac{2}{5}$ es $94\frac{4}{5}$; la mitad de $12\frac{7}{8}$ es $6\frac{7}{16}$.

Pero es así que $94\frac{4}{5}$ multiplicado por $6\frac{7}{16}$ se reduce á multiplicar $\frac{474}{5}$ por $\frac{103}{16}$, cuyo producto es $\frac{48822}{80}$, ó efectuando la division, $610\frac{22}{80}$ y simplificándole, $610\frac{11}{40}$; luego la operacion es exacta.

PROBLEMA 2.º — *Una persona ha comprado* $23\frac{5}{12}$ *varas de cierto género por la suma de* $745\frac{13}{20}$ *reales: se pregunta cuánto será bajo este supuesto el precio de cada vara.*

A primera vista se observa que si dicho precio fuese conocido, multiplicándolo por las $23\frac{5}{12}$ varas, el producto daria los $745\frac{13}{20}$ reales; luego para obtener el precio pedido bastará dividir $745\frac{13}{20}$ por $23\frac{5}{12}$.

Pues bien, $745\frac{13}{20}$ *dividido por* $23\frac{5}{12}$ equivale á *dividir* $\frac{14913}{20}$ *por* $\frac{281}{12}$: el resultado de la division será $\frac{12 \text{ veces } 14913}{20 \text{ veces } 281}$ ó $\frac{178956}{5620}$, y haciendo la estraccion de los enteros se tendrá $31\frac{4736}{5620}$.

De donde el precio de cada vara del género vendido es 31 reales y una fraccion de real $\frac{4736}{5620}$.

Para la comprobacion del problema bastará, como ya hemos indicado (n.º 43), duplicar los dos términos de la division: con cuya operacion sabemos no altera en nada el cociente.

El duplo de $745\frac{13}{20}$ es $1491\frac{3}{10}$, y el de $23\frac{5}{12}$ es $46\frac{5}{6}$.

Dividiendo $1491\frac{3}{10}$ ó $\frac{14913}{10}$ por $46\frac{5}{6}$ ó $\frac{281}{6}$ se obtiene por cociente el quebrado $\frac{89478}{2810}$, ó estrayendo los enteros, $31\frac{2368}{2810}$.

Este último quebrado equivale á la fraccion $\frac{4736}{5620}$, cuyos dos términos estan divididos por el factor comun 2.

QUEBRADOS DE QUEBRADOS.

65. A la multiplicacion de los quebrados se refiere otra especie de

operacion conocida con el nombre de *regla de quebrados de quebrados.*

Para dar una idea clara y exacta de esta nueva operacion, supongamos desde luego que del quebrado $\frac{5}{7}$ se quiera tomar una parte indicada por $\frac{2}{3}$, ó en otros términos, *que se busque la parte* $\frac{2}{3}$ *de los* $\frac{5}{7}$.

Como para resolver esta cuestion es necesario tomar 2 veces el tercio de $\frac{5}{7}$, lo cual equivale (n.º 57) á multiplicar $\frac{5}{7}$ por $\frac{2}{3}$, cuya operacion se hace (n.º 59) *multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador*, se obtendrá $\frac{10}{21}$ por los $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$.

Supongamos en segundo lugar que del nuevo quebrado $\frac{10}{21}$ se quisiera tomar una parte indicada por $\frac{8}{13}$: la cuestion en este caso tendria realmente por objeto *tomar los* $\frac{8}{13}$ *de los* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{7}$.

Para obtener los $\frac{8}{13}$ de $\frac{10}{21}$ es preciso multiplicar $\frac{10}{21}$ por $\frac{8}{13}$, lo cual se hará multiplicando entre sí los numeradores y denominadores: hecha la operacion, resultará $\frac{80}{273}$ por los $\frac{8}{13}$ de los $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$.

Aun si se quiere llevar la operacion mas adelante, podrá tomarse la parte $\frac{3}{11}$ de los $\frac{80}{273}$, esto es, multiplicar $\frac{80}{273}$ por $\frac{3}{11}$, y el nuevo resultado representará los $\frac{3}{11}$ de los $\frac{8}{13}$ de los $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$.

Propongámonos por segundo ejemplo *tomar los* $\frac{2}{3}$ *de los* $\frac{3}{4}$ *de los* $\frac{5}{8}$ *de los* $\frac{6}{7}$ *de* 12.

Desde luego se ve que tomar los $\frac{6}{7}$ de 12 se reduce á multiplicar 12 por $\frac{6}{7}$, lo cual da $\frac{72}{7}$.

Del mismo modo tomar $\frac{5}{8}$ de los $\frac{6}{7}$ de 12 equivale á tomar los $\frac{5}{8}$ de $\frac{72}{7}$, ó á multiplicar $\frac{72}{7}$ por $\frac{5}{8}$, y se tendrá $\frac{360}{56}$.

Tomar los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{5}{8}$ de los $\frac{6}{7}$ de 12 es lo mismo que tomar los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{360}{56}$, ó multiplicar $\frac{360}{56}$ por $\frac{3}{4}$, que da por producto $\frac{1080}{224}$.

Por último, para hallar los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{5}{8}$ de los $\frac{6}{7}$ de 12 es indispensable multiplicar $\frac{1080}{224}$ por $\frac{2}{3}$, y tendremos $\frac{2160}{672}$.

Sacando el entero contenido en este resultado hallaremos $3\,\frac{144}{672}$, ó reduciendo el quebrado, $3\,\frac{3}{14}$.

A poco que se medite sobre la marcha que hasta aquí hemos seguido, se observará que *para tomar quebrados de quebrados se deben multiplicar los numeradores entre sí, hacer lo mismo con los denominadores, y dar el segundo producto por denominador al primero.*

Si se quieren tomar quebrados de quebrados de un número entero, como en el segundo ejemplo, será necesario poner este entero en forma de quebrado dándole por denominador la *unidad*, y en seguida proceder á efectuar la operacion como queda establecido.

PROBLEMA. —*Preguntado á un aritmético qué hora era, respondió: los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{5}{6}$ de los $\frac{7}{12}$ de los $\frac{6}{7}$ de 24 horas.—Se pregunta cuál es la hora indicada.*

Para resolver este problema se escribirá sobre una primera línea horizontal todos los numeradores (incluso el entero) y sobre una segunda línea todos los denominadores.

$$\begin{array}{ccccc} 3, & 5, & 7, & 6, & 24 \\ 4, & 6, & 12, & 7, & 1 \end{array}$$

Dispuesta así la operacion, se pasará á formar el producto de los números de la primera línea y el de los de la segunda; en seguida se dividirá el primer producto por el segundo y se obtendrá $\frac{15120}{2016}$ por resultado, y sacando el entero, $7\ \frac{1008}{2016}$, ó reduciendo, $7\ \frac{1}{2}$: luego la hora indicada en el problema es las $7\ \frac{1}{2}$.

La operacion puede muy bien simplificarse, observando que como 7 debe ser por fuerza un factor comun al producto de los numeradores y al de los denominadores, no hay impedimento alguno en *suprimir dicho factor antes de efectuar las multiplicaciones*: del mismo modo lo es por una parte el factor 6 y por otra el 12, que hallándose en el número de los denominadores, se halla igualmente en 24, y por último puede suprimirse el factor 2, que siendo el cociente de 24 por 12, se halla en el denominador 4.

Suprimidos todos estos factores, se tendrá por resultado $\frac{3 \text{ veces } 5}{2}$ ó $\frac{15}{2}$ ó $7\ \frac{1}{2}$, como hemos visto mas arriba.

Mas es de advertir que esta especie de simplificaciones exigen por parte del calculador mucha práctica y reflexion, al paso que la regla establecida anteriormente es general á todos los casos y conduce al mismo objeto.

Otras aplicaciones.—*Los* $\frac{2}{3}$ *de los* $\frac{3}{4}$ de un número componen los $\frac{6}{12}$ ó la *mitad* del mismo número: por el mismo consiguiente el *tercio del quinto* de un número es igual á $\frac{1}{15}$ de él: la *mitad de los* $\frac{3}{4}$ es igual á los $\frac{3}{8}$ &c....

66. Observacion general sobre los quebrados.—Resulta evidentemente de la naturaleza de los procedimientos establecidos para el

cálculo de los quebrados que las cuatro operaciones fundamentales efectuadas con esta clase de números, á saber, la adicion, sustraccion, multiplicacion y division, se reducen en una palabra á operaciones de un mismo género efectuadas con números enteros.

Así por ejemplo, la adicion y sustraccion de los quebrados equivalen, mediante la reduccion de ellos á un comun denominador, á la adicion y sustraccion de sus numeradores.

Del mismo modo la multiplicacion se efectua multiplicando los numeradores y denominadores entre sí.

La division sigue en este caso la misma regla de la multiplicacion *tan luego como se hayan invertido los términos del quebrado divisor.*

De donde se puede inferir que los principios establecidos en los n.os 25—25 sobre la multiplicacion de los números enteros son igualmente aplicables á los quebrados, es decir, que 1.° *multiplicar un quebrado por el producto de muchos otros equivale á multiplicar sucesivamente el primero por cada uno de los factores del producto,* y 2.° *el producto de dos ó mas quebrados es el mismo, cualquiera que sea el órden en que se efectue la multiplicacion.*

Finalmente pueden aplicarse á los quebrados todas las proposiciones establecidas en el n.° 43 sobre los cambios y alteraciones que esperimenta el producto de una multiplicacion ó el cociente de una division, cuando tienen lugar en uno de los términos de la operacion que se quiere efectuar.

CAPITULO III.

De los números complejos.

67. Tanto este capítulo como el siguiente son en cierto modo una ampliacion del segundo, pues no se componen mas que de aplicaciones de la teoría general de los quebrados á aquellos problemas en los cuales se consideran fracciones de una especie particular.

La teoría de los *números complejos* que forma el objeto del presente capítulo, ha perdido sin disputa gran parte de su utilidad desde que se estableció el Sistema decimal de pesos y medidas. Sin embargo nosotros creemos muy oportuno esponerla con tanta estension como en las obras antiguas, pues la consideramos muy á propósito para familiarizar á los jóvenes con el estudio de los quebrados y para poseer á fondo esta práctica en el cálculo, cuya importancia no podrán menos de apreciar con toda exactitud *. Por otra parte la misma complicacion de las operaciones que dicha teoría comprende, será un nuevo motivo para dar á conocer mas latamente las ventajas del nuevo Sistema de pesos y medidas sobre el antiguo.

Hemos visto (n.º 8) que para valuar las cantidades menores que la *unidad principal* se la concibe dividida en cierto número de partes iguales que deberán considerarse como formando nuevas *unidades*. Mas á fin de hacer los cálculos mas cómodos, en vez de dividir la unidad de un golpe en un gran número de partes iguales se la divide primeramente en cierto número, despues se subdivide este en otras partes, y así sucesivamente. Por esta razon en cuanto á las monedas, por ejemplo, se observará que el *peso fuerte*, unidad principal, se divide en

---

* Hay otra razon apoyada en la consideracion de las medidas estranjeras, de la division del tiempo &c.

veinte *reales* y el real en treinta y cuatro *maravedises*. Del mismo modo la unidad de longitud ó *toesa* se divide en seis *pies*, el pie en doce *pulgadas*, la pulgada en doce *líneas* &c.

A continuacion ponemos una tabla de las subdivisiones de estas diversas clases de cantidades *.

PARA LAS MONEDAS.

68. El *peso fuerte* vale 20 *reales*, el real 34 *maravedises*; de donde el peso fuerte vale 34 veces 20 ó 680 maravedises.

Tambien puede decirse que el real es la 20.ª parte del peso fuerte; y el maravedí la 34.ª del real ó la 680.ª del peso fuerte.

PARA LAS LONGITUDES.

La *toesa* vale 2 varas, la *vara* vale 3 *pies*, el pie 12 *pulgadas*, la pulgada 12 *líneas*; de donde la toesa vale 12 veces 6 ó 72 *pulgadas*, 12 veces 72 ó 864 líneas.

O de otro modo, el *pie* es la 6.ª parte de la toesa; la *pulgada* la 12.ª del pie ó la 72.ª de la toesa; la *línea* es la 12.ª de la *pulgada* ó la 864.ª de la toesa.

PARA LAS MEDIDAS ITINERARIAS.

La *legua castellana* vale 6666 $\frac{2}{3}$ varas ó 20000 pies; además se subdivide en *medias*, *cuartos*, *medios cuartos* y *octavos* de legua.

PARA LOS PESOS.

La *libra* vale 2 *marcos*, el marco 8 *onzas*, la onza 8 *dracmas* ú *ochavas*, la dracma 2 *adarmes*, el adarme 3 *tomines*, y el tomin 12 *granos*.

De donde el adarme tiene 36 granos; la dracma 2 adarmes ó 6 tomines ó 72 granos; la onza 8 dracmas ó 16 adarmes ó 48 tomines ó 576 granos; el marco 8 onzas ó 64 dracmas ó 128 adarmes ó 384

---

* Aunque el autor habla aquí de las medidas francesas, nos ha parecido conveniente sustituirles las españolas, reservándonos el hablar de aquellas para cuando tratemos del nuevo sistema decimal. EL TRADUCTOR.

tomines ó 4608 granos; la libra 2 marcos ó 16 onzas ó 128 dracmas ó 256 adarmes ó 768 tomines ó 9216 granos.

Hay mayores unidades de peso, y son la *tonelada* de mar que vale 20 *quintales*, el quiutal 4 *arrobas* y la arroba 25 *libras*.

PARA EL TIEMPO.

El *dia* se divide en 24 *horas*, la hora en 60 *minutos*, el minuto en 60 *segundos*, el segundo en 60 *terceros*.

El año consta de 365 dias (ó de 366 si es *bisiesto*).

Se llama *número complejo* todo número *concreto* (n.° 2) que está descompuesto en muchas partes referidas respectivamente á unidades diferentes, y por el contrario se dice *incomplejo* aquel que solamente se refiere á una especie de unidad.

Así 13 rs. 27 ms., 8 v. 2. p. 10 pulg. 8 l., 41 lib. 1 m. 7 onz. 5 dr. 17 gr..... son números complejos: 8 libras, 17 varas, 23 granos son incomplejos.

69. Daremos principio á la teoría de los números complejos por el análisis de dos operaciones que le son peculiares y que pueden ser consideradas como sirviendo de base á las cuatro operaciones principales.

La primera tiene por objeto, *dado un número complejo, reducirlo un solo número fraccionario de la unidad principal.*

La segunda, *dada* por el contrario *una espresion fraccionaria de una unidad principal, deducir de ella el número complejo que representa.*

1.° *Reducir el número complejo* 8 v. 2 p. 7 pulg. 11 l. *á una sola fraccion de vara.*

Es bien claro que si llegamos á determinar el número de líneas que contiene el número propuesto, bastará dar el número 432 por denominador al resultado, pues que segun la tabla (n.° 68) la línea debe valer $\frac{1}{432}$ de vara.

Reduzcamos, pues, á líneas el número propuesto.

Desde luego, como la vara vale 3 pies, se reducirá á pies 8 v. 2 p.

multiplicando 8 por 3 y añadiendo 2 al producto se tendrá 26 p. por resultado.

Como el pie vale 12 pulgadas, se reducirán á estas los 26 pies y 7 pulgadas, multiplicando 26 por 12 y añadiendo 7 al producto, que da 312 pulg.

Recíprocamente constando cada pulgada de 12 líneas, se reducirán á estas las 312 pulgadas y 11 líneas, multiplicando 312 por 12 y añadiendo 11; el número total de líneas será 3755.

8 v. 2 p. 7 pulg. 11 l.
3
26
12
312
12
3755

Dando al número 3755 el denominador 432, se obtiene $\frac{3755}{432}$ por el número pedido.

Nota.—Obsérvese que en esta operacion nos ha sido indispensable multiplicar dos veces por 12. En general la multiplicacion por el factor 12 es de un uso muy frecuente en la teoría de los números complejos, y por tanto será muy conveniente acostumbrarse á hacer la multiplicacion por dicho número con tanta rapidez como la que se empleara si el multiplicador constase de una sola cifra. Esto se podrá conseguir fácilmente cuidando retener en la memoria la *Tabla de la multiplicacion* (n.° 18) y considerándola estensiva hasta el número 12 inclusive.

El ejemplo que precede bastará para ponerse al corriente en la marcha que deberá seguirse para efectuar la primera operacion.

He aquí en qué consiste: *multiplíquese desde luego el número de unidades principales que contiene el número complejo por el de unidades de mayor subdivision que entran en la unidad principal, y añádanse al producto las unidades de dicha subdivision que se tienen de antemano.*

En seguida *se multiplicará este resultado así obtenido por el número de unidades de la segunda subdivision que contiene la primera, añadiendo al producto el número de unidades de aquella que comprende el número complejo propuesto.*

Continúese así sucesivamente hasta que se haya llegado á la última subdivision.

Llegado que sea á este último resultado, se le dará por denominador el número de unidades de la menor subdivision que contiene la unidad principal, número que se halla comprendido en la tabla (n.° 68).

70. 2.º *Se quiere reducir á número complejo la fraccion* $\frac{615}{23}$ *de toesa.*

Se principiará por dividir 615 por 23, lo cual da por cociente 26 y por resto 17: así podrá decirse que el número propuesto es igual á 26 t. *mas* $\frac{17}{23}$ de toesa. Pero como la toesa vale 6 pies, resulta que $\frac{17}{23}$ de toesa equivale á $\frac{17}{23}$ de 6 pies, es decir (n.º 65), á $\frac{6 \text{ veces } 17}{23}$ ó $\frac{102}{23}$ de pie; y cuantas veces contenga 102 á 23, igual número de pies se obtendrá en el cociente. De donde se deduce que llegado ya al resto 17, para obtener los pies se multiplicará 17 por 6 y se dividirá el producto 102 por 23, y así se obtiene por cociente 4 p. y por resto 10 pulg.: el número propuesto será igual á 26 t. 4 p. *mas* $\frac{10}{23}$ de pie.

$$
\begin{array}{r|l}
615 & 23 \\ \hline
155 & 26\text{t. }4\text{p. }5\text{pul. }2\text{l. }\frac{14}{23} \\
17 & \\
6 & \\ \hline
102 & \\
10 & \\
12 & \\ \hline
120 & \\
5 & \\
12 & \\ \hline
60 & \\
14 &
\end{array}
$$

Razonando sobre este resto como sobre el anterior, se verá que para reducirlo á pulgadas será necesario multiplicarlo por 12 y el producto 120 dividirlo por 23: así se tendrá 5 p. por cociente y 5 pulg. por resto.

Para reducirlo á líneas se multiplicará por 12 el resto 5, se tendrá 60 por producto, se dividirá por 23 y se obtendrá de cociente 2 y un resto 14.

Luego el número propuesto es igual á 26 t. 4 p. 5 pulg. 2 l. $\frac{14}{23}$.

Por lo regular se desprecia la fraccion $\frac{14}{23}$ de línea ó se la estima en muy poco valor. Aquí, por ejemplo, si se obtuviese $\frac{14}{21}$ en lugar de $\frac{14}{23}$, la fraccion equivaldria á $\frac{2}{3}$ de línea.

Pero como el denominador es mayor que 21, resulta que $\frac{14}{23}$ es menor que $\frac{2}{3}$ de línea; así como tambien deberá considerársele mayor que $\frac{1}{2}$ de línea.

REGLA GENERAL.—Para efectuar la segunda operacion *se dividirá el numerador del número fraccionario propuesto por el denominador: así se obtiene un cociente que espresa las unidades principales y algun resto.*

Multiplíquese este resto por el número de unidades de la primera subdivision que contiene la unidad principal, y divídase el producto por el denominador: mediante esta operacion se obtendrá un nuevo cociente que espresa las unidades de la primera subdivision y un nuevo resto.

Repítase la misma operacion, y por tanto multiplíquese el nuevo resto por el número de unidades de la segunda division que contiene la primera, y divídase el producto por el denominador: resultarán por cociente las unidades de la segunda division y un nuevo resto, sobre el cual deberá operarse como sobre los anteriores.

Continúese así sucesivamente hasta llegar á la última *subdivision.*

71. Por lo demás estas dos operaciones se comprueban recíprocamente la una por la otra.

Por ejemplo, para hallar el número complejo que en la primera ha dado lugar al número $\frac{3755}{432}$ se aplicará á este último la regla anterior. Es decir, que se dividirá el numerador 3755 por 432, que es el denominador, procediendo con los restos y los cocientes con arreglo á lo espuesto en dicha regla.

La prueba de la segunda operacion necesita de algunas aclaraciones.

Despues de haber aplicado al número 26 t. 4 p. 5 pulg. 2 l. el procedimiento de la primera operacion, se halla por resultado 23102 l. ó $\frac{23102}{864}$ de toesa, cuyo denominador indica las líneas de que consta una toesa. Pero como en estas 23102 líneas se encuentra unida la fraccion $\frac{14}{23}$ de línea, será necesario multiplicar 23102 por 23 (para reducirlo á la especie de dicho quebrado), y añadir 14 al producto, lo cual da por resultado 531360, número al que deberá dársele por denominador 23 veces 864; mas como es preciso

$$\begin{array}{r}
26 \text{ t. } 4 \text{ p. } 5 \text{ pulg. } 2 \text{ l. } \frac{14}{23} \\
6 \\
\hline
160 \\
12 \\
\hline
1925 \\
12 \\
\hline
23102 \\
23 \\
\hline
69306 \\
46204 \\
14 \\
\hline
531360
\end{array}$$

que $\frac{531360}{23 \text{ veces } 864}$ sea igual á $\frac{615}{23}$, resulta que 531360 debe ser divisible por 864, lo que es bien fácil de conocer: así pues, suprimiendo el factor comun 864 se halla efectivamente $\frac{615}{23}$.

He aquí otro ejemplo de la segunda operacion y su prueba.

Reducir á un número complejo de libras, marcos, onzas, dracmas y granos el número fraccionario $\frac{12870}{365}$ *de libra.*

Operacion.

```
12870 | 365
 1920 |------------------------------------
   95 | 35 lb. 0 m. 4 o. 1 d. 22 gr. 250/365
    2
 ----
  190
    8
 ----
 1520
   60
    8
 ----
  480
  115
   72
 ----
  230
  805
 ----
 8280
  980
  250
```

Prueba.

```
35 lb. 0 m. 4 o. 1 d. 22 gr. 250/365
        2
       --
       70
        8
     ----
      564
        8
     ----
     4513
       72
    -----
     9026
    31591
       22       118609920 | 9216
    ------       26449    |------
    324958        80179   | 12870
       365        64512
   -------          00000
   1624790
  1949748
  974874               12870
       250             -----
 ---------              365
 118609920
```

Despues de haber obtenido en la prueba el número 118609920, que espresa 365 avos de grano, se divide este número por 9216, número de granos que contiene la libra, lo cual da un cociente exacto, que es 12870, y por tanto se vuelve á hallar el número propuesto $\frac{12870}{365}$ de libra.

72. Mediante estas dos reglas preliminares, las cuatro operaciones principales sobre los números complejos pueden referirse á las que han sido tratadas en el capítulo anterior. Y en efecto, cualquiera que sea la operacion propuesta, *se puede reducir desde luego cada uno de los números complejos sobre los que se haya de operar á un solo número fraccionario de la unidad principal*, segun la regla del n.º 69; *se efectua en seguida sobre los números así trasformados la operacion pedida* conforme á las reglas ordinarias del cálculo de los quebrados, y se obtiene por resultado un número fraccionario *que se redujo á*

un número complejo con el auxilio de la regla del n.° 70 : lo cual da por último el resultado inquirido.

Pero este método no es tan sencillo como el que vamos á esponer, en especial para las tres primeras operaciones.

ADICION DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

73. Esta operacion se hace con poca diferencia como la adicion de los números enteros : *se escriben todos los números unos debajo de otros*, de modo que las unidades de una misma especie ó de igual subdivision correspondan á una misma columna, *y se comienza por sumar las unidades de la menor subdivision* : si su suma compone menos de una unidad de la especie inmediata superior, *se escribirá debajo de la columna á que corresponde*; mas si contiene bastante número de unidades para formar una ó muchas de la subdivision inmediata superior, *no se escribe debajo de la columna sino el esceso de la suma sobre el número de unidades de la especie superior que se ha podido estraer*, *reteniendo estas para añadirlas á las de su especie*, *con las cuales deberá operarse del mismo modo.*

PRIMER EJEMPLO.

Se quieren sumar los números

	765 p.	19 rs.	7 ms.
	1279	17	6
	915	13	11
	2594	19	8
	589	8	6
suma.	6145 p.	17 rs.	4 ms.

Sumando los maravedises se encuentran 38 de suma; y como un real tiene 34 , se reservarán los 4 que hay hasta completar los 38, y el esceso 1 se retiene para añadirlo á la columna de los reales.

Pasando á ella y haciendo la suma con el 1 de esceso hallado se tendrá 77, que componen 3 pesos, *mas* 17 reales, los cuales se colocarán bajo su columna correspondiente, y reservando los 3 de esceso se añadirán á la de los pesos, cuya suma es 6145 pesos: así pues, la suma total de los números propuestos es 6145 p. 17 rs. y 4. ms.

SEGUNDO EJEMPLO.

Se quieren sumar	59 lib.	1 m.	7 onz.	6 dr.	46 gr.	167	72
(La unidad principal es la libra.)	47	0	2	7	39	23	2
	87	1	5	3	53		
	37	1	7	5	29		
	232	1	7	7	23		

Haciendo la adicion de los granos se halla por suma 167, que se escribirá al lado como aquí se ve; se divide 167 por 72, número de granos que contiene la dracma, lo cual da por cociente 2 y por resto 23; se coloca 23 debajo de la columna de los granos y se reserva el 2 para incorporarlo á la columna de las dracmas. Hecha esta nueva adicion, resulta por la suma de ellas 23, es decir, 2 veces 8 dracmas ó 2 onzas mas 7 dracmas: se escriben las 7 dracmas y se reserva el 2 para añadirlo á la columna de las onzas, sobre la cual se opera, así como sobre las siguientes, del mismo modo que se ha operado sobre las anteriores.

SUSTRACCION DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

74. Para verificarla *escríbase el número menor debajo del mayor*, de modo que se correspondan las unidades de una misma especie, y *empiécese la operacion por la columna de las unidades de menor subdivision*: si el número inferior de estas unidades puede restarse del superior, *se apuntará el resto debajo*; y si por el contrario no pudiere ser sustraido, *se tomará una unidad de la inmediata subdivision superior, que deberá ser incorporada á la de la columna sobre la cual se está operando, despues de haberla reducido á unidades de su especie*; cuidando, siempre que se haya tomado una unidad, de *disminuir en ella* el número de que se ha tomado.

PRIMER EJEMPLO.

Del número.	327 p.	11 rs.	7 mrs.
se quieren sustraer. . .	189	15	11
resto.	137	15	30
prueba. . . .	327	11	7

Como no pueden sustraerse 11 maravedises de 7, observando la regla anteriormente establecida, tomaremos de la columna inmediata superior *una unidad*, que siendo de la especie de los reales valdrá 34 maravedises, y añadiéndolos á los 7 se tendrá 41; de donde sustrayendo los 11 de la línea inferior se tendrá de residuo 30 maravedises, que se escribirán en su lugar correspondiente.

Pasando inmediatamente á la columna de los reales se tendrá cuidado de recordar que el número de la línea superior se le disminuyó de una unidad en la anterior operacion, y por tanto diremos de 15 á 10; pero como esto no puede ser, se tomará 1 de la inmediata columna superior, que siendo su valor 20 se tendrá 30 en la columna de los reales luego que se haya verificado la incorporacion: en este caso ya se puede hacer la sustraccion, y resultarán 15, que deberán colocarse bajo la columna sobre que se ha operado.

Por último se sustrae 189 de 326 (y no de 327, pues se le ha disminuido de 1 unidad), quedando 137.

Por consiguiente el resto resultante es 137 p. 15 rs. y 30 ms.; lo cual podrá comprobarse bien fácilmente haciendo la suma de este resto y del número menor, y se verá que resulta el número mayor.

SEGUNDO EJEMPLO.

De....................	39 toe.	4 p.	7 pulg.	5 l.
se quieren restar.........	27	5	11	7
	11	4	7	10
	39	4	7	5

Como no se pueden sustraer 7 líneas de 5, se toma 1 pulgada, que vale 12 líneas, y añadiéndola al 5 se tiene 17 líneas: así pues, se dirá de 7 á 17 van 10, que se escribirá bajo la columna de las líneas. En seguida 11 de 6 no pueden restarse: añádasele 1 pie, que vale 12 pulgadas, y será de 11 á 18 van 7.

Pasando á la columna de los *pies* se observa que 5 de 3 no puede sustraerse, y por tanto se tomará de la inmediata columna 1 toesa, que vale 6 pies, en cuyo caso la sustraccion puede verificarse, y se dirá de 5 á 9 van 4.

Por último, restando 27 de 38 (y no de 39, pues se le ha disminuido en 1 unidad) se obtendrá 11; de donde el resto pedido es 11 t. 4 p. 7 pulg. 11 l.

TERCER EJEMPLO.

Una vasija llena de líquido pesa	17 lib.	5 onz.	4 dr.	17 gr.
La tara ó el peso de la vasija vacía es de.	4	7	6	49
Se pide, pues, el peso del líquido.	12	13	5	40
	17	5	4	17

A primera vista se concibe claramente que si se sustrae del peso total de la vasija y del líquido en ella contenido lo que propiamente se llama *tara ó rebaja*, y en este caso el peso solo de la vasija, el resto de esta sustraccion deberá representar por precision el peso del líquido.

Como no se pueden restar 49 de 17, se toma 1 dracma, que vale 72 granos, y sumándolos con los 17 se tendrá 89 granos, de los que sustrayendo 17 resultará por resto 40.

En seguida se dice: 6 de 8 mas 3 ó de 11 quedan 5.

Pasando á las onzas, 7 de 4 no se puede restar; pero como una libra vale 16 onzas, podrá decirse de 7 á 16 mas 4 ó á 20 van 3, que se escribirá bajo la columna de las onzas.

Por último, de 4 á 16 (y no á 17, pues se le ha disminuido en una unidad) van 12.

Luego el peso total del líquido es 12 lib. 13 onz. 5 dr. 40 gr.

MULTIPLICACION DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

Esta operacion, que es mucho mas difícil que las dos anteriores, exige de por sí mucha atencion, y no podrá ser desenvuelta y analizada de un modo claro y exacto sino por medio de ejemplos.

Para mayor claridad distinguiremos dos casos principales: 1.° aquel en que el multiplicando siendo un número complejo, el multiplicador no lo es; y 2.° siendo el multiplicando complejo ó incomplejo, el multiplicador es complejo.

75. Consideremos desde luego el primer caso, es decir, *cuando el multiplicando siendo complejo, el multiplicador es incomplejo ó un número entero cualquiera.*

PRIMER EJEMPLO.

Se quieren multiplicar.	247 p.	17 rs.	11 ms.
Por.	9		
	2230	15	31

Este producto se obtiene *multiplicando todas las partes del multi-*

plicando (principiando por las de menos valor) por el multiplicador y cuidando de retener las unidades de órdenes superiores habidas por los productos de las inferiores.

Así pues, comenzando por la derecha se dirá: 9 veces 11 maravedises son 99; y como 99 maravedises contienen 2 reales, reservaremos estos 2 para incorporarlos ál producto de su especie, y los 31 restantes los colocaremos bajo su correspondiente columna.

Despues de esto diremos: 9 veces 17 reales son 153, mas 2 de reserva 155; pero 155 reales contienen 7 pesos, mas un resto 15; luego reservaremos los 7, y el resto 15 lo inscribiremos en el sitio correspondiente al producto de los reales.

Pasando á la multiplicacion de la especie superior, es decir, de los pesos, tendremos 9 veces 247, mas 7 de reserva, que es igual á 2230 pesos.

Luego el producto de 9 por 247 p. 17 rs. 11 ms. es igual á 2230 p. 15 rs. y 31 ms.

En este ejemplo en que el multiplicador no está espresado mas que por una sola cifra, se ha comenzado por la derecha y determinado sucesivamente los reales compuestos por el producto de los maravedises, y los pesos por el de los reales. Pero si el multiplicador tuviese muchas cifras, no podrán ejecutarse inmediatamente las mismas determinaciones, y por tanto será necesario hacer por separado las multiplicaciones y despues las divisiones para convertir las especies inferiores en las superiores, lo cual deberá exigir mayor cálculo.

En este caso la operacion se hace de un modo mas sencillo, como veremos á continuacion en el ejemplo siguiente:

SEGUNDO EJEMPLO.

Multiplicar el número......	784 p.	15 rs.
por.....	857	
	5488	
	3920	
	6272	
para 10 rs....	428 p.	10 rs.
5......	214	5
	672530 p.	15 rs.

Despues de haber efectuado la multiplicacion de 784 por 857, como regularmente se acostumbra, se pasa á la multiplicacion de 15 reales por 857.

Para obtener desde luego este producto valuado en pesos se observa que si solo se tuviese que multiplicar 1 peso por 857, el producto seria 857 pesos; pero como 15 reales ó $\frac{15}{20}$ de peso no vienen á ser mas que las *tres cuartas* partes de un peso, ó bien descompuestos en 10 reales mas 5 reales son la *mitad* mas el *cuarto*, resulta que el producto pedido se descompone en la *mitad* de 857 y en el *cuarto* de 857, ó lo que es lo mismo, en la *mítad de la mitad* de 857 pesos. Así para la parte 10 reales se dirá: la mitad de 857 pesos es 428 (Véase n.º 31) y resta 1 peso, cuyo valor es 20 reales: la mitad de 20 es 10 rs., y de este modo se obtienen 428 p. 10 rs. por el producto de 10 rs. por 857.

Tomando ahora la mitad de 428 p. 10 rs., se tendrá 214 p. 5 rs. por el producto de 5 rs. por 857.

Rayando estas cantidades por bajo y haciendo su adicion, resultarán 672530 p. y 15 rs. por el producto total de 857 por 784 p. y 15 reales.

Este modo de obtener los productos de las subdivisiones de la unidad principal del multiplicando por el multiplicador se llama *método de las partes alícuotas*, porque consiste en *descomponer los números de unidades de estas subdivisiones en partes alícuotas*, *bien sean de la unidad principal*, *ó respectivamente unas de otras*, es decir (n.º 51), en partes que se hallen contenidas un número exacto de veces las unas en las otras; en cuyo caso para formar un producto correspondiente á una de estas *partes alícuotas*, se tomará de uno de los productos que preceden una parte indicada por el número de veces que la *parte alícuota* en cuestion se halla contenida en la formada por este producto ya obtenido.

TERCER EJEMPLO.

Multiplicar..........	67 toe.	5 p.	6 pulg.	5 l.
por..........	59			
	603 toe.			
	335			
para 3 p......	29	3 p.		
2.......	19	4		
6 p......	4	5	6 p.	
4 l......	0	1	7	8 l.
1.......	0	0	4	11
	4007 toe.	2 p.	6 pulg.	7 l.

Para obtener el producto de 5 pies por 59 se tendrá presente que 5 pies se descomponen en 3 pies, que valen $\frac{1}{2}$ toesa, mas 2 pies, que valen $\frac{1}{3}$ de toesa; y como el producto de 1 toesa por 59 seria

59 toesas, el de 5 pies por 59 se compondria de la mitad de 59 toesas, mas el tercio de 59. Tomando desde luego la mitad de 59 toesas se obtienen 29 y queda 1 toesa, que vale 6 pies, cuya mitad es 3 pies: así pues, el producto de 3 pies por 59 es 29 toe. 3 p. Del mismo modo el *tercio* de 59 es 19 para 57, y quedan 2 toesas, que valen 12 pies, cuya tercera parte será 4 pies: resulta por consiguiente 19 toe. 4 p. para el producto de 2 pies por 59.

Pasando á las pulgadas se observa que 6 pulgadas es la mitad de un pie ó el cuarto de 2 pies: así para obtener el producto de 6 pulgadas por 59 bastará tomar el *cuarto* del producto 19 toe. 4 p.; lo cual da 4 toe. 5 p. 6 pulg.

Ahora bien, 5 líneas se descomponen en 4, mas 1 línea; y como 4 líneas es el *tercio* de una pulgada, la cual verdaderamente es la 6.ª parte de 6 pulgadas, se sigue que 4 líneas es el *tercio* de dicha 6.ª parte ó mas bien la 18.ª de 6 pulgadas; por tanto será necesario tomar la 18.ª de 4 toe. 5 p. 6 pulg., operacion que ciertamente no es muy cómoda; pero bien fácilmente se podrá allanar esta dificultad formando un *producto auxiliar* (que impropiamente se le suele llamar un *producto falso*), á saber, el de 1 pulgada por 59. Este producto, que es la 6.ª parte de 4 toe. 5 p. 6 pulg. ó 0 toe. 4 p. 11 pulg., se le colocará debajo de los otros productos, teniendo mucho cuidado de tildar sus términos, pues que no deberán entrar en la adicion de aquellos: hecho esto, se tomará el *tercio* del producto 0 toe. 4 p. 11 pulg. y se obtendrá para el de 4 líneas por 59 el número 0 toe. 1 p. 7 pulg. 8 l.

Por último, siendo 1 línea el *cuarto* de 4 líneas se tomará la cuarta parte de este último producto, que será 0 toe. 0 p. 4 pulg. 11 l.

Sumando todos estos productos parciales se obtienen por producto total 4007 toe. 2 p. 6 pulg. 7 l.

76. Consideremos ahora el caso *en que el multiplicador es un número complejo*, dando principio con un ejemplo de fácil ejecucion.

Sea el siguiente:

Se quiere saber cuál será el valor total de 4 v. 2 p. 8 pulg. *de un género á razon de* 5 p. 8 rs. y 10 ms. *la vara.*

Aun cuando á primera vista se concibe que el multiplicador puede muy bien ser representado por 4 mas $\frac{2}{3}$ mas $\frac{8}{36}$, no obstante conviene mejor para el cálculo que permanezca en la forma compleja.

Por tanto dispuesta y ejecutada la operacion, será como á continuacion se espresa:

	Valor de una vara.	5 p.	8 rs.	10	ms.
	Número de varas. .	4 v.	2 p.	8	pulg.
Precios.	*Para* 4 v. . .	20	32	40	
	——1 p. . .	1	16	$3 \frac{1}{3}$	
	——1 . . .	1	16	$3 \frac{1}{3}$	
	——6 pulg. .	0	18	$1 \frac{2}{3}$	
	——2 . . .	0	6	$0 \frac{5}{9}$	
		26 p.	9 rs.	$14 \frac{8}{9}$	ms. *valor de* 4 v. 2 p. 8 pulg.

Colocados multiplicando y multiplicador bajo su forma compleja y del modo sabido, se empezará por la derecha procediendo desde luego á determinar el valor de las 4 varas.

Para esto se multiplicarán las 4 varas por el valor de una y se tendrán 20 p. 32 rs. y 40 ms. por el primer producto parcial.

En seguida se pasará á determinar el valor, ó lo que es lo mismo, á valuar los 2 pies; pero como 2 pies no son parte alícuota de una vara, será necesario dividirlos en 2 partes y valuar separadamente cada una de ellas. Ahora bien, como 1 pie es la tercera parte de la vara, tomaremos el *tercio* del multiplicando, y repitiéndole dos veces lo colocaremos debajo del anterior producto parcial.

Por último, pasando á las pulgadas se observará que 8 pulgadas se pueden descomponer en 6 mas 2; pero 6 pulgadas vienen á ser la mitad de un pie: luego para determinar su valor tomaremos la mitad del valor de 1 pie, que se colocará á continuacion de los demás valores. Restan pues que valuar 2 pulgadas, que siendo la tercera parte de 6 pulgadas, se tomará el *tercio* del valor de estas.

Sumando todos estos valores se obtendrá el valor total de las 4 v. 2 p. y 8 pulg., que como bien se ve es 26 p. 9 rs. y $14 \frac{8}{9}$ ms.

Reflexionando sobre los trámites que hemos seguido en el cálculo para llegar al resultado que acabamos de determinar, se concebirá fácilmente que *cuando el multiplicador contiene partes ó subdivisiones de la unidad principal*, el artificio del método consiste muy principalmente en *descomponer las subdivisiones de este factor en* PARTES ALICUOTAS, *bien que sean de la unidad principal, ó por el contrario lo sean las unas de las otras, y en tomar del multiplicando ó de los productos resultantes partes indicadas por las alícuotas.*

Propongámonos, pues, por segundo ejemplo *determinar ó valuar el precio de* 69 toe. 4. p. 11 pulg. *de cierto trabajo, bajo la suposicion de que la toesa vale* 25 lib. tor. 19 s. 5 d. (cada libra tornesa vale 20 sueldos y cada sueldo 12 dineros) *.

	25 lib.	19 s.	5 d.			
	69 toe.	4 p.	11 pulg.			
	225					
	150					
para 10 s.	34	10 s.				
5	17	5				
2	6	18				
2	6	18				
4 d.	1	3				
1	0	5	9 d.			72
3 p.	12	19	8	$\frac{1}{2}$	...36	...36
1	4	6	6	$\frac{5}{6}$	...12	...60
6 pulg....	2	3	3	$\frac{5}{12}$	... 6	...30
3	1	1	7	$\frac{17}{24}$	... 3	...51
1	0	7	2	$\frac{41}{72}$	... 1	...41
1	0	7	2	$\frac{41}{72}$	... 1	...41
	1813 fr.	5 s.	4 d.	$\frac{43}{72}$	259 | 72	43 | 3

* Aun cuando hasta aquí fundándonos en que nuestra traduccion deberá servir muy particularmente á la juventud del pais en que la

Supongamos desde luego como efectuado el producto de 25 lib., 19 s. 5 d. por 69: la suma de estos productos parciales espresará el precio de las 69 toesas.

Ahora bien, para determinar el precio de los 4 p. y 11 pulg. observemos que si una toesa vale 25 lib., 19 s., 5 d., 4 pies ó 3 pies mas 1 pie, es decir, $\frac{3}{6}$ mas $\frac{1}{6}$ de toesa, deberán valer los $\frac{3}{6}$ ó la *mitad* mas el $\frac{1}{6}$, ó el *tercio* de la *mitad* de 25 lib., 19 s. y 5 d.

Por el mismo consiguiente 11 pulgadas descomponiéndose en 6 pulgadas, mas 3 pulgadas, mas 2 pulgadas, ó de otro modo, en $\frac{6}{12}$ mas $\frac{3}{12}$ mas dos veces $\frac{1}{12}$ de pie, deberán costar la *mitad* del precio obtenido para un pie, mas la *mitad* de esta *mitad*, mas *dos* veces el *tercio* de esta nueva mitad. Será por lo tanto necesario formar todos estos productos.

Así pues, haciendo la operacion como queda esplicado tendremos que para 3 pies es preciso tomar la mitad de 25 lib. 19 s. 5 d., lo cual da 12 lib. 19 s. 8 d. y 1 $\frac{1}{2}$.

Para 1 pie, el *tercio* de este producto, y se hallan 4 lib. 6 s. 6 d. $\frac{5}{6}$ (observando que habiendo llegado á los dineros, se obtiene un resto 2, que unido á $\frac{1}{2}$ produce $\frac{5}{2}$; de donde el $\frac{1}{3}$ que se debe tomar, equivale á $\frac{5}{6}$).

---

escribimos, hemos usado de los pesos, medidas y monedas españolas, no obstante nos parece será disimulable el que atendiendo á que en el curso de estos Elementos haremos una esposicion y análisis de los diversos sistemas de pesos, medidas y monedas, y sobre todo á que las mas de las veces el cálculo es mucho mas sencillo y comprensible usando de las medidas francesas, por estar fundado en el sistema decimal, empleemos estas en algunos ejemplos y problemas, sin que por esto dejemos de preferir aquellas, siempre que semejante preferencia no sea causa de interrupcion alguna para el objeto que el autor se proponga llevar á cabo en su obra. EL TRADUCTOR.

Para 6 pulgadas se tomará la mitad del producto anterior, y se tendrán 2 fr. 3 s. 5 d. $\frac{5}{12}$.

Para 3 pulgadas la mitad de este último producto, lo cual da 1 fr. 1 s. 7 d. $\frac{17}{24}$; y por último para 1 pulgada el *tercio* de este, que da 0 fr. 7 s. 2 d. $\frac{41}{72}$, producto que deberá escribirse dos veces.

Obsérvese al hacer la adicion de los productos parciales que siendo el denominador 72 múltiplo de todos los otros, se podrán aplicar á los quebrados en cuestion las simplificaciones de que hablamos en el n.° 48.

Hasta ahora como el multiplicando ha sido espresado por pesos, reales y maravedises (con diferencia del anterior ejemplo en que lo ha sido por francos, sueldos y dineros), el producto ha representado unidades y subdivisiones de la misma especie.

He aquí un tercer ejemplo en el que tanto el multiplicando como el producto espresan toesas, pies y pulgadas.

EJEMPLO.—*Sabiendo que con* 1 *franco se pueden construir* 69 toe. 4 p. 11 pulg., *se desea saber cuánto podrá construirse con* 25 fr. 19 s. 5 d.

Bien claro es que para obtener el número de toesas pedido se necesita multiplicar 69 toe. 4 p. 11 pulg. por 25 francos y por las subdivisiones de franco que contiene el enunciado; porque si con 1 franco se han podido construir 69 toe. 4 p. 11 pulg. resulta que con 19 sueldos ó $\frac{19}{20}$ de franco se podrán construir los $\frac{19}{20}$ de 69 toe. 4 p. 11 pulg., es decir, los $\frac{10}{20}$ ó la mitad mas los $\frac{5}{20}$ ó la mitad de la mitad mas &c.

En este nuevo ejemplo nos limitaremos á presentar una tabla de los cálculos de esta multiplicacion.

	69 toe.	4 p.	11 pulg.			
	25 fr.	19 s.	5 d.			
	345 toe.					
	138					
para 3	12	3 p.				
1..	4	1				
6 pulg. .	2	0	6 pulg.			
3..	1	0	3			
2..	0	4	2			
10 s. . . .	34	5	5	6 l.		
5..	17	2	8	9		| 20
2..	6	5	10	8	$\frac{2}{5}$....4.....8	
2..	6	5	10	8	$\frac{2}{5}$....4.....8	
4..	1	0	11	9	$\frac{2}{5}$....4.....8	
1..	0	1	8	11	$\frac{7}{20}$....1.....7	
						31 | 20
						11 | 1
	1813 toe.	1 p.	7 pulg.	4 l.	$\frac{11}{20}$	

77. Nota.—Observemos que en este último ejemplo los dos factores de la multiplicacion son los mismos que los del anterior, y sin embargo se han obtenido dos resultados diferentes, ya que no con respecto al número entero que en ellos entra, al menos en órden á la especie de la unidad principal y á la de las subdivisiones de esta unidad. Así el principio del n.º 25, mediante el cual *puede invertirse el órden de los factores de un producto, sin que varíe el resultado*, no tiene lugar mas que con respecto á los números abstractos.

Para hacerlo aplicable al caso en que entren en la multiplicacion ambos factores complejos, seria necesario concebir cada uno de estos números reducidos (n.º 69) á un solo número fraccionario de la unidad principal que le corresponde; en cuyo caso los dos números que se obtendrian invirtiendo el órden de los factores serian iguales, haciendo abstraccion siempre de la naturaleza de la unidad principal, la cual deberá ser diferente en ambos productos. Así es efectivamente, pues segun la definicion de la multiplicacion, siempre que se consideren números concretos, *el producto y el multiplicando deben ser de la misma naturaleza*; entre tanto que el multiplicador, aun cuando puede ser espresado por un número concreto, debe considerársele en la operacion como número abstracto que designa cuántas veces deberá repetirse el multiplicando, ó qué parte deberá tomarse. Por tanto cuando haya que efectuar una multiplicacion, se tendrá cuidado de determinar cuál de los dos factores deberá tomarse por multiplicando, lo cual es bien fácil, pues que debe ser de la misma especie que el producto, y la especie de este se halla indicada por el enunciado de la cuestion.

78. La prueba natural de la multiplicacion se hace por la division; pero es mucho mas sencillo, á causa de las fracciones complicadas que contiene muy á menudo el producto, *duplicar el multiplicando y tomar la mitad del multiplicador*, y viceversa. Aconsejamos á los principiantes reflexionen detenidamente y repitan por sí mismos los ejemplos anteriormente citados, haciendo las pruebas segun el método que acabamos de esplicar.

A continuacion esponemos nuevos ejemplos sobre los cuales podrán ejercitarse.

1.° *Valuar el precio de* 35 lib. 1 m. 5 onz. 4 dr. 48 gr. *de cierta mercadería á razon de* 23 lib. tor. 17 s. 3 ds.

Resultado: 855 lib. tor. 8 s. 10 d. $\frac{63}{64}$.

2.° *Cuánto valen* 18 lib. 0 m. 6 onz. 4 ad. *de cualquier género, suponiendo que el marco vale* 51 p. 15 rs. 5 ms.

Resultado: 190 p. 14 rs. 0 $\frac{3}{32}$ ms.

3.° *Valiendo el marco de plata* 167 rs. $\frac{3}{11}$*, *se quiere saber cuál será el valor de* 36 lib. 6 onz. 9 ad.

* En el ejemplo que tenemos á la vista el valor espresado en reales se refiere al que deberá tener el marco de plata, conocida su *ley*. Así pues, en este caso la *ley de plata* es 11 d. 12 gr. 6 276 gr., es decir, que constando el marco de 276 gr. de plata pura, como el valor de un grano de plata pura es la fraccion $\frac{20}{33}$ de real, el de 276 gr.

Resultado: 12180 rs. 28 $\frac{43}{44}$ ms.

4.º *Multiplicar* 31 lib. 17 s. 9 d. por 15 lib. 11 s. 5 d.

Resultado: 496 lib. 10 s. 3 d. $\frac{47}{80}$.

Al tratar del *capítulo* VII tendremos que resolver problemas que sean susceptibles de dar lugar á la última operacion.

DIVISION DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

Al dividir números complejos pueden ocurrir dos casos principales: 1.º *cuando dividendo y divisor son de naturaleza diferente*; y 2.º *cuando ambos son de igual naturaleza.*

79. Primer caso.—Cuando el dividendo y divisor son de naturaleza diferente.

En este caso pueden tener lugar dos circunstancias, á saber, ó el divisor es incomplejo, ó es complejo.

1.º Si el divisor es incomplejo, *se le deberá considerar como abstracto y efectuar la division del dividendo por el divisor, reduciendo el cociente á unidades principales y subdivisiones de la misma naturaleza del dividendo.*

2.º Si el divisor es complejo, *se le convertirá* (n.º 69) *en un solo número fraccionario de su unidad principal; se multiplicará el dividendo por el denominador del quebrado divisor y se dividirá el producto hallado por el numerador, reduciendo siempre el cociente en unidades principales y subdivisiones de la naturaleza del dividendo.*

PRIMER EJEMPLO.

Se quiere saber cuál será el precio de una toesa de fortificacion

---

será 276 multiplicado por $\frac{20}{33}$, cuyo producto es $\frac{5520}{33}$, lo cual es igual á 167 rs. $\frac{9}{33}$, y simplificando el quebrado, á 167 rs. $\frac{3}{11}$: luego 167 rs. $\frac{3}{11}$ es en el ejemplo presente el valor de un marco de plata pura: conocido ya este dato, bien fácilmente se procede á determinar el valor de 36 lib. 6 onz. 9 ad. El traductor.

bajo el supuesto de que 568 *toesas han costado* 25469 lib. 19 s. *y* 11 d.

25469 fr. 19 s. 11 d.	568
2749	44 lib. 16 s. 9 d.
477	
20	
9559	
3879	
471	
12	
5663	
551	

Conocido el precio de una toesa, es claro que multiplicándolo por el número total de toesas 568, el producto deberia ser 25469 lib. 19 s. 11 d.: luego para la resolucion de este caso será necesario dividir 568 por la cantidad espresada.

Despues de haber dividido 25469 por 568, cuya operacion da 44 lib. por cociente y 447 por resto, se reduce este resto á sueldos multiplicándolo por 20 y añadiendo al producto los 19 s. del dividendo, y se tendrá 9599, que deberá dividirse por 568: resultan por cociente 16 s. y por resto 471 s., que se multiplica por 12 y se le añaden los 11 dineros del dividendo para reducirlo á su especie: hecha esta operacion, se obtienen 5663 d., que se dividirán por el dividendo y se tendrá 9 d. por cociente y por resto 551: de donde se infiere fácilmente que el cociente total ó el precio de una toesa es

$$44 \text{ lib. } 16 \text{ s. } 9 \text{ d. } \frac{551}{568}.$$

SEGUNDO EJEMPLO.

Se han comprado 258 lib. 1 m. 7. onz. 5 gr. *de cierta mercadería por la suma de* 3259 lib. tor. 17 s. 10 d.: *se pregunta cuál es el precio de cada libra.*

Desde luego se ve que siendo conocido el precio de una libra, si se le multiplica por 258 lib. 1 m. 7 onz. 5 gr., el producto deberá ser 3259 lib. tor. 17 s. 10 d.: así pues, será necesario dividir el primer número por el segundo.

```
        3259 lib. 17 s. 10 d.          258 lib. 1 m. 7 onz. 5 gr.
         128                                 2
        ------                            -----
        26072                              517
        6518                                 8
        3259                              -----
Para 10 s. . .   64                       4143
     5. . . .    32                          8
     2. . . .    12   16                  -----
     6. . . .     3    4                  33149
     3. . . .     1   12
     1. . . .     0   10   8
        -------------------------
        417266 lib. 2 s. 8 d. | 33149
         85776                |---------------
         19478                | 12 lib. 11 s. 9 d.
            20
        ------
        389562
         58072
         24923
            12
        ------
        299084
           743
```

Despues de haber reducido el divisor á un solo número fraccionario segun la regla del n.° 69, se halla por este divisor $\frac{33149}{128}$, pues que (n.° 68) la dracma es la 128.ª parte de la libra; mas para dividir 3259 lib. 17 s. 10 d. por $\frac{33149}{128}$ es necesario (n.° 62) multiplicar el dividendo por el denomidador 128, lo cual da, como se ve en la tabla de operaciones, 417266 lib. 2 s. 8 d., y dividir este producto por el numerador 33149: esta última operacion es de la misma especie que la correspondiente al anterior ejemplo, y mediante ella resultan 12 lib. 11 s. 9 d. $\frac{743}{33149}$ por el precio pedido.

Estos ejemplos bastarán á nuestro parecer para ponerse al corriente de la marcha que deberá seguirse, siempre que la division pertenezca al caso en que dividendo y divisor son de naturaleza diferente.

80. Segundo caso.—Si dividendo y divisor son de la misma natu-

raleza, *se reducirán* (n.° 69) *los números á unidades de la menor de las subdivisiones que encierran, y se efectuará la division del primer resultado por el segundo, espresando* segun la regla del n.° 70 *el cociente en un número complejo de la naturaleza indicada por el enunciado de la cuestion.*

Los ejemplos siguientes aclararán esta regla.

PRIMER EJEMPLO.

La toesa de cierta obra ha costado 47 lib. 19 s. 5 d.: *se quiere saber el número de toesas que podrá hacerse con* 278 lib. 17 s. 10 d.

Desde luego se ve que si se conociese el número de toesas pedido, multiplicándolo por el precio de una toesa, ó lo que es lo mismo, por 47 lib. 19 s. 5 d., se tendria 2728 lib. 17 s. 10 d., y por lo tanto será necesario dividir 2728 lib. 17 s. 10 d. por 47 lib. 19 s. 5 d.

2728 fr. 17 s. 10 d.	47 lib. 19. s. 5 d.	654934	11513
20	20	79284	
		10206	56 t. 5 p. 3 pul. 9 l.
54577	959	6	
12	12		
		61236	
654934	11513	3671	
		12	
		44052	
		9513	
		12	
		114156	
	resto. . . .	10539	

Reducidos á la especie de dineros los dos números propuestos, se halla que el primero es igual á $\frac{654934}{240}$ de libra y el segundo á $\frac{11513}{240}$ de libra. Así para dividir el primer número por el segundo es necesario (n.° 62) invertir los términos del quebrado divisor, lo cual da $\frac{240}{11513}$, y multiplicar $\frac{654934}{240}$ por $\frac{240}{11513}$; mas entrando el factor 240 á la vez en el producto de los numeradores y denominadores, puede suprimírsele, y resultan $\frac{654934}{11513}$; y por tanto todo se reduce á dividir 654934 por 11513, lo cual está conforme con lo establecido en la regla anteriormente esplicada.

No daremos detalle alguno sobre esta division, que se efectua como aquí se ve, segun la regla del n.º 70, y solamente advertiremos que segun el enunciado del problema el número fraccionario $\frac{654934}{11513}$ debe ser valuado en toesas, pies, pulgadas &c...

Por tanto el resultado pedido es 56 toe. 5 p. 3 pulg. 9 l. $\frac{10539}{11513}$.

SEGUNDO EJEMPLO.

Se ha pagado 1 lib. por 15 toe. 4 p. 7 pulg. *de cierta obra y se pregunta qué suma será necesaria para* 329 toe. 5 p. 11 pulg. 8 l.

Si se conociese la suma pedida, multiplicando 15 toe. 4 p. 7 pulg. por ella, se deberia tener 329 toe. 5 p...; ó de otro modo, cuantas veces 329 toe. 5 p... contengan á 15 toe. 4 p. 7 pulg., otras tantas libras, sueldos y dineros deberá pagarse.

De donde se infiere que se deben dividir los dos números dados uno por otro y el cociente espresará en libras, sueldos y dineros la suma pedida.

329 toe. 5 p. 11 pul. 8 l.	15 toe. 4 p. 7 pul.	285116	13620
6	6	12716	20 lib. 18 s. 8 d.
		20	
1979	94		
12	12	254320	
		118120	
23759	1135	9160	
12	12	12	
285116	13620	109920	
		960	

Despues de haber reducido los dos números á líneas (porque la línea es la menor de las subdivisiones), se halla que el primero equivale á $\frac{285116}{864}$ de toesa y el segundo á $\frac{13620}{864}$ de toesa, de donde resulta, multiplicando el primer quebrado por el segundo, invertidos los términos, $\frac{285116}{13620}$; y reduciendo este número fraccionario en un número complejo de franco, se obtendrá por el cociente pedido 20 lib. 18 s. 8 d. $\frac{960}{13620}$ ó $\frac{16}{227}$.

Nota.—Si uno de los términos de la division fuese incomplejo, seria necesario reducir los dos números á las unidades de la menor subdivision que se halle en el otro.

81. Observacion.—Siempre que el dividendo y divisor son de la misma naturaleza con relacion á la unidad principal, *el solo enunciado de la cuestion* indica cuál debe ser la naturaleza de la unidad principal del cociente. Pero cuando dividendo y divisor son de naturaleza diferente, *el cociente debe ser de la misma naturaleza del dividendo*, pues que siendo este un producto, debe ser (n.° 77) de igual especie que uno de sus factores.

82. La prueba de la division puede efectuarse por la multiplicacion; pero es mas sencillo duplicar los dos términos, ó tomar la mitad y efectuar sobre los dos números así modificados una nueva division: el cociente debe ser el mismo (n.° 43) que el anterior.

He aquí nuevas aplicaciones:

1.° *Habiendo costado* 60 p. 8 rs. 14 ms. *una pieza de paño á razon de* 3 p. 4 rs. 20 ms. *la vara, se pregunta cuántas varas tenia la pieza.*

Resultado: 18 v. 2 p. 1 pulg. $\frac{33}{61}$.

2.° *Dividir* 859 lib. 11 s. 7 d. *por* 89 toe. 4 p. 7 pulg. 10 l.

Resultado: 9 lib. 11 s. 5 d. $\frac{36617}{38783}$.

3.° *Dividir* 1347 toe. 1 p. 7 pulg. *por* 9 toe. 5 p. 7 pulg. 10 l., *debiendo estar espresado el cociente en libras, sueldos y dineros.*

Resultado: 135 lib. 10 s. 2 d. $\frac{466}{859}$.

CAPITULO IV.

De las fracciones ó quebrados decimales y del nuevo sistema de pesos y medidas.

§ I. De las fracciones ó quebrados decimales.

— 83. De todos los modos que hay de subdividir la unidad principal, el mas sencillo y el mas cómodo para el cálculo sin disputa alguna es la *subdivision en partes sucesivamente menores de diez en diez*. De este modo resultan *quebrados que tienen por denominador la unidad seguida de uno ó de muchos ceros*, por cuya razon se les llama *fracciones decimales*.

Este modo de subdividir la unidad ofrece muchas ventajas por lo que es en sí mismo, ó al menos porque mediante trasformaciones sumamente fáciles las operaciones sobre los números fraccionarios quedan reducidas á simples operaciones sobre los números enteros. Esto es, pues, lo que vamos á desenvolver y analizar, luego que hayamos dado á conocer la numeracion de las fracciones decimales, es decir, su nomenclatura y el modo de espresarlas en cifras.

Así como duplicando sucesivamente la unidad se forman nuevas unidades á las cuales se les ha dado el nombre de *decenas*, *centenas*, *miles*, *decenas de millar* &c., del mismo modo se ha concebido la unidad dividida en 10 partes iguales llamadas *décimas*, cada décima en otras 10 partes iguales tambien llamadas *centésimas* (porque la unidad principal contiene 10 veces 10 ó 100 de estas nuevas partes); en seguida la centésima en 10 partes llamadas *milésimas*, cada milésima en igual número, nombradas *diezmilésimas*, y así sucesivamente se prosigue esta subdivision, que da por su órden *cienmilésimas*, *millonésimas*, *diezmillonésimas* &c.

Por otra parte resulta (n.º 5) con arreglo al principio fundamental de la numeracion escrita de los números enteros que las cifras, contando de derecha á izquierda, tienen *valores relativos* que aumentan sucesivamente de diez en diez, y viceversa si se cuenta de izquierda á derecha, representan valores que disminuyen de diez en diez. De donde se sigue que si á la derecha de un número ya escrito se escriben nuevas cifras, cuidando distinguirlas del número entero por un signo cualquiera, v. g. una coma, se tendrá representado partes de la unidad sucesivamente menores de diez en diez, esto es, *décimas*, *centésimas*, *milésimas* &c...

Así el conjunto de las cifras 24, 75 espresará 24 unidades, 7 *décimas* y 5 *centésimas*; 5, 478 representará 5 unidades, 4 *décimas*, 7 *centésimas* y 8 *milésimas*.

84. *Propongámonos enunciar en lenguaje vulgar el número representado por cifras*..... 563506.

Con arreglo á lo ya establecido diremos al enunciarlo: 56 *unidades*, 3 *décimas*, 5 *centésimas*, 0 *milésimas* y 6 *diezmilésimas*; pero si observamos que 3 *décimas* valen 30 *centésimas* ó 300 *milésimas* ó 3000 *diezmilésimas*, y 5 *centésimas* valen 50 *milésimas* ó 500 *diezmilésimas*, veremos que el número total enunciado será 56 *unidades*, 3506 *diezmilésimas*, es decir, que para enunciar en lenguaje comun un número fraccionario decimal escrito en cifras *es necesario enunciar separadamente la parte de forma entera, que es la que se halla á la izquierda de la coma, y despues la que está á la derecha como si espresase un número entero, añadiendo al fin de ella la denominacion de la última subdivision decimal.*

Así pues, el número representado por 7, 49305 espresa 7 *unidades*, mas 49305 *cienmilésimas*. Del mismo modo, 249,007056 espresa 249 *unidades*, mas 7056 *millonésimas*.

Tambien pueden comprenderse en el enunciado la parte entera y la decimal. Efectivamente, propongámonos de nuevo, por ejemplo, el número 56, 3506: como una unidad vale 10 décimas, ó 100 centésimas, 1000 milésimas, 10000 diezmilésimas, resulta que 56 unidades equivalen á 560000 *diezmilésimas*, y por consiguiente 56,3506 representa 563506 *diezmilésimas*; por el mismo estilo, 7 unidades valiendo 700000 *cienmilésimas*, el número 7,49305 equivale á 749305 *cienmilésimas*, es decir, que *basta, despues de haber enunciado el número como si no hubiese coma alguna, añadir al fin la denominacion* de la última subdivision. No obstante está mas en uso enunciar la parte entera por separado *.

---

* En adelante usaremos otro medio de enunciar la parte decimal, por ser mucho mas cómodo en la práctica, y es el siguiente: despues de haber enunciado la parte entera como se ha dicho, *se dividirá mentalmente la parte decimal en periodos de tres cifras empezando des-*

Recíprocamente, *se quiere escribir en cifras una fraccion decimal enunciada en lenguaje comun.*

Sea, pues, el número *veintinueve* unidades, *trescientas cincuenta y cuatro* milésimas. Escríbase desde luego la parte entera 29; en seguida, como 300 milésimas equivalen á 3 *décimas* y 50 milésimas componen 5 *centésimas*, se colocará una coma á la derecha de 29, y despues se escribirán las cifras 3, 5 y 4, teniendo 29,354 por el número enunciado. Por la misma razon *ciento nueve* unidades, *dos mil tres* diez milésimas se escribirán de este modo: 109,2003.

Propongámonos escribir el número 8 unidades 37 milésimas.

Como 30 milésimas componen 3 centésimas y en el enunciado no hay décimas, se escribirá 8,037; esto es, que se deberá poner un *cero* á la derecha de la coma para anotar el lugar de las décimas que faltan, y dar de este modo á las cifras siguientes su verdadero valor.

Regla general.—Para escribir por medio de cifras un número decimal enunciado en lenguaje comun *se comenzará por escribir la parte de forma entera, colocando á su derecha una coma, y despues partiendo desde esta se escribirán sucesivamente las cifras que representen las décimas, centésimas* &c. *que contiene el enunciado, cuidando reemplazar con ceros los diferentes órdenes que puedan faltar.*

Si no hay parte entera alguna, es decir, si el número propuesto es una fraccion propiamente dicha, *se escribirá un* 0 para reemplazar el lugar de los enteros, y en seguida *se operará como acabamos de decir.* Así diez y siete *centésimas* estarán bien representadas por 0,17; ciento *veinticinco diez milésimas por* 0,0125; doce mil doscientas cuatro *millonésimas* por 0,012204.

Finalmente, cuando en el enunciado del número no se distingue el entero de la fraccion, es mas fácil escribirlo en cifras.

En este caso *es necesario escribir el número como si espresase unidades enteras, y en seguida colocar una coma de tal modo que la última cifra de la derecha esprese unidades de la última subdivision que contiene el enunciado.*

Por ejemplo, para escribir el número cuatro mil doscientas catorce *centésimas* se pondrá 4214; y como la última cifra debe espresar centésimas, se colocará la coma entre 2 y 1, lo cual da 42, 14.

---

de la coma (pudiendo ser el último tan solo de *una ó dos* cifras) y hecho esto, se enunciará cada periodo separadamente, *añadiendo al fin de cada enunciado parcial la denominacion de la unidad que espresa la última cifra de cada periodo.*

Ejemplo.—El número 2,74986329 se enunciará así: 2 *unidades*, 749 *milésimas* 863 *millonésimas* 29 *cienmillonésimas.*

Otro.—El número 14,0230000764 se enuncia de este modo: 14 *unidades* 23 *milésimas* 0 *millonésimas* 76 *billonésimas* 4 *diezbillonésimas.*

Del mismo modo doscientas tres mil veintinueve *diez milésimas* se espresarán por 25,3029, y así de otros números.

85. Por lo que hasta aquí llevamos esplicado podrá reconocerse la gran ventaja que presenta este modo de escribir las fracciones decimales.

Una fraccion se compone regularmente de dos números colocados uno debajo de otro, que son el numerador y el denominador.

En esta clase de quebrados la coma basta para indicar el denominador, *que es igual á la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales contiene el quebrado*, esto es, como cifras hay á la derecha de la coma.

En cuanto al numerador, *se compone del conjunto de cifras que se hallan á la derecha de la coma*; ó bien si se considera el entero reducido á la fraccion, equivale al *número propuesto*, *haciendo abstraccion de la coma.*

Así el número 23,5037 puesto bajo la forma de quebrado se reduce á $23\frac{5037}{10000}$ ó $\frac{235037}{10000}$; el número 2,00409 es igual á $2\frac{409}{100000}$ ó $\frac{200409}{100000}$; y por último, 0,0002154 equivale á $\frac{2154}{10000000}$.

Y recíprocamente, $2\frac{53}{1000}$ ó $\frac{2053}{1000}$ se convierte en 2,053; $\frac{172049}{10000}$ en 17,2049.

Estas trasformaciones de quebrados decimales en los ordinarios, y viceversa, son de un uso muy frecuente en el cálculo.

86. Resulta pues de lo que acabamos de decir, que *si en una fraccion decimal se adelanta la coma uno ó muchos lugares hácia la derecha*, *queda multiplicado el número por* 10, 100, 1000... &c; y por el contrario *atrasándola del mismo modo hácia la izquierda*, *se divide el número por* 10, 100, 1000...

Sea, por ejemplo, *el número* 153,07295, *y supongamos que se adelanta la coma* 3 *lugares hácia la derecha*, lo cual da 153072,95: en este caso el número se le ha hecho 1000 veces mayor. En efecto, el número primitivo equivale á $\frac{15307295}{100000}$; y tan luego como la coma se ha quitado de su lugar, resulta $\frac{15307295}{100}$, fraccion cuyo denominador es 1000 veces menor que el de la otra; de donde (n.º 45) la segunda fraccion es 1000 veces mayor que la propuesta.

Por el contrario, si la coma se atrasa 2 lugares hácia la izquierda, se obtiene 1,5307295 ó $\frac{15307295}{10000000}$, fraccion cuyo denominador es 100 veces mayor que la propuesta $\frac{15307295}{100000}$, y por tanto la nueva fraccion es 100 veces menor que la anterior.

Tambien puede demostrarse esto observando que por la variacion de lugar de la coma *el valor relativo* de cada cifra se hace 10, 100, 1000 &c. veces mayor ó menor. Así comparando 15307295 con 153,07295 se ve que la cifra 3, que antes espresaba unidades simples, ahora espresa *unidades de millar*; la cifra 5 á la izquierda del 3, que espresaba decenas, representa ahora *decenas de millar*, y así sucesivamente de otras cifras.

87. *Colocando un número cualquiera de ceros á la derecha de una fraccion decimal, el valor de ella no se altera.*

Así pues, 3,415 equivale á 3,4150 ó 3,41500 ó 3,415000...: en efecto, estos números pueden (n.° 82) ponerse bajo la forma $\frac{3415}{1000}$, $\frac{34150}{1000}$, $\frac{341500}{100000}$...., y por tanto las dos últimas fracciones no vienen á ser otra cosa mas que la primera, cuyos dos términos se han multiplicado por 10, 100, lo que no cambia su valor (n.° 46).

O de otro modo, puede observarse que los ceros colocados á la derecha de las cifras ya escritas no mudan el *valor relativo*; y como estos ceros no tienen valor alguno por sí mismos, la fraccion permanece la misma.

Esta última trasformacion sirve para *reducir los quebrados decimales á un comun denominador*. Por ejemplo, los quebrados 12,407 | 0,25 | 7,0456 | 23,4 se reducen á 12,4070 | 0,2500 | 7,0456 | 23,4000, y bajo esta forma el denominador comun de ellas debe ser por precision 10000.

Establecidas ya estas nociones preliminares, pasemos á tratar de las operaciones sobre los quebrados decimales.

88. ADICION Y SUSTRACCION.—La adicion de los quebrados decimales se efectua del mismo modo que la de los números enteros; *cuidando, luego que esten reducidos á un comun denominador, separar con una coma en el resultado tantas cifras decimales como habia en el de los números contenidos en el todo.*

Un solo ejemplo bastará para aclarar esta regla.

Se quieren sumar los números 32,4056 | 245,379 | 12,0476 | 9,38 | y 459,2375.

Colóquese desde luego *un* 0 á la derecha del segundo número, y *dos* á la derecha del cuarto; en seguida se escribirán los números propuestos unos debajo de otros, de modo que las unidades de un mismo órden se correspondan, y despues se pasará á hacer la adicion como ordinariamente.

De este modo se halla por resultado 7584497, ó separando 4 cifras decimales hácia la derecha, 758,4497, porque los números sumados espresan unidades del órden de *diez milésimas.*

En la práctica se puede dispensar el escribir ceros á la derecha de los dos números que tienen menos cifras decimales, con tal que se tenga buen cuidado de *colocar las unidades de igual órden bajo una misma columna.*

32,4056
245,3790
12,0476
9,3800
459,2375
758,4497

La sustraccion se efectua del mismo modo que la de los números enteros, *luego que se hayan reducido los quebrados decimales á un comun denominador* (n.º 87).

Por ejemplo, *se quieren sustraer* 23,0784 de 62,09.

Escríbanse dos ceros á la derecha de 62,09, lo cual da 62,0900 y pásese á efectuar la sustraccion como si fuesen números enteros, cuidando separar en el resto hallado 4 cifras decimales contadas de derecha á izquierda.

Estos procedimientos se fundan en que teniendo las unidades en diversos órdenes en las fracciones decimales las mismas relaciones entre sí que en los números enteros, se debe seguir la misma marcha en cuanto á las reservas y unidades que se tomen, como si se operase sobre aquellos.

62,0900	
23,0784	
39,0116	
62,0900	*prueba.*

89. Multiplicacion de fracciones ó quebrados decimales.—Para efectuar esta operacion *se multiplicarán uno por otro los dos números propuestos sin hacer caso alguno de la coma*, cuidando, luego que se haya obtenido el producto total, *separar en él contando de derecha á izquierda igual número de cifras decimales al que haya en ambos factores.*

Ejemplo.—*Se quieren multiplicar* 35,407 *por* 12,54.

Para hacernos cargo del procedimiento que acabamos de esponer, bastará observar que los dos números propuestos pueden presentarse bajo la forma $\frac{35407}{1000}$ y $\frac{1254}{100}$.

35,407
12,54
141628
177035
70814
35407
444,00378

Para multiplicar dos quebrados uno por otro es necesario (n.º 59) *multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador*; pero los numeradores no son otra cosa que los números propuestos, haciendo abstraccion de la coma; luego será indispensable multiplicar estos dos números entre sí, lo cual como ya hemos visto da 44400378. En segundo lugar el denominador que deberá tener este producto equivale á 100000, es decir, á la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales hay en ambos factores, por cuyo producto será preciso dividirlo; pero esto equivale á separar en el número hallado 5 cifras decimales: luego la multiplicacion de los quebrados decimales se verifica multiplicando entre sí los dos números propuestos y separando con una coma en el producto tantas cifras decimales como hay en ambos factores contando de derecha á izquierda.

De otro modo: suprimiendo la coma en el multiplicando se le multiplica evidentemente por 1000, pues que antes espresaba *milésimas* y ahora espresa unidades principales; por lo tanto, con arreglo á los principios demostrados (n.º 43) se le ha hecho al producto mediante esta variacion 1000 veces mayor: por la misma razon, como quitando la coma en el multiplicador, se le hace 100 veces mayor, resulta que al producto se le ha hecho 100000 veces mayor, y para volverlo á su primitivo valor es necesario dividirlo por 100000, ó lo que viene á ser lo mismo, separar 5 cifras decimales de la derecha. Luego &c.

El razonamiento deberá ser análogo al que acabamos de hacer, cualquiera que sea el número de cifras decimales que contengan los factores de la multiplicacion.

Puede acontecer que tan solo uno de los factores contenga cifras decimales: en este caso es bien claro que en el producto *solo se separará el número de cifras correspondiente al que dicho factor contenga.* La demostracion es muy fácil, y por eso no nos detendremos en ponerla en práctica.

Conforme á estas reglas hallaremos que

1.º el producto de 4,0567 por 9,503 es igual á 38,5508201;
2.º el producto de 4,0015 por 29 es 16,0435;
3.º el producto de 0,03054 por 0,023 es 0,00070242.

Nota.—Este último ejemplo merece paremos un poco la atencion sobre él. Haciendo abstraccion de la coma en ambos factores y efectuando la multiplicacion, resulta 70242; pero como hay *cinco* cifras decimales en el multiplicando y *tres* en el multiplicador, se necesita haya *ocho* en el producto, cuando él de por sí no contiene mas que *cinco* cifras ó caracteres numéricos. Para allanar esta dificultad obsérvese que debiendo espresar el producto unidades del 8.º órden decimal, bastará escribir á la izquierda de 70242 un número de ceros suficiente para que colocando la coma despues de ellos la última cifra 2 ocupe la 8.ª nota decimal. En este ejemplo serán *cuatro* los ceros que deberán escribirse, contando con el que deberá ocupar el lugar de los enteros, y resultará 0,00070242.

90. Division de los quebrados decimales.—Esta operacion no ofrece mayormente dificultad alguna, y *para efectuarla se empezará por reducir los dos números propuestos á un comun denominador* (n.º 87); *en seguida se ejecutará la division, haciendo abstraccion de la coma: el resultado será el cociente pedido.*

Ejemplo.—*Quiérense dividir* 43,047 *por* 2,53698.

Colocados dividendo y divisor en su debida forma, se escribirán dos ceros á la derecha de aquel, despues de lo cual se procederá á efectuar la division como si fuesen números enteros: efectuada que sea, el resultado nos dará el verdadero cociente, que es $16\frac{245532}{253698}$.

$$\begin{array}{r|l} 4304700 & 253698 \\ \cline{2-2} 1767720 & 16 \\ 245532 & \end{array}$$

Así es efectivamente, pues tan luego como se hayan añadido los dos ceros á la derecha del dividendo, ambos números se podrán poner bajo la forma siguiente: $\frac{4304700}{100000}$ y $\frac{253698}{100000}$. Luego para dividir el primero por el segundo se deberá (n.º 62) multiplicar el quebrado dividendo por el quebrado divisor, invertidos sus términos. Observando que 100000 es factor comun á ambos términos, se tendrá el resultado $\frac{4304700}{253698}$, es decir, *que es necesario efectuar la division sobre ambos números considerados sin coma alguna, despues de haber hecho que haya igual número de cifras decimales en uno que en otro.*

Tambien puede decirse que reducidas ambas fracciones á un comun denominador, si se suprime la coma en ambos términos, tanto el dividendo como el divisor quedan aumentados en cierto número, y el cociente sin embargo permanece el mismo (n.º 43).

Mediante este procedimiento hallaremos que el cociente de la division de 3,4703 por 0,027 es $128\frac{143}{270}$.

$$\begin{array}{r|l} 34703 & 270 \\ \cline{2-2} 770 & 128 \\ 2303 & \\ 143 & \end{array}$$

Del mismo modo el de 0,596 por 0,00201 es $296\frac{104}{201}$.

91. En los ejemplos anteriores se ha obtenido con mucha facilidad la parte entera del cociente de la division; pero no sucede así con las fracciones que sirven de complemento á dicha parte entera, las cuales constando de unos términos muy crecidos, son bien difíciles de valuar. Por consiguiente será muy oportuno indagar un medio de espresar estas fracciones en partes mas pequeñas de la unidad principal, por ejemplo, en *décimas*, *centésimas*, *milésimas* &c...

Propongámonos, pues, este nuevo problema general:

Dada una fraccion cualquiera de la unidad principal de cierta naturaleza, valuarla en decimales, ó bien *reducirla á una fraccion decimal.*

Ejemplo.—*Se quiere valuar la fraccion* $\frac{13}{47}$.

El número propuesto referido á la unidad principal espresa los $\frac{13}{47}$ de dicha unidad; pero como una unidad simple vale 10 *décimas*, resulta que $\frac{13}{47}$ equivalen á $\frac{130}{47}$ de *décima*; luego que esten dispuestos

$$\begin{array}{r|l} 130 & 47 \\ \cline{2-2} 360 & 0{,}27659 \\ 310 & \\ 280 & \\ 450 & \\ 27 & \end{array}$$

los números 13 y 47 como para efectuar la division, si se coloca un *cero* con su coma en el cociente para reemplazar el lugar de los enteros, y se divide 130 por 47, el cociente 2 así obtenido y escrito á la derecha de la coma representa el número de *décimas* contenidas en $\frac{13}{47}$; es decir, que $\frac{13}{47}$ es igual á 2 *décimas* mas $\frac{36}{47}$ de *décima*. Por la misma razon como 1 décima vale 10 centésimas, se sigue que $\frac{36}{47}$ de *décima* es igual á $\frac{360}{47}$ de *centésima*, ó efectuando esta nueva division, á 7 *centésimas* mas $\frac{31}{47}$ de *centésima*.

Escribiendo otro 0 á la derecha de 31 y dividiendo 310 por 47, se obtienen por cociente 6 *milésimas*, que se escribirán á la derecha de las cifras anteriores, y por resto 28, á cuyo lado se pone un 0 para hallar las *diezmilésimas*, y así sucesivamente.

Continuando la operacion hasta que se hayan obtenido 5 cifras decimales, se halla que $\frac{13}{47}$ equivalen á 0,27659 mas $\frac{27}{47}$ de *cienmilésimas*, fraccion que por su pequeñez puede muy bien despreciarse; en cuyo caso podremos decir que 0,27659 es el valor de $\frac{13}{47}$ *con la diferencia de una cienmilésima próximamente*, considerando que la fraccion despreciada no llega á valer una unidad de dicho órden.

En general, para reducir un quebrado á fraccion decimal *se dispondrán sus dos términos como para efectuar una division, y en el lugar del cociente se pondrá un 0 con una coma á su derecha*: *hecho esto, se añadirá un 0 al numerador, y el número resultante se dividirá por el denominador*: *de este modo se obtiene un cociente que espresa las* DECIMAS *y cierto resto. Colóquese en seguida un 0 á la dere-*

cha de este resto y divídase por el denominador: resultará un cociente que espresa centésimas y un nuevo resto. Operando sobre este resto como sobre los anteriores, se obtendrá un cociente que deberá espresar milésimas y un resto, sobre el cual deberá operarse del mismo modo. Continúese así la operacion hasta que haya en el cociente el número de cifras decimales que se quieran obtener, ó mas bien, el que el problema exija. Si la division no es exacta, esto es, que hay un resto, podrá despreciarse ó estimarlo en poco, pues la fraccion obtenida solo difiere de la propuesta en *una cantidad menor que la unidad del último órden decimal hallado en el cociente.*

Si el numerador de la fraccion es mayor que el denominador, *se comenzará por sacar los enteros*, que deberán colocarse en el cociente con una coma á su derecha para distinguirlos de las cifras decimales.

Bien fácil es echar de ver la gran analogía que existe entre esta operacion y la que tiene por objeto reducir un número fraccionario de cualquier unidad principal á un número complejo, es decir, á unidades principales y subdivisiones de dicha unidad (Véase n.º 70).

Vamos, pues, á hacer la aplicacion de esta regla á los ejemplos de division de que nos hemos ocupado en el número anterior.

Ejemplo.—*Dividir* 43,047 *por* 2,53698 *y valuar el cociente en menos de* $\frac{1}{1000}$ *con corta diferencia.*

4304700	253698
1767720	16,967
2453320	
1720380	
1981920	
206034	

Despues de haber hallado como anteriormente el cociente 16 con el resto 245332, se considera á este resto como numerador de un quebrado cuyo denominador es 253698, y á su derecha se añade un 0: hecho esto, se le dividirá por 253698, y tendremos 9 *décimas* por cociente y 172038 por resto: añádasele del mismo modo un 0 y dividiendo el resultado 250698 se obtendrán por cociente 6 *centésimas* y un nuevo resto 198192, el que aumentado como los anteriores en un 0 se dividirá por el mismo divisor, y el resultado será 7 *milésimas* de cociente y un resto que se desprecia.

Hecha la operacion, se tendrá por resultado el cociente 16,967 *menos* $\frac{1}{1000}$ *con corta diferencia*, pues que la cantidad despreciada no es mas que una fraccion de *milésima.*

Así tambien se hallará por el cociente de 0,596 dividido por 0,00201, 296, 51 *menos* 0,01 *aproximadamente.*

Igualmente se tendrá por el cociente de la division de 3,4703 por 0,027, 128, 5296 *menos* 0,0001 *con corta diferencia.*

En el *capítulo* V nos ocuparemos de nuevo y mas estensamente sobre la reduccion ó conversion de un quebrado en una fraccion decimal, pues que esta operacion presenta muchas y muy notables propiedades que por ahora no podemos desenvolver y analizar con toda la estension que se merecen.

92. Cuando al efectuar la division el divisor es un número entero ó contiene menos cifras decimales que el dividendo, en lugar de escribir ceros á su derecha para reducirlo al mismo denominador que este, es mucho mas conveniente operar del modo que á continuacion esponemos.

Ejemplo 1.º—*Dividir* 437,4825 *por* 56.

Pudiendo en este caso considerarse la division como si tuviese por objeto tomar la 56.ª parte del dividendo, se empezará desde luego tomando la 56.ª de 437, ó de otro modo, dividiendo 437 por 56, operacion que da por cociente 7 unidades y por resto 45, el cual seguido de las 4 *décimas* del dividendo compone 454 *décimas*, de la que se deberá tomar la 56.ª, esto es, dividir 454 por 56: el resultado da 8 *décimas* por cociente, que se escribirán á la derecha de las 7 unidades, interponiendo una coma para distinguirlas de los enteros.

437,4825	56
454	7,8121
68	
122	
105	
49	

El resto 6 seguido de las 8 *centésimas* forma 68 *centésimas*, cuya 56.ª parte es 1 *centésima* y un resto 12, el que aumentado de las 2 *milésimas* del cociente compone 122 *milésimas*: dividiendo 122 por 56 se tendrá por cociente 2 *milésimas* y por resto 10: bájese á su lado la cifra 5 y divídase el resultado 105 por 56: este último cociente será 1 *diezmilésima*: de donde el cociente pedido es 7,8121.

Este cociente no es exacto mas que hasta las *diezmilésimas*; pero si se quisiese obtener mayor grado de aproximacion, bastaria añadir un 0 al último resto y continuar la operacion por los mismos trámites observados en la regla del n.º 91.

Bien fácil es de conocer que este modo de operar es mucho mas sencillo que si se añadiesen desde luego 4 ceros á la derecha del divisor para reducirlo al mismo denominador que el dividendo.

Del mismo modo se hallará que 14,37586 dividido por 219 da por cociente 0,06564 menos 0,00001 con corta diferencia.

Ejemplo 2.º—*Dividir* 3,40567 *por* 0,039.

Obsérvese que con arreglo á los principios demostrados en los números 43 y 66 pueden multiplicarse dividendo y divisor por un mismo número sin que el cociente sufra la menor alteracion.

3405,67	39
285	87,32
126	
97	
19	

Supuesto esto, si se multiplica el divisor por 1000, lo cual equivale (n.º 86) á suprimir la coma, y el dividendo tambien por 1000, lo que (segun el mismo número) se consigue adelantando la coma *tres* lugares hácia la derecha, la cuestion quedará reducida á dividir 3405,67 por 39, operacion que en su esencia se reduce á la precedente.

Regla general.—Siempre que el dividendo contenga *mas* cifras decimales que el divisor, *se suprimirá en este la coma adelantándola* en aquel *tantos lugares como cifras decimales habia en el divisor*: hecho esto, *se efectuará la division* como en el caso en que tan solo el dividendo contiene cifras decimales.

Por una razon análoga, si el divisor es un número entero terminado por *uno ó muchos* ceros, podrán suprimirse estos con tal que se atrase la coma en el dividendo tantos lugares como ceros se han suprimido en el divisor.

Así por ejemplo, dividir 234,15 por 8900 equivale á dividir 2,3415 por 89, pues que no se ha practicado otra cosa que hacer á ambos términos de la division 100 veces menores.

Por lo demás, nosotros no hemos establecido estas reglas mas que como medios sencillos de operar en la práctica; en el supuesto de ser la regla espuesta anteriormente en el n.º 90 aplicable á todos los casos.

93. He aquí nuevas aplicaciones:

Determinar: 1.º *el cociente* de 21,234 *por* 59,37469 *valuado en* 0,001 *próximamente*.

Resultado: 0,357.

2.º *El cociente de* 294 por 7,356 *valuado en* 0,0001 *próximamente*.

Resultado: 39,9673.

3.º El cociente de 0,004736 *por* 0,034 *valuado en* 0,00001 *poco mas ó menos*.

Resultado: 0,13929.

En este sistema de operaciones se sigue respecto á las pruebas la misma marcha que en los números enteros, es decir, que la prueba de la division se hace por la multiplicacion, y viceversa.

§ II. Nuevo sistema de pesos y medidas.

Nos hallamos, pues, ya en el caso de reconocer y apreciar en su verdadero valor las muchas ventajas que presenta el cálculo de las fracciones decimales sobre el de los quebrados comunes, cualquiera que sea su especie, y juzgar cuán útil seria establecer un nuevo Sistema de pesos y medidas íntimamente conexo al Sistema decimal. Los sabios, han llevado á cabo tan interesante empresa mediante no pocos esfuerzos y á pesar de los obstáculos que han ocasionado la ignorancia y las preocupaciones. Comencemos en primer lugar dando á conocer la nomenclatura de este Sistema.

MEDIDAS LINEALES Ó DE LONGITUD.

94. La unidad de medida á la cual se le ha dado el nombre de METRO es la *diezmillonésima parte* de la distancia del polo al ecuador, contada sobre el meridiano de París.

Despues de las operaciones ejecutadas y verificadas con la mayor precision y exactitud, se ha reconocido que *el metro* valuado en pies, pulgadas, líneas &c. *vale* 3 p. 0 pulg. 11 l., 296 con corta diferencia de $\frac{1}{1000}$.

Para designar medidas mayores ó menores que el metro se ha convenido en emplear las palabras sacadas del griego y latin

MIRIA, KILO, HECTO, DECA, DECI, CENTI, MILLI,

que significan

diez mil, *mil*, *ciento*, *diez*, *décima de*, *centésima de*, *milésima de*,

y que deben colocarse al principio de la palabra *metro*.

De este modo se ha formado la tabla que á continuacion ponemos

Miriámetro	ó medida de	diez mil metros.
Quilómetro *	....	mil metros.
Hectómetro	....	cien metros.
Decámetro	....	diez metros.
METRO	....	*unidad* principal.
Decímetro	....	décima de metro.
Centímetro	....	centésima de metro.
Milímetro	....	milésima de metro.

NOTA.—El miriámetro y el quilómetro son las medidas itinerarias actualmente adoptadas: el miriámetro es un poco mayor que el duplo de la legua de 2500 toesas: el quilómetro es algo mayor que la *quinta parte*, ó bien, algo mayor que el *cuarto* de legua de *posta* ó de 2000 toesas.

MEDIDAS DE SUPERFICIE **.

95. La unidad natural de las superficies es el *metro cuadrado*; pero cuando se trata de grandes superficies agrarias, se toma por unidad un *decámetro cuadrado*, esto es, un cuadrado que tiene por lado un *decámetro* ó *diez metros*: á esta unidad se le llama AREA.

* Aun cuando la palabra *Kilo* queda escrita mas arriba con *K* por ser de orígen griego, con todo en su aplicacion usamos de la *Q* por estar aquella letra suprimida en la ortografía castellana, conformándonos en esto con lo que dispone la Academia española. EL TRADUCTOR.

** Para la completa inteligencia de ciertos términos y espresiones de que habremos de servirnos en el curso de la nomenclatura de las nuevas medidas, nos parece conveniente remitir á nuestros lectores á la Geometría.

Los múltiplos del área se designan por medio de las voces *myria*, *kilo*, *hecto*,..... empleadas en el n.º 94: así se tendrá que la

Miriárea	significa	diez mil áreas.
Quilárea	....	mil áreas.
Hectárea	....	cien áreas.
Decárea	....	diez áreas.
Area	....	*unidad* principal.
Deciárea	....	décima de área.
Centiárea	....	centésima de área.
Miliárea	....	milésima de área.

Nota.—La miriárea, hectárea, área y centiárea son las únicas medidas que estan en uso: la hectárea sustituye al *arpent* del cual viene á formar cerca del duplo, y la centiárea no es otra cosa que el *metro cuadrado*.

MEDIDAS CUBICAS.

96. La unidad de solidez es el METRO CUBICO; es un cubo (cuya forma es la de un dado de jugar) que tiene por lado un metro. Los múltiplos y submúltiplos del *metro cúbico* no han recibido por lo comun denominacion alguna particular, y sin embargo la 1000.ª del metro cúbico se enuncia diciendo *decímetro cúbico*, porque efectivamente es un cubo que tiene por lado un *decímetro*; la 1000000.ª del metro cúbico se enuncia por un *centímetro cúbico*, pues que es un cubo que tiene un centímetro por lado &c...

Cuando las medidas cúbicas se aplican á la madera que sirve para combustion y construccion, la unidad principal ó el *metro cúbico* recibe el nombre de ESTERIO (*stère*). A este le sigue el *decasterio*, medida de diez esterios. El esterio viene á ser con poca diferencia el *demi-voie* antiguo: así el *decasterio* vale cerca de cinco *voies* ó cargas.

MEDIDAS DE CAPACIDAD PARA LIQUIDOS Y GRANOS.

97. La unidad actual de capacidad es el *decímetro cúbico* que se llama LITRO. Para los múltiplos y submúltiplos decimales se hace uso principalmente del

Hectólitro ó medida de	cien litros.
Decálitro	diez litros.
Litro	*unidad* principal.
Decílitro	décima de litro.
Centílitro	centésima de litro.

Nota.—El litro sustituye á la *pinta* para las bebidas y al *litron* para los granos, con la diferencia de ser un poco mayor que ellos.

El *decálitro* reemplaza al *boisseau* para la medida del trigo y de toda clase de granos, y el hectólitro al *setier*.

Tambien se le emplea para valuar las pipas de vino ó de cualquier otro líquido.

El *quilólitro*, que tiene la capacidad de un metro cúbico, y el *miriálitro* apenas se usan.

DE LOS PESOS.

98. La unidad de peso actual es el peso de un *centímetro cúbico* de agua destilada en su máximo de densidad, al que se le ha dado el nombre de GRAMO.

Su valor en pesos antiguos es 18,82715 granos, esto es, algo mas que *un cuarto de dracma*.

He aquí la tabla de los múltiplos y submúltiplos decimales:

Miriágramo	vale	diez mil gramos.
Quilógramo	....	mil gramos.
Hectógramo	....	cien gramos.
Decágramo	....	diez gramos.
GRAMO	....	*unidad* principal.
Decígramo	....	décima de gramo.
Centígramo	....	centésima de gramo
Milígramo	....	milésima de gramo.

NOTA.—El quilógramo siendo mil veces mayor que el gramo, que como ya hemos dicho es igual á 18,82715 granos, equivale á 18827,15 granos; y constando la *libra* (n.º 65) de 9216 granos, resulta que tambien equivaldrá al doble de ella poco mas; y por tanto medio quilógramo puede muy bien sustituir á la libra antigua *.

* Los sabios á quienes se debe el Sistema decimal de pesos y medidas, tuvieron en un principio la idea de tomar por *unidad* de peso la de un decímetro cúbico de agua destilada, por la razon de que siendo este peso correspondiente al *quilógramo* actual era muy acomodado para reemplazar la unidad antigua ó la *libra*, de la que es casi el doble y le dieron el nombre de *grave*, no sin llegar á reconocer bien pronto los inconvenientes que siguen.

1.º Los múltiplos del grave eran el *decágrave*, *hectógrave*, *quilógrave y miriágrave*, de donde el peso de un decágrave era igual á 20 libras, y los demás múltiplos eran muy superiores á los pesos empleados en las artes y el comercio.

DE LAS MONEDAS.

99. La nueva unidad para las monedas es el FRANCO. Para obtenerlo se han pesado *cinco granos* de un riel que contenia 9 *décimas* de plata pura y una de amalgama; al valor de esta parte del riel se le ha llamado *franco*. Por una casualidad se ha reconocido tener este con poca diferencia el mismo valor que la *libra tornesa*. No obstante hay una diferencia de $\frac{1}{80}$ en favor del franco, esto es, que un franco vale $1\frac{1}{80}$ lib. tor. ó $\frac{81}{80}$ de libra, ó lo que es lo mismo, 80 francos valen 81 libras tornesas.

La décima de un franco se denomina *décimo* y la centésima *céntimo*. En cuanto á sus múltiplos decimales no se ha creido conveniente darle denominacion alguna.

100. CONCLUSION.—Tal es la esposicion de la nomenclatura de las nuevas medidas: y ahora vamos á ver las muchas ventajas que el nuevo Sistema ofrece sobre el antiguo.

1.°—Es uniforme y sencillo, pues siguiendo las unidades principales y sus subdivisiones entre sí la ley del Sistema decimal de numeracion, su cálculo, cualquiera que sea, es muy fácil.

2.°—Es fijo, invariable y susceptible de ser adoptado en todos los paises, pues no es peculiar á clima alguno, ni á ninguna nacion.

Todas estas medidas provienen de una medida primitiva, *el metro*, que se ha tomado de las mismas dimensiones del globo terrestre. Las monedas que parecen á primera vista no ofrecer relacion alguna con dicha medida, la tienen sin embargo indirectamente, pues hemos visto que el marco es el valor de *cinco gramos* de plata mezclada y

---

2.° Los submúltiplos eran el *decígrave*, *centígrave* y *milígrave*. Como este último no es mas que el *gramo* actual, equivale á cerca de 19 granos, y es por consiguiente muy superior á los que se emplean en los pesos algo delicados, de modo que se veian obligados á establecer nuevas subdivisiones, tales como el *diezmilígrave*, *cienmilígrave*, *cientomilionígrave*. Y ciertamente los sabios habian aplicado un nombre particular al *milígrave* y formado una unidad secundaria llamada *gravet*, de la que formaban el *decigravet*, *centigravet* y *miligravet*. De este modo quedaba destruida la regularidad de la nomenclatura, cuando la nuevamente establecida no ofrece tales inconvenientes y comprende cuantos pesos se necesitan en el uso comun.

que el gramo es el peso de un centímetro cúbico de agua destilada.

101. La aplicacion de las cuatro reglas de la Aritmética al nuevo Sistema de pesos y medidas no ofrece dificultad alguna, atendiendo á lo que ya hemos dicho sobre las fracciones decimales, y por tanto no nos detendremos mucho sobre el particular. Pero daremos á conocer dos problemas cuya importancia será fácil de reconocer, pues no damos por enteramente abolido el antiguo Sistema. No consistia, pues, toda la dificultad en sustituir un nuevo Sistema al antiguo, sino que tambien era indispensable permaneciese la misma proporcion entre el precio y la cantidad de los objetos valuados en los dos Sistemas.

El siguiente problema aclarará lo que acabamos de decir.

Habiendo vendido un mercader francés la ana de paño á 36 lib. tor. 17 s. 6 d., *se quiere saber cuál será proporcionalmente el valor en francos de un metro del mismo género.*

Este problema quedará definitivamente resuelto tan luego como se halle por un lado el valor de 36 lib. 7 s. 6 d. en *francos*, *décimos*, *céntimos*, lo cual dará el precio de la ana en francos, y por otro lado el valor del metro en anas, pues que este último indicará la parte que deberá tomarse del precio de la ana reducido en francos para tener el del metro.

Por consiguiente será necesario resolver estos dos problemas.

1.° *Espresar el valor de un número complejo del antiguo Sistema por medio de la unidad análoga y de las subdivisiones decimales de esta unidad, consideradas en el nuevo Sistema.*

2.° Y recíprocamente, *espresar cierto número de unidades principales del nuevo Sistema y de subdivisiones de esta unidad por medio de la unidad análoga y de las subdivisiones comunes de la misma unidad consideradas en el antiguo Sistema.*

Trataremos, pues, sucesivamente de estos dos problemas mirados con relacion *á las monedas*, *medidas de longitud y á los pesos*, por ser las medidas mas usuales, y con esto bastará para saber la marcha que deberá seguirse con otras especies de medidas.

102. Comencemos por las monedas.

1.° *Se quiere determinar el valor de* 245 lib. 19 s. 7 d. en francos, décimos y céntimos.

Hemos dicho (n.° 99) que un franco vale $\frac{1}{80}$ mas que la libra; es así que $\frac{1}{80}$ compone $\frac{20}{80}$ ó $\frac{1}{4}$ de *sueldo*, esto es, 3 dineros; luego un franco vale 1 lib. 0 s. 3 d. ó 243 *dineros*.

Por otra parte 245 lib. 19 s. 7 d. reducidos á dineros dan por resultado 59035 dineros, como aquí se ve. Por consiguiente si se busca cuántas veces 59035 dineros contienen á 43 dineros, ó si se divide 59035 por 43, el cociente valuado en decimales (n.º 91) espresará el número pedido de francos, décimos, céntimos. Este cociente valuado hasta las *milésimas* es 242 fr., 942: así 245 lib. 19 s. 7 d. equivalen á 242 fr. 94 cs. con la diferencia de un *céntimo* aproximadamente.

$$\begin{array}{l}
245 \text{ lib. } 19 \text{ s. } 7 \text{ d.}\\
\quad 20\\
\hline
4919\\
\quad 12\\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
59035 & 243\\
\hline
1043 & 242{,}942\\
\;\;715 & \\
\;\;\;2290 & \\
\;\;\;\;1030 & \\
\;\;\;\;\;580 & \\
\;\;\;\;\;\;94 &
\end{array}$$

De donde se ve que *para valuar en francos, décimos y céntimos cierto número de libras, sueldos y dineros, es necesario, despues de haber reducido á dineros el número propuesto, dividir el número resultante de dineros por* 243 (que espresa en dineros el valor de 1 franco), *y en seguida valuar el cociente en decimales*, llevando la operacion hasta las centésimas.

La prueba de esta última operacion se hace por el problema contrario, como vamos á ver.

2.º *Se pide en libras, sueldos y dineros el valor de* 242 fr. 94 cs., *ó mas bien de* 242,942 fr. (Consideramos aquí los milésimos de franco para que la comprobacion sea mas completa.)

Supuesto que 1 franco vale 1 libra mas $\frac{1}{80}$ de libra, 242,942 fr. valdrán 242,942 lib. mas $\frac{1}{80}$ de 242,942 lib., y por tanto será preciso tomar la 80.ª parte de este último número y añadírsela, lo cual dará en *libras y fraccion decimal* de libra el valor de 242,942 fr. Hecho esto, no quedará mas que valuar la fraccion decimal en sueldos y dineros.

Para hallar la 80.ª de 242,942 bastará tomar la 8.ª, que da 30,36775, y dividir este resultado por 10, ó bien (n.º 86) atrasar la coma un lugar hácia la izquierda; y se tendrá 3,036775, que sumado con 242,942 da 245 lib., 978775.

Para valuar la fraccion 0 lib. 978775 en *sueldos*, es necesario (n.º 70) multiplicarla por 20, lo cual da 19 s. 575500, y para valuar 0 s. 575500 en dineros se la multiplicará por 12, y tendremos 7 dineros *mas* $\frac{1}{10}$ *de dinero próximamente*; de donde 242,942 fr. equivalen á 245 lib. 19 s. 7 d.

$$\begin{array}{rl}
242, & 942\\
3, & 036775\\
\hline
245 \text{ lib.}, & 978775\\
 & 20\\
\hline
19 \text{ s.}, & 575500\\
 & 12\\
\hline
6 \text{ d.}, & 906000\\
\hline
245 \text{ lib.}, & 19 \text{ s. } 7 \text{ d.}
\end{array}$$

REGLA GENERAL.—*Para valuar en libras, sueldos y dineros cierto número de francos, décimos y céntimos se escribirá desde luego el número propuesto y debajo de él su* 80.ª *parte* (que se obtiene tomando la 8.ª y atrasando la coma un lugar hácia la izquierda) *sumando ambos números*, con cuya operacion se obtiene el número propuesto espresado en *libras* y *una fraccion de libra.*

Multiplíquese en seguida por 20 *la fraccion decimal* (haciendo abstraccion del entero que representa las *libras*), y la parte entera del producto representará los *sueldos.*

Por último, *multiplíquese por* 12 *la fraccion decimal resultante*, y la parte entera del producto espresará los *dineros.* La parte decimal que en este caso resulte podrá despreciarse, á no ser que la cifra de los décimos sea igual ó mayor que 5: entonces podrá aumentarse en *uno* el número de dineros.

Apliquemos, pues, ambas reglas al siguiente ejemplo:

Se pide en francos, décimos y céntimos el valor de 3179 lib. 17 s. 8 d.

Habiendo ya dado la esplicacion en los ejemplos anteriores, en este nos limitaremos á presentar la tabla de los cálculos.

Primer problema.

3179 lib. 17 s. 8 d.	
20	
63597	
12	
763172	243
341	
987	3140,625
1520	
620	
1340	
125	

Resultado: 3140 fr. 63 cs.

Segundo problema.

3140	,625
39	,2578125
3179 lib.	,8828125
	20
17 s.	,6562500
	12
7 d.	,8750000

Resultado: 3179 lib. 17 s. 8 d.

NOTA.—En el primer problema como la cifra de las milésimas es 5 y está seguida de otras muchas, se ha tomado por resultado 3140 fr. 63 cs., porque en este caso el error cometido *en mas* es menor que el que se cometiese *en menos* si se despreciase la cifra 5 y las siguientes.

En el segundo el entero del último resultado es 7 dineros, y no obstante se han tomado 8, porque la cifra de los *décimos* es 8, número mayor que 5.

Del mismo modo se hallará que 56275 fr. 97 cs. equivalen á 56979 lib. 8 s. 5 d., y recíprocamente.

MEDIDAS LINEALES.

103. Antes de pasar á la resolucion de los dos problemas del n.° 101, es indispensable buscar el valor de la toesa en metro, y viceversa; es decir, *espresar la unidad lineal antigua en medidas nuevas*, y recíprocamente *la nueva unidad lineal en medidas antiguas.*

Sabemos que la toesa vale 864 líneas y que el metro equivale (n.° 94) á 3 p. 0 pulg. 11,296 l., ó reduciendo á líneas á 443,296 líneas. Luego si se divide 864 por 443,296, ó mas bien 864000 por 243296, el cociente reducido á decimales espresará el valor de la toesa estimado en metro.

Hecho el cálculo, resulta que *la toesa equivale á* 1,949036 m., esto es, á 1 *metro* 949 *milímetros*, con la diferencia de un *diezmilímetro* aproximadamente.

Por el mismo consiguiente, si se divide 443,296 por 864 segun la regla del n.° 92, se obtendrá el valor del metro en toesa y fraccion decimal de toesa.

Efectuando este nuevo cálculo, se ve que *el metro equivale en toesa* á 0,5130740 de toesa, casi con 0,0000001 de diferencia.

Consecuencia.—El miriámetro siendo igual á 10000 metros, vale 10000 veces 0,5130740 de toesa ó 5130,740 toesas, lo que quiere decir que el *miriámetro* es un poco mayor que el duplo de la legua de 2500 toesas, como ya lo dijimos en el n.° 94.

Supuesto esto, 1.° *se pide en metros, decímetros, centímetros &c., el valor de* 17 toe. 5 p. 4 pulg. 8 l.

Comiéncese por reducir este número á líneas, lo cual da 15464 líneas, *y divídase* 15464 por 443,296 (número de líneas que contiene el metro), ó bien 15464000 por 443296; y se tendrá por cociente 34,88414 con la diferencia de 0,00001 aproximadamente.

Luego 17 toe. 5 p. 4 pulg. 8 l. equivalen á 34,88414 m., esto es, á 34 *metros* 884 *milímetros*, *un milímetro* poco mas ó menos.

2.° *Se pide el valor de* 34,88414 m. *en toesas, pies, pulgadas y líneas.*

Como 1 metro vale en toesa 0,513074, resulta que *para tener el valor de* 34,88414 *bastará multiplicar* 0,513074 *de toesa por* 34,88414, y el producto que se obtenga espresará en toesas y fraccion decimal de toesa el valor pedido: hecho esto, no habrá mas *que convertir la fraccion decimal resultante en pies, pulgadas y líneas.*

He aquí la tabla del cálculo:

Prefiérase 34,88414 para multiplicando, porque la operacion es muy sencilla.

Hecha la multiplicacion, se obtienen 17,898 toe. por producto, despreciando las 8 últimas cifras decimales.

Para reducir la fraccion de toesa 0,898 á pies se la multiplicará por 6, y se tendrán 5,388 pies.

Multiplicando 0,388 por 12 para hallar las pulgadas se obtienen 4,656 pulg.

Finalmente, multiplicando 0,656 por 12 para obtener las líneas se halla 7,872 l. ó simplemente 8 *líneas*; de donde se ve que 34,88414 m. equivalen á 17 toe. 5 p. 4 pulg. 8 l., lo cual comprueba la primera operacion.

Nota.—En esta última operacion se han despreciado las 8 últimas cifras decimales del producto, luego que se han querido valuar en pies, pulgadas y líneas.

$$
\begin{array}{r}
34{,}88414 \\
0{,}513074 \\
\hline
13953656 \\
24418898 \\
10465242 \\
3488414 \\
17442070 \\
\hline
17 \text{ toe.},8981 4524636
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
6 \\
\hline
5 \text{ p. } 388 \\
12 \\
\hline
4 \text{ pulg.}, 656 \\
12 \\
\hline
7 \text{ l.}, 872
\end{array}
$$

La razon de esto es bien clara, pues se sabe que multiplicar sucesivamente un número cualquiera por 6,12 y 12 equivale (n.° 26) á multiplicarlo por el producto de estos tres números ó por 864, y por consiguiente si no se quieren considerar mas que 10000.as en el producto 17,89814,... el último resultado será exacto en $\frac{864}{1000}$ poco menos, esto es, en menos de una línea aproximadamente. Esta observacion abrevia mucho cálculo.

Propongámonos ahora valuar en metros y fraccion decimal la marca de un hombre de 5 p. 6 pulg. 7 l.

Para ello no habrá mas que reducir á líneas, y se tendrán 799 líneas, que divididas por 443,296 (líneas que tiene un metro) ó 799000 por 443296, dan por cociente 1,802 m. con la diferencia de 1 milímetro.

PARA LOS TEJIDOS.

104. Se sabe que la ana vale 3 p. 8 pulg. ó 44 pulgadas, es decir, 528 líneas; luego dividiendo 528 por 443,296 ó 528000 por 443296 se tendrá el valor de la ana en metro.

Efectuando esta division se halla que la *ana tiene por valor* 1 m. 191 milímetros, ó con mas exactitud 1,191077 m.

Y recíprocamente, 443,296 dividido por 528 da por cociente

0,839576 con $\frac{1}{1000000}$ de diferencia; de donde 1 *metro equivale á* 0,839576 *de ana.*

Se quiere saber cuál será el valor de 29 $\frac{7}{12}$ *anas en metros y fraccion decimal de metro.*

Así como para la toesa y sus subdivisiones, podrán *reducirse las* 27 $\frac{7}{12}$ *anas* á 12 c.os *de línea multiplicando* 29 $\frac{7}{12}$ ó $\frac{355}{12}$ *por* 528, *número de líneas que contiene la ana, reducir al mismo tiempo el metro ó* 443,296 l. *tambien á* 12 c.os *de línea multiplicándole por* 12, *dividir los dos resultados así obtenidos uno por otro y valuar el cociente en decimales.*

Pero es mas sencillo operar como á continuacion se ve.

Siendo la espresion de la vara en metro 1,191077 m. como ya hemos visto, se multiplicará desde luego este número por 29, lo cual da los dos productos 10,719693 y 23,821540.

Despues de esto descomponiendo los $\frac{7}{12}$ en $\frac{6}{12}$ y $\frac{1}{12}$, se tomará por $\frac{6}{12}$ la mitad de 1,191077, que es 0,595538, y se escribirá debajo de los productos ya obtenidos; y despues por $\frac{1}{12}$ la 6.ª de 0,595538, que es 0,099256, y se coloca debajo de los productos anteriores. Sumando todos los productos se obtienen por resultado 35,236027.

$$
\begin{array}{lr}
 & 1,191077 \\
 & 29\frac{7}{12} \\
\hline
 & 10,719693 \\
 & 23,821540 \\
\frac{6}{12} \ldots\ldots & 0,595538 \\
\frac{1}{12} \ldots\ldots & 0,099256 \\
\hline
 & 35,236027
\end{array}
$$

Luego 29 $\frac{7}{12}$ anas equivalen á 35 m. 236 milímetros con diferencia de 1 milímitro poco mas ó menos.

Tambien puede aplicarse este procedimiento á las toesas, pies, pulgadas &c., tomando por base *el valor de una toesa en metro*; pero en este caso nos veríamos conducidos á cálculos muy complicados.

PARA LOS PESOS.

105. Ya sabemos (n.° 68) que la libra contiene 9216 granos. Tambien hemos dicho (n.° 98) que el *quilógramo* vale 18827,15 gr.: luego dividiendo 9216 por 18827,15 ó 921600 por 1882715, se tendrá *el valor de la libra en quilógramos y subdivisiones decimales de quilógramo.* Y recíprocamente si se divide 1882715 por 9216, el cociente valuado en decimales espresará *el valor del quilógramo en libras y subdivisiones decimales de la libra.*

Efectuando estas dos operaciones que no ofrecen dificultad alguna, se halla que

1.° *la libra equivale á* 0,48950585 de quilógramo.

2.° *el quilógramo es igual á* 2,0428652 lib.

NOTA.—Este último resultado indica que el quilógramo escede á la libra en el duplo mas de la fraccion $\frac{4}{100}$ ó $\frac{1}{25}$ de libra, es decir, que el quilógramo vale 2 libras $\frac{1}{25}$ ó $\frac{51}{25}$ de libra con poca diferencia, ó bien, que 25 quilógramos componen 51 *libras*, ó en fin que 100 quilógramos equivalen á 204 libras.

Hecha esta esplicacion, propongámonos resolver alguno que otro ejemplo.

Determinar el valor de 69 lib. 0 m. 7 onz. 4 dr. 29 gr. *en quilógramos y subdivisiones decimales del quilógramo.*

Reducido á granos el número propuesto, se tendrán 640253 granos; luego dividiendo 640253 por 18827,15 ó 64025300 por 1882715, el cociente 34,006899 que se obtiene por esta operacion es el número pedido; esto es, que 69 lib. 0 m. 7 onz. 4 dr. 29 gr. equivalen á 34,006899 quilógramos, ó bien á 34 *quilógramos* 6 *gramos* 899 *milígramos.*

Por la inversa, *se quieren valuar* 34,006899 quilógramos *en libras, marcos, onzas* &c.

Supuesto que un quilógramo vale 2 lib., 04287652, 34,006899 será igual al producto de ambos números valuado en libras.

Este producto debe contener 14 cifras decimales; pero no teniendo en cuenta mas que las cinco primeras de la izquierda, serán 69 lib. 47189.

Multiplicando 0,47189 por 2 para hallar los marcos se tendrá 0 m. 94378.

Multiplicando esta fraccion por 8 resultan 7 onz., 55024.

Haciendo la multiplicacion de 7 onz. 55024 por 8 se tienen 4 dr., 40192.

Finalmente, multiplicando 0,40192 por 72 se hallarán 28 gr., 93824.

Luego 34,006899 quil. equivalen á 69 lib. 0 m. 7 onz. 4 dr. 29 gr., lo cual comprueba la anterior operacion.

$$\begin{array}{r}
69 \text{ lib.}, 47189 \\
2 \\
\hline
0 \text{ m.}, 94378 \\
8 \\
\hline
7 \text{ onz.}, 55024 \\
8 \\
\hline
4 \text{ dr.}, 40192 \\
72 \\
\hline
80384 \\
281344 \\
\hline
28 \text{ gr.}, 93824
\end{array}$$

Nota.—En el primer producto no se han tenido en cuenta mas que las 5 primeras cifras decimales, porque la multiplicacion por 2, 8, 8 y 72 equivaliendo á la multiplicacion por 9216, el error cometido es menor que $\frac{9216}{100000}$ de grano, que es una aproximacion muy suficiente.

106. Hay tablas de comparacion de los antiguos pesos y medidas con los nuevos, y viceversa, mediante las cuales pueden hacerse muy fácilmente todas las reducciones de que acabamos de hablar. He aqui el medio de formar dichas tablas:

Supongamos que se trata de *formar la tabla de comparacion de las medidas lineales antiguas con las nuevas, y recíprocamente la de estas con aquellas.*

Se tiene desde luego determinado el valor de la toesa en metro, valor que calculado (n.º 103) con ocho cifras decimales es igual á 1 m., 94903631.

En seguida, multiplicando por 2, 3, 4..... 9 se deducen los valores de 2, 3, 4..... 9 toesas.

Adelantando la coma en todos estos resultados *uno*, *dos*, *tres*,..... lugares hácia la derecha, se obtienen los valores de 10, 20, 30,... 100, 200, 300,... 1000, 2000, 3000... toesas, y así sucesivamente.

Por otro lado si se toma la 6.ª parte de 1,94903631, se tiene el valor del *pie* y por su órden el de 2, 3, 5 *pies*.

Tomando la 12.ª parte del valor del *pie*, se tiene el de la pulgada y por su órden los valores de 2, 3,... 11 pulgadas.

La misma operacion deberá hacerse para las líneas.

La formacion de la tabla inversa es en un todo semejante, con tal que se elija por base el valor del metro en toesa, valor que hemos hallado ser 0 toe., 51307407.

Esto supuesto propongámonos *valuar en metros*, *decímetros*, *centímetros* &c. 254 toe. 3 p. 7 pulg. 11 l.

Para esto se tomarán sucesivamente en la tabla los valores de 4 toe., 50 toe., 200 toe., y en seguida los de 3 p. 7 pulg. 11 l., y súmense entre sí todos estos valores. De este modo se obtienen los valores pedidos por simples adiciones.

Para el problema inverso se busca desde luego el valor de cierto número de metros y subdivisiones decimales del metro espresado en toesas y fraccion decimal de la toesa; en seguida se reduce esta última fraccion á *pies* multiplicándola por 6; despues se reduce la fraccion decimal resultante á pulgadas multiplicándola por 12, y así sucesivamente.

Pero como que se reunen los inconvenientes de ser las mas de estas tablas defectuosas, de no dar siempre su uso el grado de aproximacion necesario en el cálculo y de no hallarse por lo regular á disposicion del calculador; resulta que será muy conveniente esplicar los medios de operar las trasformaciones de que hemos hablado, tomando por base estos solos resultados:

1.º *el valor del metro es* 3 p. 0 pulg. 11 l. 296.

2.º *el del quilógramo es* 1827,15 *granos*.

3.º *el del franco es* $\frac{81}{80}$ *de libra*.

107. Volvamos ahora al problema del n.º 101 que dejamos en cuestion por falta de datos.

Un mercader francés ha vendido la ana de paño á 36 lib. 17 s. 6 d.: *se quiere saber á cómo deberá costar proporcionalmente el metro del mismo paño.*

Reduzcamos, pues, las 36 lib. 17 s. 6 d. á francos, décimos &c. bien por medio de las tablas, ó bien por la regla del n.º 102, y se obtienen 36 fr. 4197 por el valor de la ana.

Por otra parte, el metro espresado en ana (n.º 104) tiene por valor 0 a., 839576; luego el precio del metro es igual á una parte de 36 fr. 4197 indicada por el producto de los dos números 36,4197 y 0,839576. Efectuada esta multiplicacion, resultan 30,5771060472.

Por consiguiente el precio del *metro* debe ser 30 fr. 58 cs.

Sea este nuevo problema:

Costando la libra de cierta mercadería 25 lib. 11 s. 9 d., *se pide el precio de* 375 quil. 175 gr. *de la misma mercadería.*

Reducido el número 25 lib. 11 s. 9 d. á francos &c., equivale á 25 fr. 271605, lo cual da el precio de la libra en francos &c.....

Por otra parte 375,175 quil. reducidos á libras segun las tablas ó conforme á la regla del n.º 105, dan por resultado 766 lib., 436198 (no considerando mas que las 6 primeras cifras decimales por ser muy suficientes); luego si se multiplican 25 fr. 271605 por 766,436198, el producto deberá representar el precio pedido.

Resulta, pues, por este producto 19369,07 *un céntimo* mas ó menos, y por tanto 375,175 quil. *cuestan* 19369 fr. 07 cs. *

---

* Antes de la 13.ª edicion hemos terminado este capítulo por la esposicion de dos métodos abreviados, uno para la multiplicacion y otro para la division, cuando los términos de estas dos operaciones se componen de un gran número de cifras, y es indispensable obtener los resultados en cierto grado de aproximacion; pero en esta edicion no tendrán lugar por ahora, pues nos ha parecido conveniente tratar de ellos al fin de la obra en el *Apéndice sobre las aproximaciones numéricas*.

SEGUNDA PARTE.

CAPITULO V.

Propiedades generales de los números.

108. Introduccion.—Antes de pasar mas adelante en la ciencia de los números y para descubrir mas fácilmente en ellos nuevas propiedades, se hace indispensable valernos de algunos de los elementos con que cuenta el Algebra, tales como las letras y signos, con cuyo auxilio se indiquen de un modo general y abreviado las operaciones y razonamientos que comprende la resolucion de un problema.

Estos elementos son diez principales, que daremos á conocer sucesivamente.

1.° Las *letras* que se emplean en lugar de las cifras para representar los números.

Su uso ofrece á la vez una escritura mas concisa y general que la de las cifras, y pone mas en claro la existencia de tal ó tal propiedad con relacion á una ó muchas clases de números.

2.° El signo + que sirve para indicar la adicion de dos ó muchos números y que se pronuncia: *mas*.

Así que 45 + 23 quiere decir 45 *mas* 23, lo que indica que 45 está *aumentado* en 23: del mismo modo $a + b + c$ se enuncia por a mas b mas c, es decir, el número designado por a *aumentado* en el número representado por b y en el espresado por c.

3.° El signo — que se enuncia *menos* y que debe colocarse delante del número que se quiera sustraer de otro.

Así es que 73 — 49 se enuncia: 73 *menos* 49, esto es, 73 *disminuido* de 49, ó bien el esceso de 73 sobre 49: $a - b$ quiere decir a menos b.

4.° El signo de la multiplicacion, que es × ó un punto colocado entre los dos números que se quieren multiplicar, significa *multiplicado por*.

Así 29 × 35 ó 29.35 se enuncia: 29 *multiplicado por* 35, esto es, *el producto de* 29 *por* 35: $a \times b$ ó $a.b$ quiere decir a multiplicado por b.

Nota.—Cuando los números que se quieren multiplicar estan espresados por letras, conviene colocarlos unos á continuacion de otros sin interposicion de signo alguno, y segun esto *ab* quiere decir *a* multiplicado por *b*. Pero es bien fácil de reconocer que la notacion *ab* solo tiene lugar en las letras, pues desde luego se ve que si quisiésemos emplearla para indicar la multiplicacion de 5 por 6 por ejemplo, y se escribiese 56, esta notacion se confundiria muy fácilmente con el número *cincuenta y seis*. Por consiguiente cuando son números, es indispensable interponer entre ellos el signo × ó un *punto*, y se escribirá 5×6 ó 5.6.

El signo de la division se compone de dos puntos : que se colocan entre dividendo y divisor, ó de una línea — encima de la cual se pone el dividendo y debajo el divisor.

Por consiguiente $24 : 6$ ó $\frac{24}{6}$ se enuncia de este modo: 24 *dividido por* 6, ó *el cociente de* 24 *por* 6. Por la misma razon $a : b$ ó $\frac{a}{b}$ se enuncia así: *a dividido por b ó el cociente de a por b*. La notacion $\frac{a}{b}$ es la mas usada.

6.º El *coeficiente*, signo que se emplea para indicar la adicion de muchos números iguales espresados por letras. Así es que en lugar de escribir $a + a + a + a + a$, que representa la adicion de 5 números iguales á a, se escribe $5a$. Por el mismo consiguiente $11a$ espresa la adicion de 11 números iguales á a; $12ab$ la de 12 números iguales al producto de a por b.

Por lo tanto *el coeficiente es un número particular* escrito á la izquierda de otro espresado por una ó muchas letras, *y que indica cuántas veces deberá tomarse la letra ó el producto de ellas si entra mas de una.*

7.º El *esponente*, signo que espresa las veces que una espresion literal cualquiera entra como factor en el producto. Usando de él, resulta que en vez de escribir por ejemplo $a \times a \times a \times a \times a$ ó $aaaaa$ se escribe a^5, que se pronuncia *a cinco*, ó mas bien *a* 5.ª *potencia*, esto es, *a* elevado á la 5.ª potencia.

Se llama *potencia* el resultado de la multiplicacion de muchos números iguales, y *grado* de la potencia el conjunto ó total de números iguales multiplicados entre sí.

El *esponente*, que es el signo de este grado, *se escribe encima de la letra y un poco hácia la derecha*, *y representa* como ya hemos dicho *cuántas veces la cantidad espresada por esta letra debe entrar como factor en el producto*. (Cuando el esponente de la letra es 1, se suprime; y por tanto á toda cantidad literal se le sobreentiende por el esponente la *unidad*, de modo que con arreglo á esto a es igual á a^1, b igual á b^1, c á c^1 &c...)

Raiz 2.ª, 3.ª, 4.ª... de un número es un segundo número que elevado á la 2.ª, 3.ª, 4.ª.... potencia reproduce el primero. De tal modo que 3 es la raiz 2.ª de 9, porque 3 veces 3 son 9; 7 es la raiz 2.ª de 49, porque 7 veces 7 es igual á 49; 4 es la raiz 3.ª de 64, porque 4 veces 4 son 16 y 4 veces 16 son 64; 5 es la raiz 4.ª de 625, porque 5 veces 5 son 25, 5 veces 25 son 125 y 5 veces 125 son 625.

Las *raices* 2.ª y 3.ª han recibido, sin duda por ser de un uso mas frecuente en el cálculo, nombres peculiares, cuales son el de *raiz cuadrada* para la primera y el de *raiz cúbica* para la segunda.

8.º El signo $\sqrt{}$, que precede á todo número del cual se quiere estraer una raiz de cierto grado. Así pues, $\sqrt[3]{a}$ se enuncia: *raiz cúbic* ó *tercera* de a, y $\sqrt[4]{b}$ *raiz cuarta* de b.

Cuando solo se quiere indicar la estraccion de la raiz cuadrada ó segunda, no se escribe mas que el signo $\sqrt{}$ y en seguida la cantidad de que se quiere estraer la raiz; por consiguiente la *raiz cuadrada* ó *segunda* de a estará bien representada por la espresion $\sqrt{a}$.

9.º El signo que sirve para indicar la igualdad de dos espresiones cualesquiera. Este signo es $=$, y se pronuncia, *es igual á*, ó simplemente *igual*. Así $a=b$ significa que a es igual á b ó solamente a igual b.

Para espresar abreviadamente que el esceso de 36 sobre 25 es igual á 11 se escribirá $36-25=11$; esto es, 36 menos 25 igual 11.

Las espresiones $a=b$, $36-25=11$ se llaman *igualdades*; la parte que se halla á la izquierda del signo $=$ se llama *primer miembro* y la que está á la derecha *segundo miembro*.

10.º El signo de desigualdad $>$ ó $<$, que sirve para representar que una cantidad es mayor ó menor que otra (observando que la abertura del signo debe mirar siempre hácia la cantidad mayor). Así $a>b$ significa que *a es mayor que b*; por el contrario $a<b$ quiere decir que *a es menor que b* ó que *b es mayor que a*.

109. Para dar una idea clara y exacta del uso de estos signos y de la sencillez del lenguaje algebráico haremos algunas aplicaciones de fácil ejecucion.

Supongamos desde luego que se quiera espresar que un número representado por a se ha de elevar á la 4.ª potencia; que el producto resultante debe ser multiplicado consecutivamente 3 veces por b, y que por último el nuevo producto debe serlo 2 veces por c, el resultado de la operacion estará bien representado por la espresion $a^4b^3c^2$.

Si se quiere espresar, por ejemplo, la suma de 7 números iguales á este último, ó se quiere multiplicar por 7, la operacion estará bien representada por $7a^4b^3c^2$.

Del mismo modo $6a^5b^2$ es la espresion abreviada de 6 veces el producto de la 5.ª potencia de a por la segunda de b.

$3a-5b$ es la espresion abreviada del esceso del triplo de a sobre el quíntuplo de b.

$2a^2 - 3ab + 4b^2$ del duplo del cuadrado de a disminuido del triplo del producto de a por b aumentado del cuádruplo del cuadrado de b.

Se llama *monomio*, ó cantidad de un solo término, ó simplemente *término* una cantidad algebráica que no está compuesta de partes separadas unas de otras por signos de la adicion ó sustraccion; y *polinomio* ó cantidad de muchos términos una cantidad algebráica compuesta de muchas partes separadas por los signos + y —: así pues, $3a$, $5a^2$, $7a^3b^2$ son monomios, y $3a - 5a$, $2a^2 - 3ab + 4b^2$ polinomios. La primera de estas espresiones se llama *binomio*, porque tiene *dos* términos, y la segunda *trinomio*, porque tiene *tres* &c...

Veamos ahora cómo se efectuan sobre cantidades espresadas algebráicamente las cuatro reglas fundamentales de la Aritmética, limitándonos en todo á los casos mas sencillos y que hayan de servirnos de base y fundamento en la continuacion de este *Tratado*.

110. De la adicion ó del sumar.—Para espresar la suma de los dos números a y b se escribe simplemente $a + b$. Del mismo modo $a + b + c$ indica la adicion de los números a, b, c, lo cual no es mas que una consecuencia de las notaciones establecidas. Por la misma razon $a - b$ y $c + d - f$ sumados juntos forman la sola cantidad $a - b + c + d - f$.

Si se tuviese que sumar $a - b$ y $b - c$ se escribiria $a - b + b - c$; pero como la cantidad b está sustraida por una parte y sumada por otra, resulta que hay una compensacion entre estas dos operaciones mediante la cual desaparece b; por consiguiente la espresion $a - b + b - c$ queda reducida á $a - c$. Esta simplificacion se designa en el Algebra bajo el nombre de *reduccion de los términos semejantes*.

111. De la sustraccion ó del restar.—Para sustraer b de a se escribirá $a - b$: si se tuviese que sustraer c de $a - b$ se escribiria $a - b - c$.

Propongámonos ahora indicar la sustraccion de la espresion $c - d$ de $a - b$: la sustraccion podrá indicarse de este modo: $a - b - (c - d)$, esto es, *escribiendo entre dos paréntesis la segunda cantidad* c — d *precedida del signo* —. Pero cuando se quiere reducir el resultado á un solo polinomio, se procede del modo siguiente:

Si hubiese que sustraer la cantidad entera c de la espresion $a - b$, el resultado seria $a - b - c$; pero como no es toda la cantidad c lo que hay que sustraer, sino solamente c disminuido de d, resulta que la espresion $a - b - c$ es menor que el número de unidades que contiene d, y por tanto será necesario reducirla á su verdadero valor, añadiéndole d, y se tendrá en este caso $a - b - c + d$.

De donde se deduce que *para sustraer un polinomio de otro se escribirá el primero á continuacion del segundo, mudando los signos del que se ha de sustraer.*

Segun esta regla y mediante razonamientos análogos se hallará

$$3a - (2b - 3c) = 3a - 2b + 3c.$$
$$5a - 4b - (6d - f + g) = 5a - 4b - 6d + f - g.$$

112. De la multiplicacion ó del multiplicar. — Se quiere multiplicar a^4 por b^3.

Indicada la operacion, será $a^4 \times b^3$ ó simplemente a^4b^3.

Pero si se tuviese que multiplicar a^5 por a^3, deberá observarse que el número a entrando 5 veces como factor en el multiplicando y 3 en el multiplicador, debe ser $5+3$ ú 8 veces factor en el producto: así se tendrá $a^5 \times a^3 = a^8$, es decir, que *cuando la letra es la misma en ambos factores de la multiplicacion, se escribe una sola vez dándole por esponente la suma de los esponentes de los dos factores.* Del mismo modo se hallará $a^4b^2 \times a^2b^3 = a^6b^5$; $a^2b \times a^3b^4$, teniendo presente (n.° 108, 7.°) que $b = b^1$, $a = a^1$, y partiendo del principio general establecido en el n.° 28.

Propongámonos multiplicar a — b *por* c.

El producto podrá indicarse de este modo: $(a-b)\,c$.

Pero si se quiere obtener un solo polinomio, deberá observarse que multiplicar $(a-b)$ por c se reduce (n.° 25) á multiplicar c por $(a-b)$, es decir, á tomar c tantas veces como unidades contiene a disminuida de b: así si se multiplica c por a entera, lo cual da ca ó ac, el producto resultará mucho mayor que el de b por c ó bc, y por tanto será necesario restar bc de ac, y en este caso se tendrá $ac-bc$ por el producto pedido.

Es decir, que $(a-b)\,c = ac = bc$.

Multiplicar (a — b) *por* (c — d).

Indicado el producto, será: $(a-b)\,(c-d)$.

Mas para obtener un solo polinomio se comenzará multiplicando $(a-b)$ por c, lo cual da $ac-bc$; pero obsérvese que no por c todo entero hay que multiplicar $(a-b)$, sino por c disminuido de d. Así el producto $ac-bc$ es mucho mayor respecto del producto de $(a-b)$ por d, esto es, respecto de $ad-bd$. Luego para que aquel permanezca en su justo valor será necesario sustraerle el segundo producto $ad-bd$, lo cual da conforme á la regla de la sustraccion $ac-bc-ad+bd$.

Para efectuar la multiplicacion de dos binomios se multiplicará separadamente cada uno de los términos del multiplicando por cada uno de los del multiplicador, observando con arreglo á los signos de los productos parciales la siguiente regla: *Si los dos términos que se multiplican van acompañados de un mismo signo, el producto lo deberá estar del signo* $+$; *pero si por el contrario lo estan de signos diferentes, el producto deberá tener el signo* $-$.

Conforme á esta regla tendremos que $(a+b)\,(c-d) = ac+bc-ad-bd$; $(a-b)\,(c+d) = ac-bc+ad-bd$.

113. De la division ó del partir. — Con respecto á esta operacion solo nos limitaremos á presentar un solo caso, cual es la division de dos monomios compuestos de una misma letra.

Sea, por ejemplo, *dividir* a^7 *por* a^3.

El cociente indicado será $\dfrac{a^7}{a^3}$ ó $a^7 : a^3$. Pero antes de efectuar la operacion obsérvese que como a^7 es un producto del cual a^3 y el cociente son los dos factores, el esponente 7 del dividendo debe ser igual (n.º 112) á la suma del esponente 3 del divisor y del esponente incógnito del cociente; luego este deberá serlo *al esceso del esponente del dividendo sobre el del divisor*, es decir, á 7 — 3 ó á 4.

Así $\frac{a^7}{a^3} = a^4$, pues bien se ve que $a^4 \times a^3 = a^7$.

Del mismo modo se hallará $\frac{b^9}{b^4} = b^5$; $\frac{c^4}{c^3} = c^1$ ó c;........

$\frac{a^3b^2}{a^2b} = a^1b^1 = ab$.

Procediendo por analogía tendremos $\frac{a^2}{a^2} = a^0$; $\frac{a^3}{a^3} = a^0$; $\frac{a^4}{a^4} = a^0$;

y como cada una de las espresiones $\frac{a^2}{a^2}$, $\frac{a^3}{a^3}$, $\frac{a^4}{a^4}$..... tienen por verdadero valor la *unidad*, deduciremos esta consecuencia:... $a^0 = 1$.

La notacion a^0 puesta en lugar de la unidad ofrece la ventaja de recordar al calculador la existencia de una letra que habiendo entrado en el cálculo ha desaparecido regularmente por medio de alguna simplificacion.

No nos detendremos en considerar los demás casos de la division por ser inútiles para el objeto que nos proponemos.

Tales son, pues, las nociones del Algebra de que habremos de hacer uso desde el *capítulo* V en adelante.

114. Para hacer mas palpables las ventajas que ofrece el uso de las letras para representar los números, nos propondremos resolver los dos problemas siguientes:

1.º *¿Qué alteracion podrá esperimentar un quebrado cualquiera añadiendo un mismo número á sus dos términos?* (este problema queda resuelto numéricamente en el n.º 49.)

Sea, pues, $\frac{a}{b}$ el quebrado propuesto y m el número que se ha de añadir á los dos términos a y b del quebrado: satisfecho el enunciado del problema, se tendrá $\frac{a+m}{b+m}$.

Para comparar estos dos quebrados los reduciremos á un comun denominador y tendremos $\frac{a\,(b+m)}{b\,(b+m)}$ para el primero y $\frac{(a+m)\,b}{(b+m)\,b}$

para el segundo, ó efectuando las operaciones indicadas segun la regla del n.° 112, $\frac{ab+am}{b^2+bm}$ y $\frac{ab+bm}{b^2+bm}$.

Ahora bien, los dos numeradores $ab+am$ y $ab+bm$ tienen una parte comun ab, y la parte bm del segundo numerador es mayor que la am del primero, pues que se tiene $b>a$; luego el segundo quebrado es mayor que el primero, y por tanto se podrá inferir que *añadiendo un mismo número á los dos términos de un quebrado se aumenta su valor.*

La verdad de la proposicion que acabamos de enunciar exige de por sí que la espresion $\frac{a}{b}$ sea un quebrado propio, ó lo que es lo mismo, que $a<b$, pues si por el contrario fuese impropio y se tuviese $a>b$, el razonamiento hecho para llegar al resultado tendria lugar en un órden inverso, y entonces tendríamos $ab+bm<ab+am$.

Nota.—Este género de demostracion rigoroso y al mismo tiempo general á todos los casos cesaria de tener este carácter tan luego como en vez de usar de cantidades literales nos fijásemos en un caso particular en que las cantidades fuesen numéricas. Por ejemplo, si se tuviese el quebrado $\frac{12}{17}$ y se le añadiesen 3 unidades á cada uno de sus dos términos, resultaria un nuevo quebrado $\frac{15}{20}$. Reduciendo ambos á un comun denominador, se tendrá $\frac{240}{340}$ para el primero, y $\frac{255}{340}$ para el segundo.

Bien fácil es echar de ver que el segundo quebrado es mayor que el primero; pero esto que tiene lugar en el ejemplo particular que tenemos á la vista, si se le considera con todo el rigor matemático, no prueba nada respecto de los muchos casos que pueden presentarse.

La demostracion espuesta en el n.° 49 es segun la naturaleza de los razonamientos en ella empleados tan general como la que acabamos de esponer; pero esta, aunque tal vez no tan elegante, digámoslo así, tiene la ventaja de ser mas sencilla: hela aquí reducida á menores términos:

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{a+m}{b+m}$ los dos quebrados que se han de comparar.

Reduzcámosles á un comun denominador y se tendrá $\frac{ab + am}{b^2 + bm}$

y $\frac{ab + bm}{b^2 + bm}$; pero segun la hipótesis de que hablamos antes, $a < b$, de donde $am < bm$; luego $ab + am < ab + bm$; luego el segundo quebrado es mayor que el primero.

2.° *Dados dos números, hallar el producto de su suma por su diferencia.*

Sean a y b los dos números propuestos: su suma estará bien representada por $(a + b)$ y su diferencia por $(a - b)$.

Efectuando la multiplicacion de $a + b$ por $a - b$ segun las reglas del n.° 112, el producto será $a^2 - ab + ab - b^2$, ú omitiendo los dos términos $- ab$ y $+ ab$, que se destruyen, $- a^2 - b^2$; luego..... $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$.

Lo que prueba que *la suma de dos números multiplicada por su diferencia da siempre por producto la diferencia de sus cuadrados ó segundas potencias.*

Ejemplo.—*Sean los dos números* 25 *y* 12: *su suma es* 37 *y su diferencia* 13; multiplicando 13 por 37 se tiene por producto 481.

Por otra parte, 25×25 da 625, 12×12 da 144; de donde..... $(25)^2 - (12)^2 = 481$.

Luego $(25 + 12)\ (25 - 12) = (25)^2 - (12)^2 = 481$.

115. Estos últimos razonamientos no vienen á ser mas que una comprobacion del principio que acabamos de esponer, al paso que los que le preceden constituyen una demostracion rigorosa y general, pues que los números estan espresados por letras á las que se pueden aplicar todos los valores posibles.

Estos dos problemas que anteceden son á nuestro juicio harto suficientes para que los principiantes puedan reconocer las ventajas del uso de las espresiones literales en lugar de las numéricas. Mediante el uso de ellos no solo resultan los razonamientos mas generales y casi siempre mas sencillos, sino que tambien se tienen á la vista las operaciones que se han de efectuar con los números que entran en el enunciado del problema, sin temor de que puedan desaparecer ó refundirse mas en otras mediante simplificaciones ó reducciones, como acontece cuando se opera con caracteres numéricos y particulares.

Establecidas ya estas nociones preliminares, vamos pues á ocuparnos de nuevo acerca de algunas de las materias tratadas en la primera parte, á fin de que procediendo ya con elementos mas vastos y profundos, podamos presentarlas con mayor exactitud y reconocerlas bajo todos los puntos de vista en que las considera la ciencia del cálculo: de este modo hallaremos nuevas propiedades y medios de simplificar los procedimientos de las diversas operaciones de la Aritmética.

§ I. Teoría de los diversos sistemas de numeracion.

116. Hemos visto (n.° 5) cómo con el auxilio de diez caracteres ó cifras se pueden representar todos los números, partiendo de este principio *convencional*, á saber, que toda cifra colocada á la izquierda de otra espresa unidades diez veces mayores que ella. Ahora nos proponemos demostrar que igualmente se pueden escribir todos los números con mas ó menos de *diez* cifras, con tal que haya al menos dos y el cero haga parte de ellas.

En general se llama *base* de un sistema de numeracion al número de cifras que se emplea para formarlo. El sistema en que se usan dos cifras se llama *binario*, el que consta de tres *ternario* &c.

En todo sistema de numeracion semejante al decimal se conviene en que *toda cifra colocada á la izquierda de otra esprese unidades tantas veces mayores con relacion á las de la otra cifra como unidades hay en la* BASE, *es decir, en el número de cifras del sistema.*

Así pues, en el sistema *binario* las unidades de cada cifra adquieren valores de *dos* en *dos* veces mayores á medida que se atrasan uno, dos, tres.... lugares hácia la izquierda; en el *ternario* los valores de las unidades de cada cifra son de *tres* en *tres* veces mayores, y por lo general en un sistema cuya base es B, las unidades de cada cifra adquieren valores de B en B veces mayores, á medida que se retrocede de derecha á izquierda.

Cuando un número está escrito en el sistema cuya base es B, la primera cifra de la derecha espresa unidades de *primer órden*, la cifra inmediata á la izquierda espresa unidades de *segundo órden*, la inmediata á la izquierda de estas dos, unidades de *tercer órden*, y así sucesivamente. Por esta razon se necesitan B unidades del primer órden para formar las del segundo órden, B unidades del segundo para formar las del tercero &c.

117. Bien entendido esto, pasemos á presentar el modo de espresar en cifras un número entero, cualquiera que sea el sistema que se adopte. Para fijar las ideas consideremos el sistema *setenario* ó aquel en que se emplean *siete* cifras. Los mismos razonamientos podrán aplicarse en seguida á cualquier otro sistema.

Las cifras del sistema setenario son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; cuyas seis primeras espresan los seis primeros números.

Añadiendo á *seis* la unidad se forma el número 7 ó la unidad de segundo órden que segun el principio ya enunciado debe escribirse 10.

Poniendo sucesivamente cada una de las cifras del sistema en el primero y segundo lugar quedarán formados todos los números consecutivos comprendidos desde *siete*, ó 10 hasta el número representado por 66.

Formado ya este número, si se añade una nueva unidad, resultarán *seis* unidades de segundo órden, mas *siete* del primero, es decir, *siete* unidades del segundo órden ó *una sola* del tercero, que deberá escribirse así: 100.

Por una razon análoga si se ponen sucesivamente en el segundo y tercer lugar las diferentes cifras del sistema, se tendrán formados todos los números consecutivos que hay desde 100 hasta el número representado por 666.

Razonando sobre este último número como sobre 66, se tendrá desde luego la unidad de cuarto órden, que se escribirá 1000; en seguida se obtendrán todos los números consecutivos comprendidos entre 1000 y el número representado por 6666, y así sucesivamente se podrán formar todos los números imaginables.

De donde se deduce que todos los números enteros posibles son capaces de ser escritos en el sistema setenario.

Cualquiera que sea el sistema adoptado, las unidades de diversos órdenes se representan respectivamente por 1, 10, 100, 1000, 10000, como en el sistema decimal; pero los valores relativos son esencialmente diversos segun los sistemas á que pertenecen.

118. Nota.—Hemos dicho en el n.° 116 que el carácter 0 es indispensable en todo sistema análogo al decimal, es decir, en todo sistema en que el valor relativo de cada cifra dependa del lugar que ocupe á la izquierda de las otras. Mas si se procede con todo rigor, puede suplirse el uso de él, aunque sí ateniéndose á los inconvenientes que presenta el no usarlo y á lo defectuoso que por precision debe ser el sistema en que no se emplee.

Propongámonos, pues, por ejemplo establecer el sistema TERNARIO adoptando las tres cifras significativas 1, 2, 3.

Desde luego se ve que los *tres* primeros números deberán ser espresados por dichas tres cifras.

Para representar *cuatro*, *cinco* y *seis* bastará escribir 11, 12 y 13.

Para espresar *siete*, *ocho*, *nueve*, *diez*, *once*, *doce*,
se escribirá 21, 22, 23, 31, 32, 33.
Del mismo modo 111, 112, 113, 121, 122, 123,
espresarán *trece*, *catorce*, *quince*, *diez y seis*, *diez y siete*, *diez y ocho*.

No es necesario pasar mas adelante para reconocer á primera vista los inconvenientes que este sistema presenta. Su principal defecto consiste en estar escritas de un modo diferente unidades que son de un mismo órden. Así que en 13 y 23 la cifra 3 espresa una unidad del segundo órden, lo mismo que las cifras 1 y 2 que se hallan á su izquierda. En el número 123 el conjunto de las cifras 23 espresa *nueve* ó la unidad de tercer órden, del mismo modo que la cifra 1 que está á la izquierda de 2 y 3.

Pero si se hace uso del carácter 0, bastará determinar los números de unidades de diferentes órdenes que entran en el número propuesto, y escribir á continuacion unas de otras de derecha á izquierda las cifras que deban espresar estos números.

119. La mutua relacion que hay entre la nomenclatura actual de los números y el modo de representarlos por cifras en el sistema decimal permite poderlos escribir con facilidad, y por decirlo así inmediatamente al enunciado en lenguaje ordinario, así como tambien resolver la cuestion inversa, que consiste en traducir al lenguaje comun un número cualquiera representado por cierto conjunto de cifras. Lo mismo podrá decirse de cualquier otro sistema de numeracion que reconozca una nomenclatura especial. Pero si se nos propusiese, por ejemplo, *escribir en el sistema* SETENARIO *el número* TRESCIENTOS SESENTA Y NUEVE *con relacion al sistema decimal*, seria difícil reconocer *à priori* cuáles fuesen las cifras propias para espresar las unidades del primero, del segundo, del tercer... órden setenario que contuviese. Y como este número escrito en cifras segun el sistema decimal es 369, resulta que la cuestion propuesta depende de la siguiente, que es mucho mas general: *Dado un número enunciado en lenguaje comun ó escrito con arreglo al sistema decimal, traducirlo al sistema cuya base sea* B.

Para resolver esta última cuestion observemos que formando B unidades del primer órden una unidad del segundo, cuantas veces el número propuesto contenga á la base B, igual número de unidades del segundo órden del sistema B contendrá; es decir, que si se divide este número por B, el cociente espresará unidades del segundo órden, y el resto, que será por precision menor que B, espresará las unidades del primer órden del número escrito en el sistema cuya base es B.

Del mismo modo, supuesto que B unidades del segundo órden en el sistema B forma una unidad del tercer órden en este mismo sistema, resulta que si se divide B por el cociente que espresa las unidades del segundo órden, el nuevo cociente que se obtenga espresará unidades del tercer órden, y el resto permaneciendo siempre menor que B, representará las unidades del segundo órden del número escrito en el sistema cuya base es B, y así sucesivamente.

De donde se deduce que para espresar un número del sistema decimal con arreglo á la nomenclatura del sistema cuya base sea B, es necesario, 1.º *dividir el número propuesto por la base del nuevo sistema escrita en el sistema decimal, operacion que da un resto, el cual se escribirá por separado como espresando las unidades del primer órden en el nuevo sistema*; 2.º *dividir el cociente obtenido por la misma base, lo cual da un segundo resto, que se escribirá á la izquierda del primero como espresando las unidades del segundo órden*; 3.º *dividir el segundo cociente por la misma base y escribir el tercer resto así obtenido á la izquierda de los dos anteriores por espresar las unidades del tercer órden*; y 4.º *continuar así esta serie de operaciones hasta tanto que se haya obtenido un cociente menor que la base del nuevo sistema*; cuyo último cociente, que deberá espresar las unidades del mayor órden, *se escribirá á la izquierda de todos los restos anteriormente hallados.*

Apliquemos esta regla al número *trescientos sesenta y nueve* ó 369 que se trata de representar con arreglo á la nomenclatura del sistema *setenario*.

369 | 7	restos.	
52	5	
7	3	(1035)
1	0	
0	1	

Dividiendo 369 por 7 se tiene por cociente 52 y por resto 5, que se escribirá por separado y que representará las *unidades del primer órden* en el nuevo sistema.

Dividiendo 52 por 7 se tendrá 7 por cociente y 3 por resto, que espresará las *unidades del segundo órden del mismo sistema* y que deberá escribirse á la izquierda de la cifra 5.

Pasando á la division de 7 por 7 se tiene por cociente 1 y un resto 0, lo cual indica que no hay *unidades del tercer órden*, y por tanto se pondrá un 0 á la izquierda de las dos cifras halladas para conservar el lugar de las unidades de dicho órden.

Por último, como el cociente 1 es menor que 7, se le destinará á espresar las unidades *del cuarto órden*, y por tanto el número 369 traducido al sistema setenario estará bien representado por (1035).

Por el mismo procedimiento hallaremos el número 5347 traducido al sistema OCTONARIO ó de *ocho* cifras, á saber, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, y equivalente al conjunto de las nuevas cifras (12343).

5347 | 8	restos.	
668	3	
83	4	
10	3	(12343)
1	2	
0	1	

OBSERVACION.—Puede suceder que la *base* del nuevo sistema sea mayor que *diez*, *base* del sistema decimal. En este caso hay que tener presente una observacion muy importante para la aplicacion de la regla.

Sea, por ejemplo, el número 8423 que se quiere traducir al sistema DUODECIMAL ó de *doce* cifras.

Convengamos, pues, en emplear las dos letras griegas α, β, para designar los números *diez* y *once*, y las cifras de este sistema serán 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β.

8423 | 12	restos.	
701	11 ó ϐ	
58	5	(4α5ϐ)
4	10 ó α	
0	4	

La base *doce* estando espresada por 12 en el sistema decimal, se dividirá 8423 por 12, lo cual da 701 por cociente y 11 por resto, que espresa las unidades de primer órden en el nuevo sistema. Pero como 11 escrito en el sistema decimal significa *once*, resulta que segun lo convenido en el duodecimal lo representaremos por ϐ, y de consiguiente escribiremos aparte no 11, sino ϐ, para espresar las unidades de primer órden del nuevo sistema.

Así tambien en la tercera division se halla un resto 10 ó *diez* que habiendo convenido en representarlo en el nuevo sistema por la letra griega α escribiremos α á la izquierda de las dos cifras halladas. Obtenida ya la última cifra 4 por el método ya indicado, se tendrá (4α5ϐ) por el número 8423 traducido al sistema *duodocenario.*

120. Recíprocamente, *enunciado un número cualquiera en un sistema cuya base es* B, puede proponerse *enunciarlo en lenguaje comun,* ó lo que es lo mismo, *traducirlo al sistema decimal.*

Sea en general.... *hgfdcba* un número escrito conforme al sistema de B cifras, y en el que a, b, c, d, f... designan las unidades del 1.º, 2.º, 3.er.... órden.

Resulta del principio fundamental establecido (n.º 116) que la cifra b espresa unidades B veces mayores que si estuviese sola; de donde se deduce que su valor relativo es igual al producto de b multiplicado por B, y puede por tanto (n.º 108) representarse por $b \times B$ ó simplemente por bB. Del mismo modo la cifra c espresa unidades B veces mayores que las de la cifra b: así su valor relativo es igual al producto de c por $B \times B$ ó B^2 y puede ser representado por cB^2.

Por el mismo consiguiente se reconocerá que dB^2, fB^2, gB^2, hB^2... son los valores relativos de las otras cifras.

Luego el número propuesto puede ser espresado por

$$a + bB + cB^2 + dB^2 + fB^2 + gB^2 + hB^2 \ldots$$ *

* Esta espresion se llama en Algebra *una fórmula*, porque contiene bajo una forma concisa el sistema de operaciones aritméticas que se deben efectuar sobre diferentes números para obtener el resultado de una cuestion general, y porque de ella se pueden deducir los resultados de todas las cuestiones de la misma especie y que tan solo difieran en los valores numéricos.

Hecho esto, se darán valores particulares á la base B y á las cifras a, b, c, d, f,... y efectuando con arreglo al sistema decimal todas las operaciones indicadas por esta espresion, el resultado dará el número correspondiente á los datos particulares del enunciado traducido al sistema decimal.

La espresion que acabamos de emplear para llegar al resultado pedido, nos suministra la siguiente regla general: *Para traducir un número de un sistema cuya base es* B (por ejemplo) *al sistema decimal, se formarán las diversas potencias de la base* B *escrita conforme á este mismo sistema, se multiplicarán en seguida todas las cifras...* a, b, c, d, f,... *traducidas tambien al sistema decimal, respectivamente por los números...* 1, B, B^2, B^3, B^4,... *y sumando despues todos estos productos parciales se tendrá el número pedido.*

Sea por ejemplo el número (57436) escrito en el sistema *octonario*, que se quiere traducir al decimal.

Despues de haber hallado mediante multiplicaciones sucesivas que las potencias de 8 hasta la 4.ª inclusive son 8, 64, 512, 4096, se dispondrá así el cálculo:

1°.	$1 \times 6 =$	6
2°.	$8 \times 3 =$	24
3°.	$64 \times 4 =$	256
4°.	$512 \times 7 =$	3584
5°.	$4096 \times 5 =$	20480

Luego $(57436) = 24350.$

Para convencernos de la exactitud del resultado hallado no tendremos mas que hacer la operacion inversa, y mediante ella volveremos á tener el número propuesto (57436).

Comprobacion segun la regla establecida en el n.º 119.

24350 | 8		
3043	6	
380	3	
47	4	(57436)
5	7	
0	5	

121. Tambien puede darse á la cuestion inversa una demostracion ó solucion mas sencilla y al mismo tiempo mas conexa con la de la cuestion directa.

Volvamos al mismo número (57436), que siendo del sistema *octonario*, se trata de reducir ó espresar conforme al sistema decimal.

Segun el principio fundamental del número 116 la primera cifra de la izquierda, que es 5, representa unidades 8 veces mayores que las de la segunda cifra 7; luego multiplicando 5 por 8 y añadiendo 7 al producto, lo cual da 47 (ó *cuarenta y siete*), se tendrá el número total de las unidades del cuarto órden (sistema de *ocho* cifras) que contiene el número propuesto. Por la misma razon si se multiplican 47 por 8 y se añaden 4 al producto, lo cual da 380 (ó *trescientos ochenta*), se tendrá el número total de las unidades del tercer órden (sistema de *ocho* cifras) que contiene el número propuesto.

Por igual motivo si se multiplican 380 por 8 y se añaden 3 al producto que da 3043, se tendrá el número total de unidades del segundo órden que contenga el número propuesto. Por último, multiplicando 3043 por 8 y añadiendo 6 al producto se obtiene 24350 por el número total de unidades del primer órden (espresado conforme al sistema decimal) que contiene el número propuesto.

He aquí como se deberá disponer el cálculo:

$$
\begin{array}{rl}
5 \times 8 = 40, & +7 = 47 \\
47 \times 8 = 376, & +4 = 380 \\
380 \times 8 = 3040, & +3 = 3043 \\
3043 \times 8 = 24344, & +6 = 24350.
\end{array}
$$

REGLA GENERAL. —*Multiplíquese la primera cifra de la izquierda del número propuesto por la base* B *escrita conforme al sistema decimal y añádase al producto la segunda cifra* (partiendo de la izquierda): *multiplíquese la suma así obtenida por la base* B, *añádase al producto la* 3.ª *cifra*, y así sucesivamente.

Esta última regla es inversa á la establecida en el n.º 119, y para reconocerla como tal bastará comparar la tabla de operaciones que acabamos de presentar con la que se halla al final del número precedente.

Además de las dos cuestiones de los n.os 119 y 120 puede presentarse otra que tiene por objeto, *dado un número escrito en el sistema* B, *traducirlo al sistema cuya base sea* B′.

La regla que deberá seguirse en este caso consiste en traducir el número dado primeramente al sistema decimal (n.º 120) y de aquí al sistema B′ (n.º 119).

Propongámonos por ejemplo traducir el número (23104) del sistema QUINARIO (ó de *cinco* cifras) al sistema duodecimal.

He aquí la tabla de los cálculos:

$$
\begin{array}{rl}
2 \times 5 = 10, & +3 = 13 \\
13 \times 5 = 65, & +1 = 66 \\
66 \times 5 = 330, & +0 = 330 \\
330 \times 5 = 1650, & +4 = 1654
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
1654 & 12 \\
137 & \ldots\ \textit{diez ó } \alpha \\
11 & \ldots\ 5 \quad (\varepsilon 5 \alpha) \\
0 & \ldots\ \textit{once ó } \varepsilon.
\end{array}
$$

Luego (23104, sist. *quin.*) = (ε5α, sist. *duod.*)

Este cálculo puede verificarse muy fácilmente repitiendo las trasformaciones, pero en un órden inverso, es decir, pasando del sistema *duodecimal* al *quinario*.

123. Los procedimientos para efectuar las cuatro operaciones fundamentales de la Aritmética con números escritos conforme á un sistema cualquiera no varian esencialmente respecto de los empleados para operar con arreglo al sistema decimal. Pero es indispensable tener presente la ley que existe entre las unidades de diversos órdenes para poder, siempre que se necesite, reducir unidades de un órden cualquiera á unidades del órden inmediatamente superior ó inferior.

Para familiarizar á los principiantes con los diversos sistemas de numeracion, nos propondremos un ejemplo de cada una de las operaciones fundamentales ejecutadas con el sistema *duodecimal*, cuyos caracteres ó cifras como ya hemos visto en el n.° 119 son:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, ϐ.

1.° *Sumar los números*

3704α, ϐ2956, 27ϐα5, 48αϐ.

Comenzando desde luego por las unidades simples se dirá α y 6 son 14 y 5, 19 y ϐ, 28. Se coloca 8 en el primer lugar y se retienen las 2 *duodecenas* para unirlas á la columna de las unidades de segundo órden.

En seguida: 2 y 4 son 6 y 5 son ϐ y α, 19 y α, 27. Colóquese el 7 inmediatamente á la izquierda del 8 y reténgase el 2, para unirlo á la columna de las unidades de tercer órden, sobre la cual se operará como sobre las anteriores, y así sucesivamente. Concluida la operacion, se tendrá 15α678 por la suma pedida.

```
 3704α
 ϐ2956
 27ϐα5
  48αϐ
──────
15α678
```

2.° *Del número* 5α0046
se quiere sustraer el número 47α68ϐ

```
5α0046
47α68ϐ
──────
121577
```

Como no puede sustraerse ϐ de 6, se hace uso de la regla del n.° 14 y se dice ϐ de 16 quedan 7. Pasando á la siguiente columna, se aumenta á 8 en una unidad y se dice de 9 á 14 van 7. En seguida 7 de 10 quedan 5; ϐ de 10 queda 1; 8 de α quedan 2; por último 4 de 5 queda 1. Así pues, 121577 es el resultado pedido.

3.° *Se quieren multiplicar* 3407α
por 5α68

$$
\begin{array}{r}
3407\alpha \\
5\alpha68 \\
\hline
228528 \\
1803Ɛ0 \\
294664 \\
148332 \\
\hline
177608828
\end{array}
$$

(Para esto seria muy conveniente tener á la vista una tabla de multiplicacion que contuviese hasta la cifra Ɛ (*ú once*) que es la mayor del sistema.)

Multiplicando desde luego 3407α por 8 se dirá 8 veces α son 68: colóquese el 8 en su correspondiente lugar y reténgase el 6. En seguida 8 veces 7, son 48 y 6 de reserva 52; colóquese el 2 y resérvese el 5; 8 veces 0 es 0 y 5 de reserva 5; póngase este en su lugar; 8 veces 4 son 28, colóquese el 8 y reténgase el 2. Finalmente 8 veces 3 son 20 y 2 de reserva 22; en este caso como no queda cifra alguna en el multiplicando, se escribirán los 22 á la izquierda de todas las cifras halladas. Así se tendrá 228528 por el primer *producto parcial.*

En cuanto á los demás productos parciales del multiplicando por las otras cifras del multiplicador, podria probarse muy bien por razonamientos análogos á los que se hicieron en el n.° 21 para el sistema decimal, pues todo ello se reduce á multiplicar sucesivamente el multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador consideradas como espresando unidades simples, y á escribir cada uno de los productos parciales debajo del que le precede, adelantando siempre en su colocacion un lugar hácia la derecha respecto del anterior.

Por último, siguiendo la misma marcha que en la multiplicacion de números del sistema decimal, se sumarán todos estos productos parciales, y el total 177608828 será el resultado de la multiplicacion de los dos números propuestos.

4.° Comprobemos esta operacion por la division; para esto bastará dividir el producto obtenido por uno de los factores, v. g. por 5α68.

$$
\begin{array}{r|l}
177608828 & 5\alpha68 \\
\cline{2-2}
1Ɛ\alpha08 & 3407\alpha \\
3\alpha082 & \\
4\alpha968 & \\
0000 &
\end{array}
$$

Para obtener la cifra de las unidades mayores del cociente es necesario tomar las cinco primeras cifras del dividendo partiendo de izquierda á derecha, y dividir 17760 por 5α68. Así pues, empezando por la izquierda se buscará cuántas veces 17 contiene á 5, y se tendrán 3 (con respecto á 13), que se escribirá en el cociente. Multiplicando el divisor por 3 y restando el producto del primer dividendo parcial, se obtendrá por resto 1Ɛα0 y que seguido de la cifra 8 da 1Ɛα8 por el segundo dividendo parcial, sobre el cual se operará como sobre el primero.

Dividiendo 1Ɛα08 por 5α68 ó 1Ɛ por 5, resultan 4 por cociente, que se escribirá á la derecha del anterior y por resto de la nueva division parcial, $3\alpha 0$.

Como bajada la cifra 8, el nuevo dividendo es menor que el divisor, se pondrá un 0 en el cociente y se bajará la siguiente cifra, en cuyo caso el dividendo parcial resultante $3\alpha 082$ contiene al divisor.

Operando sobre él como sobre los anteriores se halla 7 por cociente y $4\alpha 96$ por resto.

Finalmente bajando la última cifra del dividendo y dividiendo $4\alpha 968$ por $5\alpha 68$, se obtiene α por cociente y 0 por resto.

Luego 3407α es el cociente pedido.

Aconsejamos á los principiantes se ejerciten con ejemplos propuestos casualmente de diversos sistemas y que versen en particular sobre las dos últimas operaciones, por ser estos ejercicios propios para conseguir la práctica del cálculo.

124. La cuestion del n.° 122 que tiene por objeto traducir del sistema cuya base sea B al sistema B′, puede resolverse directamente, ó lo que es lo mismo, sin que haya que pasar del sistema B al decimal y de este al sistema B′. Para esto bastará *traducir la base* B′ *al sistema* B *y aplicar la regla del* n.° 119, *efectuando las operaciones con arreglo al sistema* B, ó de otro modo, *traducir la base* B *al sistema* B′ *y aplicar una de las reglas de los* n.^{os} 120 y 121, *haciendo las operaciones conforme al sistema* B′.

No nos detendremos, pues, en presentar la marcha que deberá seguirse en estas operaciones, pues reflexionando bien sobre las nociones ya establecidas, no ofrecerán mayormente dificultad alguna.

125. Observacion general.—El sistema *duodecimal* ofrece algunas ventajas sobre el decimal, pues que su base *doce* contiene mas factores que *diez*. Así es efectivamente, pues 12 es divisible por 2, 3, 4, 6, al paso que 10 tan solo tiene dos factores, 2 y 5. Pero no por eso podria sustituirse el sistema duodecimal ó cualquier otro al decimal, sin que fuese indispensable modificar la nomenclatura con arreglo al sistema adoptado y de modo que se pudiera enunciar conforme á este sistema de numeracion los números escritos con cifras.

Mas de una ocasion tendremos en que reconocer que la mayor parte de las propiedades descubiertas respecto de los números son independientes del sistema de numeracion que se adopte. Algunas parecen pertenecer al sistema decimal, mientras que sus semejantes no tienen lugar ó no se verifican en los otros sistemas. El uso de las letras del alfabeto para representar los números nos da una idea bien clara y exacta de la generalidad de estas propiedades, en cuanto son aplicables á los números, cualquiera que sea el sistema de numeracion conforme al cual se espresen estos.

§ II. Divisibilidad de los números.

126. La propiedad peculiar á algunos números de ser exactamente divisibles por otros y la investigacion de los divisores de un número cualquiera forman una de las teorías mas importantes de la Aritmética. Esta teoría tiene por base los siguientes principios que vamos á analizar sucesivamente.

DEFINICIONES PRELIMINARES.—Se dice que un número entero es *exactamente divisible* por otro cuando hay un tercer número entero tambien, que multiplicado por el segundo reproduce el primero.

Todo número entero que divide exactamente á otro se llama *factor*, *divisor* ó *submúltiplo* de este número, el cual es *múltiplo* del primero.

Todo número entero que no tiene mas *divisor* que él mismo ó la unidad, se llama *número primo absoluto* ó simplemente *número primo*.

Dos números enteros son *primos entre sí* cuando no tienen otro *divisor comun* que la unidad (que es divisor de todo número).

De aquí resulta que un *número primo* que no divida exactamente á otro número entero, es *primo* con este otro, pues en este caso no pueden tener ningun otro divisor comun que la unidad.

Estas definiciones quedan ya establecidas en el n.° 51.

127. PRIMER PRINCIPIO.—*Todo número entero* P *que divida exactamente á uno de los factores del producto* $A \times B$, *divide por precision al producto*; ó lo que es lo mismo, *todo número entero que divida exactamente á otro, deberá dividir á los múltiplos de este número* (Véase n.° 51).

En efecto, sea Q el cociente que se supone exacto de la division de A por P se tendrá $A = P \times Q$, de donde multiplicando los dos miembros de esta igualdad por el mismo número B, tendremos

$$A \times B = P \times Q \times B = P \times QB \text{ (n.° 26)};$$

luego bien podrá inferirse que P divide exactamente al producto AB.

128. SEGUNDO PRINCIPIO.—*Todo número entero* P *que divide exactamente á un producto* AB *y que es primo con uno de sus factores, divide igualmente al otro factor*.

Supongamos, por ejemplo, que P divisor exacto del producto AB sea primo con A: en este caso segun el principio que acabamos de esponer, P debe dividir á B.

Así es efectivamente, pues que siendo A y P dos números *primos entre sí*, resultaria que si se les aplicase el procedimiento del máximo comun divisor (n.° 52), se llegaria despues de un cierto número de operaciones á un último resto igual á 1.

Representemos, pues, por R, R', R'', R''', ... 1 los restos sucesivos de esta serie de operaciones (R', R'', R''',... se enuncian R^{prima}, $R^{segunda}$, $R^{tercera}$).

Supuesto esto, si en lugar de operar sobre A y B se aplicase el procedimiento á los productos $A\times B$, $P\times B$, es fácil echar de ver que en esta nueva serie de operaciones se obtendrian los mismos cocientes que en la primera; pero los restos serian respectivamente $R\times B$, $R'\times B$, $R''\times B$...., $1\times B$. Por consiguiente como el máximo comun divisor entre A y P es 1, el de los productos $A\times B$ y $P\times B$ es necesariamente $1\times B$ ó B.

Por otra parte se sigue del principio establecido en el n.º 51 *que todo número que divide á otros dos, divide tambien á su divisor comun*, pues que en virtud de este principio debe dividir al resto de cada una de las divisiones á que da lugar el procedimiento del n.º 52. Ahora bien, P divide á $A\times B$ por hipótesis; divide igualmente á $P\times B$; luego por precision debe dividir á $P\times B$, que es *lo que faltaba demostrar.*

Nota.—Es necesario suponer que P es primo con uno de los factores, porque por ejemplo, 56×15 ó 840 es divisible por 40 y da por cociente 21, aun cuando alguno de los números 56 y 15 no sea divisible por 40. Esto consiste en que siendo 40 igual á 8×5, se halla el primer factor 8 en 56 ó 7×8, y el segundo factor 5 en 15 ó 5×3; luego 56×15 es igual á $7\times 8\times 5\times 3$, ó á $7\times 3\times 8\times 5$, ó finalmente á 21×40.

129. Tercer principio.—*Todo número primo absoluto* P *que divide exactamente á un producto* $A\times B$, *debe dividir á uno de los dos factores.*

En efecto, supongamos que P no divida á A, será necesariamente *primo* con A (n.º 126) y deberá por lo tanto dividir á B (n.º 128).

De aquí resultan las consecuencias siguientes:

130. 1.ª *Todo número primo absoluto que divida á* A^2 *y en general á una potencia cualquiera* A^m de A, *debe dividir á* A.

Consideremos, pues, antes de pasar á la demostracion de este principio que $A^2 = A\times A$. Luego todo número primo que divida á este producto, debe (n.º 129) dividir á uno de sus factores. Del mismo modo A^3 siendo igual á $A^2\times A$, resulta que todo número primo que divída á A^3, debe dividir á A ó á A^2, y para dividir á este último factor debe dividir á A, y así sucesivamente.

131. 2.ª *Todo número* P, *primo con cada uno de los factores de un producto* $A\times B$, *es igualmente primo con este producto.*

Así es ciertamente, pues que un número primo absoluto que dividiera á A B, deberia dividir á A ó á B; en cuyo caso ni P ni A ó bien ni P ni B serian primos entre sí, proposicion contradictoria á la hipótesis establecida.

132. 3.ª *Siempre que un número* N *haya sido formado por la multiplicacion de muchos otros* A, B, C, D,..... *no podrá tener otros factores* primos *que los que entren en* A, B, C, D......

En efecto, todo número primo que divida al producto ABCD y no á D, debe dividir á ABC (n.º 129): por la misma razon todo número primo que divida á ABC y no á C, debe dividir á AB y por consiguiente á A ó á B.

O en otros términos, *estando formado un número por la multiplicacion de otros muchos, no puede obtenérsele de nuevo multiplicando números que encierren factores primos diferentes de los que entran en los números ya multiplicados.*

133. Cuarto y ultimo principio.—*Todo número* N *divisible por dos ó muchos números*, a, b, c..... *primos entre sí es divisible por su producto.*

Efectivamente, supuesto que a divide á N, se tendrá que a $N = aq$, siendo q un número entero; pero segun la hipótesis b divide tambien á N; luego dividirá á aq; y como a y b se suponen *primos entre sí*, será necesario (n.º 128) que b divida exactamente á q, y se tendrá $q = bq'$, de donde se deduce $N = a \times bq' = ab \times q'$. Así N es divisible por ab.

Por el mismo consiguiente dividiendo c á N debe dividir á $ab \times q'$, y siendo por otra parte c primo con a, b, lo será igualmente con ab (n.º 131). Luego c debe dividir á q', y se tendrá $q' = cq''$, de donde se deduce $N = ab \times cq'' = abc \times q''$, lo que prueba que N es divisible por abc, y así sucesivamente.

134. Consecuencia.—Si a, b, c,..... siendo números *primos entre sí*, entran cada uno de ellos como factor en N cierto número de veces espresado por n, p, q,..... el número N debe ser exactamente divisible por a^n, b^p, c^q,..... y por todos los números que se puedan obtener multiplicando dos á dos, tres &c... las diversas potencias de a, b, c,..... comprendidas desde la primera hasta aquella en que el grado de la potencia esté designado por n en a, por p en b, por q en c.....

La razon de esto es bien obvia, porque siendo a, b, c.... números primos entre sí, igualmente lo serán a^n, b^n, c^q.....; y por consiguiente (n.º 133) sus productos dos á dos, tres á tres..... deben ser divisores exactos de N.

Este principio sirve de base á *la investigacion de los divisores simples y compuestos de un número*, cuestion de que nos ocuparemos muy en breve.

135. Caracteres ó propiedades de la divisibilidad de un número por otros.—Hay ciertos indicios mediante los cuales se viene en conocimiento de si un número es ó no divisible por otros, lo cual es muy útil en la práctica.

Los razonamientos que debamos emplear para demostrar estos caracteres, estriban en el siguiente principio.

Sea un número A descompuesto en dos partes B y C, de modo que se tenga $A = B + C$.... (1).

1.º *Si un cuarto número* D *divide exactamente á las dos partes* B *y* C, *dividirá tambien á su suma* A (Véase n.º 51).

2.º *Si el número* D *divide á una de las partes* B *sin dividir á la* *otra* C, *no divide á* A, *y el resto de la division de* A *por* D *deberá ser igual al que da la division de* C *por* D.

La primera parte de este principio es fácil de demostrar, y para ello divídanse por D los dos miembros de la igualdad (1); y se tendrá

$$\frac{A}{D} = \frac{B}{D} + \frac{C}{D} \dots\dots (2).$$

Y como los dos términos del segundo miembro son números enteros, pues que B y C son por hipótesis divisibles por D, resulta que tambien deberá serlo el primer miembro, pues de lo contrario se tendria un número fraccionario igual á un número entero, lo cual como bien se ve es un absurdo, y por tanto no puede verificarse. Por consiguiente A es divisible por D.

En cuanto á la segunda parte, es bien claro segun la igualdad (2) que si siendo B divisible por D, C no lo fuese, A tampoco lo seria, pues de lo contrario resultaria un número entero igual á un número fraccionario. Pero ahora se trata de probar que *el resto de la division de* A *por* D *es igual al de la division de* C *por* D.

Para esto observemos que siendo B divisible por D, se tendrá $B = DQ$ (suponiendo á Q entero); y no siéndolo C por D, resulta $C = DQ' + R$.

Luego $B + C$ ó $A = DQ + DQ' + R = D(Q + Q') + R$ (n.º 112). De donde se ve que A dividido por D da por cociente $Q + Q'$ y por resto R, que no viene á ser mas que el resto de la division de C por D, siendo esto lo que se queria demostrar *.

Pasemos, pues, al análisis de los diversos caracteres y propiedades de la divisibilidad de los números.

136. Propiedades de los numeros 2 y 5, 4 y 25, 8 y 125...

1.º *Todo número terminado por una de las cifras* 0, 2, 4, 6, 8 *es divisible por* 2.

Demostracion.—Este número puede ser descompuesto en dos partes, á saber, la de la izquierda de las unidades simples considerada con su valor relativo, y la cifra de las unidades simples. (Por ejemplo, 38576, que es igual á 38570 + 6.) Ahora bien, la primera parte estando terminada por 0, es múltipla de 10; 10 es divisible por 2, pues que $10 = 2 \times 5$; luego esta primera parte es divisible por 2. Ademas 6 tambien es divisible por 2, pues que $6 = 2 \times 3$; luego el número propuesto terminado en la cifra 6 es divisible por 2 (n.º 135). Luego &c.

Si el número termina por una de las cifras 1, 3, 5, 7, 9, no será

* Todas las proposiciones establecidas desde el n.º 127 hasta el n.º 135 inclusive tienen lugar ó se verifican en cualquier sistema de numeracion.

divisible por 2, pues si una de las partes es divisible, la otra no lo es.

Nota.—Todo número divisible por 2 ó terminado por una de las cifras 0, 2, 4, 6, 8 se llama *número par*. Los otros son *números impares*.

Todos los números *pares* estan comprendidos en la fórmula $2n$, siendo n un número entero cualquiera, y los *impares* en la fórmula $(2n+1)$.

2.° *Todo número que acaba en* 0 *ó en* 5 *es divisible por* 5.—La misma demostracion nos conducirá á probar esto que la que empleamos para el divisor 2.

Si la última cifra no es 0 ni 5, el número no es divisible por 5; *y el resto de la division de este número por* 5 *es igual al resto de la division de la última cifra por* 5 (n.° 135); es decir, que el resto es la misma cifra si esta es menor que 5, y en el caso contrario el resto será el esceso de ella sobre 5.

Así 1327 dividido por 5 da 2 de resto, que es igual al resto de la division de 7 por 5 ó al esceso de 7 sobre 5.

Del mismo modo 34789 y 71436 dan respectivamente por restos 4 y 1.

3.° *Todo número será ó no divisible por* 5 *ó por* 25, *segun que sus dos últimas cifras lo sean ó no por* 4 *ó por* 25.

Demostracion.—Este número puede descomponerse en dos partes: la de la izquierda de las decenas considerada con su valor relativo, y la reunion de las decenas y unidades. (Por ejemplo, 3548 y 27875 equivalen á $3500+48$ y $27800+75$.) Ahora bien, la primera parte estando terminada por dos ceros, es múltiplo de 100; 100 es divisible por 4 ó por 25, pues que $100=25\times4$; luego esta primera parte es divisible por 4 ó por 25, pero la segunda parte es por hipótesis divisible por 4 ó por 25; luego todo el número lo es igualmente.

Así 3548 es divisible por 4, porque 48 es un múltiplo de 4; 27875 es divisible por 25, porque 75 es múltiplo de 25.

Pero 13758 no es divisible por 4 y da el resto 2, esto es, el mismo que el de la division de 58 por 4.

Tampoco es 25659 divisible por 25 y da el resto 9, ó el resto de la division de 59 por 25.

Nota.—Los únicos números divisibles por 25 son los terminados por 00, 25, ó 75.

4.° *Todo número es ó no divisible por* 8 *ó por* 125, *segun que lo sea ó no por* 8 *ó por* 25 *el número espresado por sus tres últimas cifras.*

No nos detendremos en presentar la demostracion por ser muy semejante á las anteriores. Así pues, bastará observar que está fundada sobre esta igualdad $1000=125\times8$; aun cuando por otra parte esta propiedad no está mayormente en uso.

137. Propiedades de los numeros 3 y 9.—*Todo número cuyas dos últimas cifras sumadas con su valor absoluto son divisibles por* 3 *ó por* 9, *él lo será tambien.*

Observemos desde luego que si de una potencia cualquiera de 10 ó de la unidad seguida de cierto número de ceros se sustrae 1, el resultado deberá ser divisible por 9, pues se compone de tantas cifras 9 escritas á continuacion unas de otras como ceros habia. Pero el valor absoluto de la cifra 9 es divisible, bien por 3 ó por 9; luego lo mismo se tendrá respecto de su valor relativo, que es un múltiplo de aquel; luego el resultado es asimismo divisible por 3 ó por 9.

Esto supuesto, para generalizar los razonamientos que acabamos de hacer, llamaremos N al número propuesto y designaremos por a, b, c, d... las cifras de sus *unidades*, *decenas*, *centenas*, *miles*,... y se tendrá N = ... $gfdcba$, ó mas bien en virtud del principio fundamental decimal

$$N = a + 10\, b + 10^4\, c + 10^3\, c + 10^4\, d + \ldots$$

Esta igualdad puede ponerse bajo la forma

$$N. = \begin{cases} +(10-1)\, b + (10^2-1)\, c + (10^3-1)\, d + (10^4-1) f + \ldots \\ +a \qquad\quad +b \qquad\qquad +c \qquad\qquad +d \qquad\qquad +f \quad +\ldots \end{cases}$$

(Por ejemplo, $10^3.\, d = 10^3.\, d - d + d = (10^3 - 1)\, d + d.$)

Pero como segun lo que acabamos de decir, las espresiones $10-1$, 10^2-1, 10^3-1,... y en general 10^n-1 siendo divisible por 3 ó por 9, la primera línea horizontal se compone de una serie de números múltiplos de 3 ó de 9, resulta que esta primera parte del número N es divisible por 3 ó por 9; y como la segunda, que no es otra cosa mas que *la suma de las cifras del número propuesto consideradas con su valor absoluto*, es por hipótesis divisible por 3 ó por 9, tendremos que todo el número N lo es igualmente.

138. Para obtener el resto de la division de un número cualquiera por 9 ó por 3 *bastará hacer la suma de sus cifras consideradas en su valor absoluto y dividirla por* 3 *ó por* 9. Si esta division no da resto alguno, es prueba de que el número propuesto es divisible por 3 ó por 9; mas si por el contrario resulta algun resto, será el mismo que el que se obtuviese dividiendo el número total por 3 ó por 9.

Esto que acabamos de decir, no es mas que una consecuencia del principio establecido en el n.º 135.

139. Propiedad del numero 11.—*Todo número cuya diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar* (contando de derecha á izquierda) *y la de las de lugar par sea* 0 *un múltiplo de* 11, *es divisible por* 11.

Antes de demostrar esta propiedad es necesario observar que

1.º *Toda potencia de* 10 *de un grado par disminuida de una unidad da un resultado divisible por* 11.

Demostracion.—Este resultado es una serie de cifras 9 de número par escritas á continuacion unas de otras; y como cada periodo de dos cifras forma 99 ó 9×11 y es por consiguiente divisible por 11, resulta que siendo el valor relativo de cada periodo múltiplo del valor absoluto, y este como ya hemos visto lo es de 11, tendremos que dicho resultado es exactamente divisible por 11. Y generalizando la cuestion se tiene $10^{2n} - 1$ divisible por 11 (espresando $2n$ un número par).

2.° *Toda potencia de un grado impar de* 10 *aumentada en una unidad da un resultado divisible por* 11.

Así es efectivamente, pues que una potencia cualquiera de un grado impar de 10 pudiendo ser espresada por 10^{2n+1} (n.° 136), se tendrá

$$10^{2n+1} = 10^{2n} \times 10 \text{ (Véase n.° 112);}$$

ó bien,

$$10^{2n+1} = 10^{2n} \times 10 - 10 + 10 = (10^{2n} - 1)\, 10 + 10;$$

y añadiendo 1 á los dos miembros,

$$10^{2n+1} + 1 = (10^{2n} - 1)\, 10 + 11.$$

Ahora bien, $10^{2n} - 1$ es divisible por 11 segun la primera observacion; 11 es por otra parte divisible por sí mismo; luego $10^{2n+1}+1$ es tambien divisible por 11.

Sentado esto, sea $N = hgfdcba$ el número propuesto. Segun el principio fundamental del sistema decimal de numeracion se tendrá

$$N = a + 10\,b + 10^2\,c + 10^3\,d + 10^4\,f + 10^5\,g + \ldots,$$

igualdad que puede ponerse bajo la forma

$$N. = \begin{cases} \quad +(10+1)\,b + (10^2-1)\,c + (10^3+1)\,d + (10^4-1)\,f + \ldots \\ +a \qquad -b \qquad\qquad +c \qquad\qquad -d \qquad\qquad +f \qquad -\ldots \end{cases}$$

Y como segun las dos observaciones anteriores la primera línea se compone de números esencialmente divisibles por 11, resultará que una primera parte por ellos constituida es divisible por 11. Pero la segunda parte no es otra cosa *que la diferencia entre la suma* $a + c + f + h\ldots$ *de las cifras de lugar impar* y *la suma* $b + d + g + \ldots$ *de las de lugar par*, que es divisible por hipótesis; luego el número total N es tambien divisible por 11.

140. Cuando la diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar y las de lugar par no es 0 ni múltiplo de 11, el número total no es divisible por 11, pues que una de las partes es divisible, mientras que la otra no lo es. Mas entonces hay dos casos que considerar relativamente al modo de obtener el resto de la division.

1.° *Si la suma de las cifras de lugar impar es mayor que la de las* *de lugar par*, la diferencia deberá ser añadida á la primera línea horizontal del valor de N. Designando esta primera línea por B y la diferencia que se ha de añadir por C, se tendrá $N = B + C$; y si C no es divisible por 11, *el resto de la division de* N *por* 11 *es el que se obtiene en la division de* C *por* 11 (n.º 135).

2.º *Si* por el contrario *la suma de las cifras de lugar par es mayor que las de lugar impar*, la diferencia deberá sustraerse de la primera línea, y tendremos $N = B - C$; representando por C el valor numérico de la diferencia.

Ahora bien, siendo B múltiplo de 11 y conteniendo C en general cierto múltiplo de 11 mas un resto R menor que 11, resulta que N ó $B - C$ puede ponerse bajo la forma

$$N = 11 \times m - R,$$

ó bien

$$N = 11\,(m - 1) + 11 - R.$$

Por donde se ve que en este caso *el resto de la division de* N *por* 11 *es igual*, no al resto de la division de C por 11, *pero sí al resultado que se obtiene restando* R *de* 11.

A fin de fijar las ideas propongámonos por ejemplo el número 47356708. Sumando las cifras de lugar impar y partiendo de la derecha se halla 27, y haciendo lo mismo con las de lugar par, 13. La primera suma es mayor que la segunda; luego si se toma la diferencia, que da 14, el resto 3 de esta diferencia dividida por 11 será igual al de la division del número total, lo cual es fácil de comprobar ejecutando las operaciones indicadas.

Pero si se tuviese el número 370546345, como la suma de las cifras de lugar impar es 15 y las de lugar par es $22 > 15$, resultaria que si se tomase la diferencia entre estas dos sumas, lo que da 7, el resto de la division del número total por 11 no seria 7, pero sí $11 - 7$ ó 4, como fácilmente puede comprobarse.

141. Pruebas para la multiplicacion y division por 9 y por 11.—Conviene para que estos Elementos formen un Tratado completo de Aritmética que no pasemos en silencio un medio muy fácil y sencillo de comprobar los resultados de la multiplicacion de los números enteros. He aquí el enunciado:

Hágase sucesivamente la suma de las cifras del multiplicando y la de las del multiplicador, cuidando quitar todos los 9 *que estas sumas contengan*: de este modo se obtienen *dos* restos, que (n.º 138) no vienen á ser otra cosa que los de ambos factores de la division por 9.

Multiplíquense estos dos restos uno por otro y búsquese del mismo modo el resto de la division de su producto por 9.

Finalmente, hágase la suma de las cifras del producto obtenido quitando de ella todos los 9 *que contenga*, y se obtendrá *un nuevo resto*, *que debe ser igual al anterior* para que la operacion sea exacta.

Sea por ejemplo multiplicar uno por otro los dos números 5786 y 475: efectuada la multiplicacion por el método ya conocido, se hace la suma de las cifras del multiplicando, quitando los 9 que contenga; así pues, comenzando por la izquierda se dirá: 5 y 7 son 12; de 12 quitando 9 quedan 3; 3 y 8 son 11; 11 menos 9 son 2; y por último 2 y 6 son 8, que siendo el resto de la division del multiplicando por 9 se escribirá por separado.

$$
\begin{array}{r}
5786 \\
475 \\
\hline
28930 \\
40502 \\
23144 \\
\hline
2748350
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
8 & 2 \\
\hline
7 & 2
\end{array}
$$

Hágase la misma operacion con el multiplicador y se tendrá el resto 7, que se escribirá debajo del 8.

Finalmente opérese sobre el producto total como sobre los dos factores, lo cual da el nuevo resto 2, que debe ser igual al precedente para que la operacion sea exacta.

Para presentar de un modo general la prueba por 9 representemos por A y B los dos factores propuestos, por Q, Q′, R y R′, los cocientes y restos de la division del multiplicando y del multiplicador por 9: en este caso se tendrán las igualdades siguientes:

$$A = 9 \times Q + R$$
$$B = 9 \times Q' + R'$$

Multiplicando ahora uno por otro los miembros de estas igualdades resultará (n.° 112)

$$AB = 9^2.\ QQ' + 9.\ Q'R + 9.\ QR' + RR'.$$

Y como los tres primeros términos del segundo miembro de esta nueva igualdad son evidentemente *múltiplos* de 9, resulta (n.° 135) que el resto de la division del producto AB por 9 debe ser igual al que dé el producto RR′ dividido por 9, que es lo que se queria demostrar.

Si uno de los dos factores de la multiplicacion es divisible por 9, el producto deberá serlo tambien, y entonces R y R′ desaparecen, pues resultan iguales á 0. Mas esto no tendrá lugar si el producto RR′ es múltiplo de 9.

En cuanto *á la prueba de la division*, pueden ocurrir dos casos, á saber, ó efectuada la division por el método ya conocido no resulta resto alguno, ó por el contrario sí resulta.

1.° — Si no hay resto, el dividendo deberá reconocerse como producto del divisor por el cociente obtenido; y en este caso puede aplicarse la regla anterior, considerando al divisor y al cociente como factores de una multiplicacion y al dividendo como producto de ella.

2.° — Si se obtiene un resto, como llamando N al dividendo total, D al divisor, Q al cociente y R al resto, se tiene la igualdad

$$N = DQ + R,$$

resulta que el resto de la division de N por 9 debe ser igual á la suma del resto de la division DQ por 9 y del resto de la division de R por 9 (suma que deberá en todos casos disminuírsele de 9 si es mayor que este último número).

Nota. — Siempre que se haga uso de la prueba por 9 y que el resto hallado en el producto total no sea igual al 3.^{er} resto, se puede inferir que la multiplicacion no se ha efectuado con exactitud; pero si por el contrario es igual al 3.^{o}, entonces podrá presumirse que la operacion es exacta, y no puede menos de ser así por dos razones principales: *la primera*, porque es muy probable se hayan podido escribir, bien en los productos parciales, bien en el producto total, ceros en lugar de los 9, y segun la naturaleza de la prueba no es nada estraño el que no se eche de ver el error: *la segunda*, porque dos cifras, ora pertenezcan á los productos parciales, ora al producto total, pueden ser la una mayor y la otra menor, *aunque del mismo número de unidades*; lo que daria lugar á una compensacion en la suma de las cifras del producto, y el error podria pasar sin advertirlo.

Esta prueba, si bien cómoda en la práctica, no es muy rigorosa, y por tanto no se la deberá considerar sino como complemento de la establecida en la primera parte, y solo se hará uso de ella como mas sencilla en los casos poco arduos y complicados, y en los que estemos casi seguros de la exactitud de la operacion.

La prueba por 11, que solo difiere de la prueba por 9 en el modo de obtener el resto de la division de un número por 11 (Véase n.^{o} 140), es preferible aun cuando tambien está sujeta á algunos errores, pues que estos tienen lugar muy de tarde en tarde.

Por otra parte estas pruebas son susceptibles de aplicarse igualmente á la multiplicacion que á la division de los quebrados decimales, pues que tales operaciones se efectuan del mismo modo que las de los números enteros.

142. Tambien hay propiedades por cuyo medio se puede reconocer si un número es divisible por los números *primos* 7, 13, 17...; pero las reglas que para esto es necesario seguir, son mucho mas complicadas que la operacion que se hace para ensayar directamente la division del número propuesto por 7, 13, 17.... Por lo demás, estas cuestiones, que verdaderamente son de pura curiosidad, exigen nociones de Algebra mas profundas que las que hasta el presente hemos dado á conocer.

Por tanto solo aconsejaremos á los principiantes se ejerciten sobre la siguiente cuestion: *Hallar en un sistema cualquiera de numeracion cuya base es* B *cuáles son los números que gozan de las propiedades análogas á las de* 9 *y* 11 (*once*) *en el decimal*, *y demostrar estas* *propiedades*. Cuestion que es bien fácil de resolver teniendo presente que en todo sistema de numeracion cualquier potencia de la base está espresada por la unidad seguida de tantos ceros como unidades contiene el grado de la potencia, es decir, por 10^n, representando por n dicho grado.

143. En cuanto á las *propiedades de la divisibilidad* de un número por los múltiplos 6, 12, 15, 18, 36, 45 de los números primos 2, 3 y 5, son bastante fáciles de hallar, y por tanto no nos detendremos en esplicarlas.

1.° Un *número es divisible por* 6 *ó por* 18 cuando *es par* y la suma de sus cifras consideradas en su valor absoluto *es divisible por* 3 *ó por* 9.

La razon de esto es muy sencilla, porque cuando el número tenga las propiedades que acabamos de establecer, será divisible por 2 y por 3 ó por 9; pero 2 y 3 ó 2 y 9 son primos entre sí; luego (n.° 133) el número propuesto es divisible por 6 ó por 18.

2.° *Un número es divisible por* 12 *ó por* 6 cuando sus dos últimas cifras consideradas en su valor relativo forman un número *múltiplo de* 4 y su suma es además *divisible por* 3 *ó por* 9; porque entonces siendo el número divisible por 4 y por 3 ó por 9, lo es igualmente por 4×3 ó por 4×9, es decir, por 12 ó por 36.

3.° Finalmente *un número es divisible por* 15 *ó por* 45 cuando siendo su última cifra 0 ó 5, la suma de todas es divisible por 3 ó por 9, pues que en este caso el número es divisible por 5 y por 3 ó por 9, y por consiguiente por 15 ó por 45.

Dadas ya estas nociones sobre la divisibilidad de los números, nos parece conveniente pasemos á esponer el medio de hallar todos los divisores simples y compuestos de un número, deteniéndonos muy particularmente en esta cuestion por ser de gran importancia.

144. Sea N un numero cuyos divisores simples y compuestos se quieren hallar.

Representemos por a el menor *número primo* (contando desde 2 en adelante) que divida á N, y efectuemos la division de N por a cuantas veces sea posible: sea n el número de veces que ha podido efectuarse dicha division, y se tendrá $N = a^n \times N'$, no conteniendo N' al factor a. Pero como todo número diferente de a que divide á N debe (n.° 129) dividir á N', resulta que la investigacion de los factores primos de N distintos de a se reduce á la de los factores de N', número mas simple que N.

Designemos por b el menor *número primo* que divide á N', y por p el número de veces que este factor entra en N', tendremos $N' = b^p \times N''$; de donde se deduce $N = a^n b^p \times N''$, no conteniendo N'' á los factores primos a y b.

Del mismo modo representemos por c el menor número primo que divide á N'', y por q el número de veces que este factor entra en N'': se tendrá $N'' = c^q \times N'''$, y por consiguiente $N = a^n b^p c^q \times N'''$.

Continuando esta série de operaciones se llegará á obtener un cociente, que será número primo ó cierta potencia de un número primo (circunstancia bien fácil de reconocer, pues tomando este número primo por divisor cuantas veces sea posible, *se termina la operacion hallando un cociente igual á la unidad*).

Supongamos, pues, para fijar mas las ideas que N''' sea igual á d^r, siendo d un número primo: se tendrá $N = a^n b^p c^q d^r$, representando por a, b, c, d (n.° 132) los solos factores primos que pueda contener N.

En este caso se dice que el número N *está descompuesto en sus factores simples.*

Si se quieren formar los divisores compuestos, será necesario (n.° 134) determinar todos los productos que se pueden obtener multiplicando dos á dos, tres á tres &c... las potencias de los factores primos comprendidos desde la primera hasta la potencia n para a, p para b, q para c....

A fin de que despues de hecha la operacion podamos estar seguros de haber obtenido todos los divisores del número propuesto, parece muy oportuno seguir cierto órden en la práctica, y para esto se formarán las dos tablas siguientes:

Propongámonos hallar los divisores simples y compuestos del número 5880.

Primera tabla.—Investigaciones de los divisores simples.

5880	2
2940	2
1470	2
735	3
245	5
49	7
7	7

Despues de trazada á la derecha de 5880 una línea vertical, se escribirá á su lado y en frente de 5880 un 2, que es su menor divisor: efectúese la division por dicho factor, y el resultado 2940 colóquese debajo de 5880.

Como 2940 es igualmente divisible por 2, se escribirá otro 2 debajo del anterior, poniendo el nuevo cociente 1470 debajo de 2940.

1470 es tambien divisible por 2, y por tanto se colocará este nuevo divisor debajo del que precede, y el nuevo cociente debajo de 1470.

El cociente 735 no es divisible por 2, pero sí lo es por 3, que es el menor número primo que hay contenido de 2 en adelante: escribase este 3 debajo del anterior divisor, divídase 375 por 3, y se tendrá un cociente 245, que se colocará bajo 735.

245 no es divisible por 3, mas sí por 5, que se escribirá enfrente de 245 y al lado de la línea, y efectuando la division se tendrá 49

por cociente; en cuya colocacion se seguirá el mismo órden que en los anteriores.

49 tiene por divisor á 7, que se colocará debajo de los precedentes, y el resultado 7 de su division por él, debajo del mismo 49.

Finalmente, siendo 7 un número primo será divisible por sí mismo, y por tanto se le repetirá como factor, colocándolo debajo de los anteriores, con lo que quedará terminada la operacion.

Tendremos, pues, por resultado final de estas operaciones la fórmula

$$5880 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2;$$

y el número se halla de este modo *descompuesto en sus factores simples*.

Segunda tabla.—Esta consta de la formacion de todos los divisores simples y compuestos del número dado (Véase la siguiente página).

Para obtener todos estos divisores se escribirán desde luego sobre una misma línea horizontal los *cuatro* números 1, 2, 4, 8, que son evidentemente divisores de 5880, pues que 1 es divisor de todo número, y segun la descomposicion practicada en la tabla primera 5880 tiene por factores 2^1, 2^2, 2^3.

Hecho esto, se multiplican todos los términos de esta primera línea por el factor 3, lo cual dará una nueva serie de divisores compuesta de los números 3, 6, 12, 24, que ocuparán una segunda línea colocada bajo la anterior.

Pasando al factor 5 se multiplicarán todos los términos de las dos líneas precedentes por él, cuya operacion dará los nuevos divisores 5, 10..... 15, 3.....

En cuanto al factor 7, como entra *dos* veces en el número propuesto, se multiplicarán por él todos los términos de las cuatro líneas anteriores, lo cual da *cuatro líneas* de divisores; y además estas cuatro últimas se multiplicarán tambien por 7, cuya segunda operacion da otras *cuatro* nuevas líneas de divisores.

Resultan, pues, por total 12 líneas de á 4 números cada una, que componen 48 números divisores todos de 5880.

He aquí la tabla de operaciones:

$$\begin{array}{rrrrl}
1, & 2, & 4, & 8 & = 2^3 \\
3, & 6, & 12, & 24 & = 2^3 \times 3 \\
5, & 10, & 20, & 40 & \\
15, & 30, & 60, & 120 & = 2^3 \times 3 \times 5 \\
7, & 14, & 28, & 56 & \\
21, & 42, & 84, & 188 & \\
35, & 70, & 140, & 280 & \\
105, & 210, & 420, & 840 & = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \\
49, & 98, & 196, & 392 & \\
147, & 294, & 588, & 1176 & \\
245, & 490, & 980, & 1960 & \\
735, & 1470, & 2940, & 5880 & = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2.
\end{array}$$

Una lijera inspeccion sobre la presente tabla bastará para echar de ver, 1.° que todos los productos obtenidos en esta operacion son divisores del número propuesto (esto resulta de la espresion $5880 = 2^3.3.5.7^2$), y 2.° que este número no podria menos de tener tales divisores (Véase n.° 132).

NOTA.—En la práctica conviene para la formacion de la segunda tabla escribir sobre una primera columna horizontal las potencias del primer factor que entra el *mayor número de veces* en el número propuesto: en cuanto al órden de los demás factores, es indispensable cualquiera que sea el que se observe, siempre que haya claridad.

Para ejercicio de los principiantes propondremos por ejemplo hallar todos los divisores simples y compuestos de los números

$$1764, \quad 1665, \quad 5670, \quad 30527,$$

que se reconocerán ser respectivamente iguales á

$$2^2.3^2.7^2, \quad 3^2.5.37, \quad 2.3^4.5.7, \quad 7^3.89.$$

145. Hecha la descomposicion de un número en sus factores simples, puede obtenerse fácilmente la espresion que indique el *número total de divisores* que contiene el número propuesto, sin necesidad de formar la segunda tabla.

En efecto, volvamos de nuevo á la espresion general

$$N = a^n b^p c^q d^r,$$

y consideremos la primera línea de los divisores

$$1, a^1, a^2, a^3, \ldots a^n,$$

cuyo número está espresado por $(n + 1)$.

Multiplicando todos los números de esta primera línea sucesivamente por los términos $b^1, b^2, b^3, \ldots b^p$, cuyo número está espresado por p, se tendrá un número p de nuevas líneas de divisores, constando de $(n+1)$ términos ó $(n+1) \times p$ divisores, á los cuales es necesario añadir los $(n+1)$ divisores de la primera línea, lo cual da

$$(n+1)\,p + (n+1) \text{ ó } (n+1)\,(p+1).$$

(Todos estos divisores son potencias de a y de b tomadas aisladamente ó combinadas dos á dos.)

Multiplicando ahora todos los términos de estas diferentes líneas de divisores sucesivamente por los términos $c^1, c^2, c^3, \ldots c^q$, cuyo número está espresado por q, obtendremos un número de nuevas líneas de divisores espresado por $(n+1)\,(p+1) \times q$, al cual deberá añadirse el número $(n+1)\,(p+1)$ de los divisores anteriormente formados.

Así pues, el número total de los divisores ya obtenidos estará bien espresado por

$$(n+1)\,(p+1) \times q + (n+1)\,(p+1) \text{ ó } (n+1)\,(p+1)\,(q+1);$$

y así sucesivamente.

De donde se deduce la siguiente regla: *auméntese en una unidad cada uno de los esponentes* n, p, q *de los diferentes factores primos que entran en* N, *y multiplíquense entre sí estos esponentes ya aumentados en una unidad*; *y el producto espresará* EL NUMERO TOTAL *de los divisores de* N *comprendidos en la unidad y en el número mismo*, que deberán entrar á formar parte de las líneas que constituyen la tabla de operaciones.

En el ejemplo anterior, como hemos hallado

$$5880 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^2,$$

se deberá tener $(3+1)\ (1+1)\,(2+1)$ ó 4.2.2.3 ó 48 por el número total de los divisores, que es lo que efectivamente resulta de la formacion de la segunda tabla.

146. OBSERVACION.—Sucede algunas veces que al ensayar la division de un número N por los factores primos 2, 3, 5, 7, ... no se halla número alguno que le divida exactamente. Así, *luego que se haya llevado la operacion hasta la parte entera de la raiz cuadrada de* N (Véase el n.º 108, 7.º) *sin hallar divisor alguno exacto, debe tenerse por inútil el hacer la prueba con nuevos divisores, y podrá asegurarse que* N *es un número primo.*

Por tanto 73 es un número primo, porque la raiz cuadrada de 73 se halla comprendida entre 8 y 9, y ningun número entero hasta el 8 inclusive divide exactamente á 73.

Para demostrar esta proposicion, sean dos números A y B cuyo producto sea igual á N, y designemos por R la raiz cuadrada de N.

Se tendrá $$A \times B = R \times R.$$

Luego para que esta igualdad subsista se necesita evidentemente que si se tiene $A > R$, sea $B < R$, para que haya compensacion; lo cual prueba que no puede haber un divisor de N mayor que R, pues que no lo hay menor. Así pues, el número propuesto es *primo*.

Los jóvenes que esten al corriente en la estraccion de la raiz cuadrada, reconocerán con poca dificultad, segun la observacion anterior, que 113, 719, 977, 3329, 8123 ... son números primos *.

147. FORMACION DE UNA TABLA DE LOS NUMEROS PRIMOS.

Propongámonos por ejemplo formar una tabla de todos los números primos contenidos desde 1 hasta 1000.

Concibiendo escritos unos á continuacion de otros los 1000 primeros números, se comienza por suprimir, 1.º todos los números pares que no sean 2; 2.º todos los múltiplos de 3 que no sean 3 (n.º 137); y 3.º todos los números acabados en la cifra 5 que no sean el 5 (n.º 136).

Hechas estas primeras supresiones, podrá tenerse por cierto que todos los números comprendidos desde 1 hasta 7×7 ó 49 y que no han sido borrados, son primos (pues que el menor múltiplo de 7 restante no puede ser otro que 7×7).

Así todos los números primos desde uno hasta 47 pueden tenerse por conocidos mediante esta operacion.

Si ahora se suprimen todos los múltiplos de 47, partiendo de 49, se puede asegurar que los números no suprimidos hasta 11×11 ó 121 inclusive son primos (pues que todos los múltiplos de 11 inferiores á este han debido desaparecer).

Luego todos los números primos desde 1 hasta 113 son conocidos.

Borrando de nuevo todos los múltiplos de 11 desde 11×11, se podrá inferir que todos los números no tildados y comprendidos desde 113 hasta 167 (número primo inmediatamente inferior á 169 ó 13×13) son números primos, y así sucesivamente.

Por lo que hasta aquí llevamos dicho podrá ya juzgarse de cuán fácil es el formar una tabla de números primos, por estensa que se suponga ser **.

148. REDUCCION DE LOS QUEBRADOS Á UN COMUN DENOMINADOR.—

---

* Quienes no esten al alcance de la práctica que esta operacion exije, podrán atenerse á la siguiente regla:

Cuando *despues de haber ensayado sucesivamente sin fruto alguno los números primos* 2, 3, 5, 7, ... *se obtiene un cociente menor que el último divisor ensayado, se puede asegurar que el número en cuestion es* PRIMO.

** Este método es conocido bajo el nombre de CRIBA DE ERASTOTENIO.

La regla general establecida (n.° 47) para la reduccion de dos ó mas quebrados á un comun denominador conduce por lo regular á quebrados cuyos términos son muy grandes. Sin embargo, cuando los denominadores primitivos contienen factores comunes, es bastante fácil obtener un número menor que su producto, el cual puede servir de denominador comun á todos los quebrados. Es, pues, una cuestion muy importante de tratar por la sencillez de los cálculos la que consiste en *determinar el mínimo múltiplo comun á los denominadores de dos ó muchos quebrados*.

He aquí la regla que deberá seguirse para obtener este número:

Descompónganse segun la regla n.° 144 *los diferentes denominadores en sus factores primos, y fórmese en seguida el producto de todos estos factores primos elevados respectivamente á la mayor de las potencias á que se hallan elevados en los diferentes denominadores.* El producto así formado es *el número pedido.*

Resulta de aquí, 1.° que este número es *múltiplo* de cada denominador, pues que contiene todos los factores primos elevados á una potencia por lo menos igual á la que estaban dichos denominadores; y 2.° que es el *mínimo múltiplo comun á todos*, porque para contener exactamente á un denominador cualquiera es necesario que contenga cada factor primo elevado á una potencia al menos igual á la que está este denominador.

Sean por ejemplo los seis quebrados siguientes que se quieren reducir á un comun denominador:

$$\frac{13}{60}, \frac{17}{28}, \frac{23}{240}, \frac{173}{225}, \frac{319}{490}, \frac{523}{720}.$$

Los seis denominadores descompuestos en sus factores simples segun la regla conocida se reducen á

$$2^2.3.5,\ 2^2.3.5,\ 3^2.5^2,\ 2.5.7^2,\ 2^4.3^2.3^5.$$

Los únicos factores primos que entran en estos denominadores son 5 y 7, y las mayores potencias á que se hallan elevados, 2^4, 3^2, 5^2, 2, 3, 7^2. Formando, pues, el producto de estas mayores potencias, se halla 176400 para el mínimo múltiplo comun á todos los denominadores, y él es el denominador comun al que se trata de reducir todos los quebrados.

Para ejecutar esta operacion se divide por separado el denominador comun por el de cada uno de los quebrados propuestos, y se multiplica el numerador por el cociente hallado.

Así limitándonos al presente ejemplo, consideremos el primer quebrado.

La division de 176400 por 60 da 2940 por cociente, de londe multiplicando el numerador de este quebrado por 2940 se obtiene $\frac{38220}{176400}$.

Pasando al segundo quebrado y dividiendo 176400 por 28, se tendrá por cociente 6300, y multiplicando el numerador por 6300, resulta el nuevo quebrado $\frac{107100}{176400}$.

Repitiendo las operaciones análogas tendremos para los cuatro últimos quebrados

$$\frac{16905}{176400}\quad\frac{135632}{176400}\quad\frac{114840}{176400}\quad\frac{128135}{176400}.$$

Aun cuando estas operaciones no dejan de ser algo complicadas, sin embargo no lo son tanto como si se siguiese la regla establecida en la primera parte (n.° 47) conforme á la cual hubiéramos obtenido un denominador comun incomparablemente mayor que 176400, cual es 32006016000000.

Por otra parte la descomposicion de los denominadores en sus factores simples se hace casi siempre con la sola inspeccion de estos números, sobre todo cuando contienen muchas veces los factores 2, 3, 5, para los que se reconocen *caracteres propios de divisibilidad*, del mismo modo que para los múltiplos 4, 6, 8, 9, 12, 15, 18, 24, 25, 36, 75...

Propondremos para ejercicio de los principiantes los quebrados siguientes

$$\frac{13}{20},\ \frac{17}{48},\ \frac{113}{280},\ \frac{527}{960},\ \frac{1211}{1800},\ \frac{3613}{5040},\ \frac{5237}{6860}.$$

(El mínimo múltiplo de todos los denominadores de estos quebrados es $2^6.3^2.5^2.7^3 = 4939200$.)

149. Observaciones sobre el maximo comun divisor. — En el n.° 52 hemos establecido un procedimiento propio para obtener el número mayor que divida á la vez dos números propuestos. Este procedimiento es sencillo, y la demostracion que de él hemos dado no deja nada que desear en cuanto á su precision y exactitud. Mas sin embargo vamos á dar á conocer ciertas propiedades del máximo comun divisor, que nos suministran algunas simplificaciones para la práctica.

Supuesto que un número entero cualquiera descompuesto en sus factores simples no puede tener otros divisores (n.° 132) que estos factores primos y sus combinaciones de dos á dos, tres á tres &c., resulta que dos números enteros no tendràn por divisores comunes mas que los factores primos comunes ó las combinaciones comunes de estos factores.

Luego el máximo comun divisor de dos ó muchos números es el producto de los factores primos comunes á ellos, elevados respectivamente á la menor de las potencias á que se hallan elevados en los números propuestos.

Consecuencia.—*Todo divisor comun de muchos números divide á su máximo comun divisor.* (Esta proposicion ha sido ya establecida en el n.° 52, aun cuando limitando su aplicacion no mas que á dos números.)

150. Esta propiedad da lugar á un nuevo medio de determinar el máximo comun divisor de dos números A y B, y es el siguiente: *empiécese por buscar todos los divisores del número* A *segun el método del* n.° 114 *y en seguida los de* B; *hecho esto, el mayor de los divisores que sean comunes á ambas tablas será el divisor pedido.*

O bien, *despues de haber descompuesto los dos números dados tan solo en sus factores simples* (n.° 144), *se hará un producto de los factores primos comunes elevados repentinamente á la menor de las dos potencias á que se hallen elevados en los dos números.*

Sean por ejemplo los dos números 2150 y 3612 *cuyo máximo comun divisor se quiere hallar.*

$$\begin{array}{r|l} 2150 & 2 \\ 1075 & 5 \\ 215 & 5 \\ 43 & 43 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3612 & 2 \\ 1806 & 2 \\ 903 & 3 \\ 301 & 7 \\ 43 & 43 \end{array} \qquad 2 \times 43 = 86.$$

Resulta por los divisores simples de 2150..... 2, 5, 5, 43,
y por los de 3612......................... 2, 2, 3, 7, 43.
Luego 2×43 ú 86 es el máximo comun divisor pedido.

(Además se ve que 5×5 ó 25 y $2 \times 3 \times 7$ ó 42 son los cocientes de la division de 2150 y 3612 por 86.)

151. Este procedimiento es casi siempre menos sencillo que el que por lo regular se emplea, sobre todo cuando en la práctica se hace uso de las siguientes modificaciones:

Supuesto que el máximo comun divisor de dos números no se compone mas que de los dos factores primos comunes á ellos, *se puede suprimir en uno de dicho número un factor comun suyo que no se halle en el otro.*

Tambien se podrá (si se quiere) *suprimir un factor que sea evidentemente comun á los dos*, con tal que al fin de la operacion subsiguiente se compense dicha supresion *multiplicando el resultado hallado por el factor suprimido.*

Observemos por otra parte que siendo el máximo comun divisor de los dos números (n.° 52) el mismo que el que hay entre el menor número y el primer resto, entre este y el segundo &c...., resulta que *estas supresiones pueden hacerse tambien en cada una de las operaciones que abraza el procedimiento.*

Apliquemos lo que acabamos de decir á los dos números 2150 y 3612.

Desde luego se ve que 2150 contiene al factor 5, y además á 25 que no entra en 3612: así pues, suprimiremos á este último y tendremos 86 por cociente.

Del mismo modo 3612 contiene al factor 3, que por otra parte no entra en 2150: suprímasele pues, y el cociente que resulte será 1204.

Ahora bien, como 2 es evidentemente factor comun á los dos números 86 y 1204, tendremos la cuestion reducida á hallar el máximo comun divisor entre 43 y 602.

Dividiendo 602 por 43, se halla un cociente exacto 14: luego 43×2 ú 86 es el máximo comun divisor pedido.

Sean los dos nuevos números 377 *y* 249.

Suprímase desde luego el factor 3, comun solamente á 249, y la cuestion quedará reducida á hallar el máximo comun divisor entre 377 y 83; en cuyo caso pasemos á aplicar el procedimiento á dichos dos números.

Dividiendo 377 por 83 se tiene por cociente 4 y por resto 45; pero en lugar de dividir 83 por 45, como se observa que $45 = 3^2 . 5$ y los factores 3 y 5 no entran en 83, se podrán suprimir dichos factores en 45, lo cual da por cociente final la *unidad.* De donde se infiere que 377 y 83 y por consiguiente 377 y 249 son primos entre sí.

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 377 & 83 \\ 45 & \end{array}$$

Cuando se está ya algo familiarizado con estas operaciones, las modificaciones que acabamos de presentar abrevian mucho la práctica del procedimiento. Por lo demás nosotros al presentarlas en estos Elementos solo hemos consultado *su necesidad en la investigacion del máximo comun divisor algebráico.*

152. Puede suceder tener que hallar el máximo comun divisor de mas de dos números. He aquí la regla que en este caso deberá seguirse:

(A fin de abreviar el discurso representaremos las tres palabras *máximo comun divisor* por las letras *m. c. d.*)

Para hallar el *m. c. d.* entre muchos números á la vez es necesario buscar el *m. c. d.* primeramente entre solos dos de estos números; en seguida el *m. c. d.* entre el que acaba de ser hallado y un tercer número; despues el *m. c. d.* entre este último comun divisor y un cuarto número, y así sucesivamente.

Sean pues A, B, C, E, F.... los números propuestos: llamemos D al *m. c. d.* de A y B y D' al de D y C, y segun los principios anteriormente establecidos podemos decir que D' es el *m. c. d.* de A, B, C. En efecto, el *m. c. d.* de A, B y C debiendo dividir á A y B, divide asimismo á D, que es su *m. c. d.* (Véase n.° 52); por otra parte divide á C, y por tanto debe dividir á D′, que es por hipótesis el *m. c. d.* de D y C. Ahora bien, dividiendo D′ á D, divide á A y B: así D′ divide á A, B, C, y por consiguiente á su *m. c. d.* Luego este *último número* y D′ son recíprocamente divisibles uno por otro; luego son iguales.

Por el mismo consiguiente, el *m. c. d.* que hay entre A, B, C, E debiendo dividir á A, B, C, divide asimismo á D′, que es su *m. c. d.*;, pero tambien divide á E; luego debe igualmente dividir al *m. c. d.* D″ que hay entre D′ y E. Por otra parte dividiendo D″ á D′, debe dividir á A, B, C; divide tambien á A, B, C, E, y por consiguiente á su *m. c. d.* Siendo este último número y D″ recíprocamente divisibles uno por otro, son iguales.

Continúese así la operacion.

Nota.—A primera vista se concibe la gran ventaja que puede haber en la práctica operando desde luego sobre los dos números menores, pues que el *m. c. d.* pedido no podrá ser mayor que el que haya entre estos dos números.

Mediante este procedimiento se hallará que el máximo comun divisor entre los números 504, 756, 1260 y 2058 es 42.

Tambien podrá procederse desde luego á hallar los cuatro divisores simples y operarse para dos números como queda dicho en el n.° 150.

153. Observaciones sobre las fracciones ó quebrados irreductibles.—Se llama quebrado ó fraccion irreductible (n.° 54) *aquel que no puede ser reducido á una espresion menor que la que le es propia.*

Resulta evidentemente de esta definicion que *los dos términos de un quebrado irreductible son primos entre sí*, pues si tuviesen otro factor comun además de la unidad, podria obtenerse dividiéndolos por él una espresion mas sencilla para el quebrado, lo cual seria contradictorio al principio establecido.

Y recíprocamente, *todo quebrado cuyos términos son primos entre sí es irreductible.*

Efectivamente, representemos por $\frac{a}{b}$ el quebrado propuesto cuyos términos a y b son por hipótesis primos entre sí y por $\frac{c}{d}$ igual al primero.

Se tendrá $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ de donde } c=\frac{ad}{b}.$$

Pero es así que c es un número entero; luego $\frac{ad}{b}$ debe serlo tambien; y como por hipótesis b es primo con a, resulta (n.° 128) que b debe dividir á d, y se tendrá $d=bq$.

Sustituyendo el valor de d en el de c se obtiene

$$c = \frac{abq}{b} = aq.$$

Esto prueba hasta la evidencia que para que un quebrado $\frac{c}{d}$ sea equivalente á otro $\frac{a}{b}$ cuyos términos son primos entre sí, es necesario que *los dos términos* c y d *sean equimúltiplos de* a *y* b.

Luego la fraccion $\frac{a}{b}$ no puede ser equivalente á ninguna otra menor.

De aquí resulta que cuando se han dividido los dos términos de un quebrado por su máximo comun divisor, *el quebrado restante es irreductible*; proposicion que hemos enunciado, aunque sin demostrarla, en el n.° 54.

154. De lo que acabamos de decir puede inferirse que *dos quebrados irreductibles no pueden ser iguales, á no ser que haya identidad, bien en cuanto á los numeradores ó con respecto á los denominadores.*

Así es efectivamente, pues que siendo irreductible el primer quebrado, sus dos términos deben ser *primos entre sí*, y por consiguiente para que el segundo le sea igual, es necesario que sus dos términos sean *equimúltiplos* respecto de los del primero; y como el segundo quebrado tiene tambien sus dos términos primos entre sí, estos deben ser simplemente iguales á los del primero.

§ III. Fracciones decimales periódicas.

155. La valuacion de un quebrado en fraccion decimal, esto es, en *décimas*, *centésimas*... de la unidad principal, da lugar á circunstancias que merecen de por sí se les examine detenidamente; mas antes de darlas á conocer vamos á recordar el procedimiento que sirve para reducir un quebrado ó fraccion decimal.

Ya hemos visto (n.° 91) que para hacer esta reduccion es necesario, despues de haber colocado un 0 en el cociente y una coma á su derecha, 1.° *poner á la derecha del numerador un* 0 y *dividir el número resultante por el denominador*, lo que da en el cociente *décimas* y un resto; 2.° *poner un nuevo* 0 *á la derecha del resto hallado y proceder en seguida á su division por el denominador*, operacion que da *centésimas* y un segundo resto; y 3.° *poner á la derecha de este resto otro* 0 *y dividirlo por el denominador*: continúese así esta serie de operaciones hasta haber obtenido el grado de aproximacion que se quiera.

Ahora bien, es evidente que poner sucesivamente á la derecha de los diferentes restos tantos ceros como cifras decimales se quieren hallar equivale á escribir todo seguido á la derecha del numerador del quebrado propuesto todos estos ceros, es decir, á *multiplicar el numerador por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales se quieran hallar*, *á dividir el producto resultante por el denominador y á separar hácia la derecha del cociente el número de cifras decimales pedido*; pues segun el procedimiento que por lo comun se observa en la division de los números enteros, es bien claro que es preciso para continuar la division bajar á la derecha del resto hallado la siguiente cifra del dividendo.

Esta observacion nos servirá de mucha utilidad para demostrar las dos propiedades siguientes:

156. 1.ª *Todo quebrado cuyo denominador no contenga otros* FACTORES PRIMOS *que* 2 *y* 5, *no puede reducirse á fraccion decimal de un* LIMITADO *número de cifras*; es decir, que al cabo de cierto número de operaciones deberá llegarse á un resto igual á 0, en cuyo caso la fraccion decimal obtenida espresa el valor exacto del quebrado propuesto.

Además si este es irreductible (lo que siempre podrá suponerse), *el número total de las operaciones que haya que efectuar, estará representado por el mayor de los dos esponentes de* 2 *y* 5 *que entran en el denominador.*

Así los quebrados $\frac{7}{8}, \frac{13}{25}, \frac{11}{40}, \frac{317}{1240}$ que pueden ponerse bajo la forma

$$\frac{7}{2^3}, \frac{13}{5^2}, \frac{11}{2^3.5}, \frac{317}{2^2.5^4}$$

no pueden reducirse á un quebrado decimal de un *limitado* número de cifras.

El primero y tercero dan lugar á 3 operaciones, el segundo á 2 y el cuarto á 4.

Así se hallan por sus valores decimales

$$0{,}875; \quad 0{,}52; \quad 0{,}275; \quad 0{,}2536;$$

lo cual podrá comprobarse muy fácilmente haciendo la reduccion á decimales, segun el procedimiento que ya sabemos.

Para conocer bien á fondo esta propiedad observemos que 10, 100, 1000... siendo iguales á 2.5; $2^2.5^2$; $2^3.5^3$,... para hacer la reduccion á decimales se multiplica (n.° 155) el numerador por 10, 100, 1000..., el producto resultante deberá ser divisible por 2.5; $2^2.5^2$; $2^3.5^3$...; luego si se multiplica este numerador por la unidad seguida de tantos ceros como unidades hay en el mayor de los esponentes de 2 y 5 que contiene el denominador, el producto resultante será por precision múltiplo de este denominador.

Luego el número de operaciones que se debe efectuar es *limitado* y asimismo igual al mayor de los esponentes de 2 y 5 que entran en el denominador.

157. 2.ª *Todo quebrado cuyo denominador contenga uno ó muchos factores primos que no sean 2 y 5 y que tampoco entren en el numerador, da lugar á una fraccion decimal de un número de cifras* LIMITADO *ó* INFINITO. Además *esta fraccion decimal* es PERIODICA; es decir, que despues de cierto número de operaciones se reproducen las mismas cifras decimales halladas y en su mismo órden.

En efecto, la multiplicacion del numerador por 10, 100, 1000... no hace mas que introducir en él los factores primos 2 y 5 elevado cada uno á cierta potencia; así es que el *factor primo* que se supone existir en el denominador sin entrar en el numerador, no se hallará (n.º 129) en el producto de este por una potencia cualquiera de 10. Luego sea cual fuere el número de ceros añadidos, no se podrá obtener un producto exactamente divisible por el denominador, y las operaciones se estenderán por lo tanto hasta lo *infinito*.

Es además *periódica*, porque como segun el procedimiento del número 155 cada resto que se obtiene es menor que el divisor que permanece *constante*, resulta que cuando se hayan hecho *al menos* tantas operaciones como unidades hay en el divisor *menos una*, se deberá encontrar ó volver á uno de los restos ya obtenidos.

Luego escribiendo un cero á la derecha de este resto, se tendrá un nuevo dividendo parcial *semejante* á los anteriores, y puesto que el divisor es el mismo, el nuevo cociente y el nuevo resto serán igualmente *semejantes* á los que habian dado el primer dividendo y divisor. Escribiendo á la derecha de este resto otro cero, se obtendrá el dividendo parcial que seguia inmediatamente al primer lugar hallado, y por lo tanto el cociente que le corresponde. Continúese así la operacion.

Luego con arreglo á esto se tendrá que *ciertas cifras del cociente deben reproducirse periódicamente y en el mismo órden.*

Hagamos algunas aplicaciones.

158. PRIMER EJEMPLO.—Propongámonos reducir á decimales el quebrado $\frac{6}{7}$.

$$
\begin{array}{l|l}
60 & 7 \\
\cline{2-2}
\ 40 & 0,857142|857142\ldots \\
\quad 50 & \\
\quad\ 10 & \\
\quad\quad 30 & \\
\quad\quad\ 20 & \\
\quad\quad\quad 6 &
\end{array}
$$

Para esto bastará aplicar la regla del n.º 91. En este ejemplo el periodo comienza despues de la 6.ª operacion, es decir, despues de tantas operaciones como unidades menos una contiene el divisor 7.

SEGUNDO EJEMPLO.—Sea propuesto el quebrado $\frac{13}{37}$.

En este ejemplo el periodo principia despues de la 3.ª operacion, esto es, mucho antes que lo que debiera ser si nos guiáramos por el número de unidades que contiene el divisor 37.

$$\begin{array}{r|l} 130 & 37 \\ \cline{2-2} 190 & 0{,}351|351\ldots \\ 50 & \\ 13 & \end{array}$$

TERCER EJEMPLO.— $\frac{147}{875}$.

Aquí la fraccion decimal es limitada, aunque el denominador 875 ó 7×125 contenga al factor 7. Pero observemos que este mismo factor se halla en el numerador y que suprimiéndolo arriba y abajo se halla $\frac{21}{125}$ ó $\frac{21}{5^3}$, quebrado que segun lo establecido en el n.º 156 puede reducirse á una fraccion decimal de un número *limitado* de cifras.

$$\begin{array}{r|l} 1470 & 875 \\ \cline{2-2} 5950 & 0{,}168 \\ 7000 & \\ 0000 & \end{array}$$

CUARTO EJEMPLO.—$\frac{29}{84}$.

En este ejemplo el periodo no se manifiesta hasta despues de la 3.ª operacion, con la particularidad de que las dos primeras cifras no entran á formar parte de él, al paso que en los dos primeros ejemplos propuestos el periodo principia desde la primera cifra decimal.

$$\begin{array}{r|l} 290 & 84 \\ \cline{2-2} 380 & 0{,}34523809|523809\ldots \\ 440 & \\ 200 & \\ 320 & \\ 680 & \\ 800 & \\ 44 & \end{array}$$

Las fracciones decimales periódicas cuyo periodo comienza desde la primera cifra decimal se llaman *fracciones periódicas simples*, y aquellas cuyo periodo no tiene lugar hasta mas adelante, *fracciones periódicas mistas*.

159. Acabamos de ver que algunos quebrados reducidos á fracciones decimales dan lugar á fracciones decimales periódicas.

Y recíprocamente, *toda fraccion decimal periódica, simple ó mista, proviene de un quebrado que fácilmente podrá hallarse por la operacion inversa.*

Esta cuestion da lugar á dos casos distintos: 1.º cuando la fraccion periódica es *simple*, y 2.º cuando es *mista*.

Consideremos desde luego el primer caso y supongamos para fijar mas las ideas una fraccion periódica simple cuyo periodo tenga *cinco* cifras.

Sea 0,*abcde abcde abcde* ... la fraccion propuesta, y representemos por x el valor incógnito de ella. Se tendrá

$$x = 0, abcde\ abcde\ abcde \ldots (1).$$

Multipliquemos los dos miembros de esta igualdad por 10^5 ó por la unidad seguida de tantos ceros como cifras hay en el periodo, lo cual se hace (n.° 86) adelantando la coma 5 lugares hácia la derecha, y tendremos

$$10^5\, x \text{ ó } 100000 \times x = abcde, abcde, abcde \ldots$$

$$\text{ó } 100000 \times x = abcde + 0, abcde\ abcde \ldots (2).$$

Si ahora se sustrae la igualdad (1) de la igualdad (2), observando que $100000\, x - x = 99999\, x$,
se obtendrá $99999\, x = abcde$;

Luego finalmente $x = \dfrac{abcde}{99999}$.

Lo que prueba que *una fraccion decimal periódica simple es equivalente á un quebrado cuyo numerador es igual al conjunto de las cifras del periodo, y el denominador á un número compuesto de tantos* 9 *como cifras hay en el periodo.*

Así la fraccion 0,351351351 ..... es equivalente, segun la regla que acabamos de enunciar, al quebrado $\frac{351}{999}$.

Este puede simplificársele atendiendo á que sus dos términos son divisibles por 9. Suprimiendo, pues, este factor se obtiene el nuevo quebrado $\frac{39}{111}$; y haciendo ahora tambien la supresion del factor 3 que le es comun, se hallará finalmente por el quebrado $\frac{351}{999}$ reducido á su mas mínima espresion el quebrado $\frac{13}{37}$, que es el propuesto en el segundo ejemplo cuya resolucion vimos en el n.° 158.

Sea por nuevo ejemplo la fraccion 0,03960396 ...

Siendo su periodo 0396, resulta que será equivalente á $\frac{0396}{9999}$ ó simplemente á $\frac{396}{9999}$. (Se suprime el 0 como inútil en este caso para el cálculo numérico, aunque ciertamente debiera tenerse en cuenta como parte que hace del periodo.)

Como el factor 9 es comun á los dos términos de este resultado, se le suprimirá y tendremos $\frac{44}{1111}$, quebrado cuyos términos pueden dividirse por 11; en cuyo caso suprimiendo este nuevo factor se tiene $\frac{4}{101}$ por el quebrado $\frac{0396}{9999}$ reducido á su mas mínima espresion.

Haremos mencion de los siguientes ejemplos por ser notables cuando se les considera en la práctica.

1.º $$0{,}9999\ldots = \frac{9}{9} = 1;$$

2.º $$0{,}012345679012345679\ldots = \frac{1}{81};$$

3.º $$0{,}98765432098765 4320\ldots = \frac{80}{81}.$$

NOTA.—Si la fraccion periódica contuviese algun entero, se hará abstraccion de él, añadiéndolo despues al quebrado equivalente ya reducido á menores términos.

Así, si nos proponemos hallar el valor de la fraccion 4, 162,162...,

se tendrá desde luego $0{,}162162\ldots = \frac{162}{999} = \frac{8}{111} = \frac{6}{37}$;

y por consiguiente $4{,}162162\ldots = 4 + \frac{6}{37} = \frac{154}{37}$.

160. Pasemos al segundo caso, que es el de las *fracciones periódicas mistas*.

A fin de generalizar mas la cuestion y de que se fijen bien las ideas, supondremos que haya *cuatro* cifras antes del periodo y *cinco* en el periodo.

Sea pues 0,*pqrs abcde abcde*... la fraccion propuesta.

Observemos que multiplicando y dividiendo al mismo tiempo por 10000, se le puede poner bajo la forma

$$\frac{1}{10000}(pqrs,\ abcde\ \ abcde\ldots).$$

Ahora bien, la cantidad que comprende el paréntesis equivale segun la regla anterior á $pqrs + \frac{abcde}{9999}$, ó bien reduciendo el entero á quebrado, á $\frac{pqrs \times 99999 + abcde}{99999}$.

Luego si se representa por x la fraccion propuesta, será

$$10000\ x = \frac{pqrs \times 99999 + abcde}{999990000};$$

y por consiguiente $x = \frac{pqrs \times 99999 + abcde}{999990000}$.

Pero este resultado es susceptible de una simplicacion que le hace muy cómodo para las aplicaciones.

Como se tiene $99999 = 100000 - 1$,
resultará $pqrs \times 99999 = pqrs\ 00000 - pqrs$;
de donde $pqrs \times 99999 + abcde = pqrsabcde - pqrs$.
Luego finalmente la fraccion propuesta tiene por valor

$$x = \frac{pqrsabcde - pqrs}{999990000}.$$

Lo cual prueba que *cualquier fraccion periódica mista es equivalente á un quebrado que tiene por* NUMERADOR el conjunto de cifras de la parte periódica y del primer periodo disminuido de dicha parte no periódica, y *por* DENOMINADOR *un número formado de tantos* 9 *como cifras hay en el periodo y seguido de tantos ceros como cifras contiene la parte no periódica.*

Sea por ejemplo la fraccion

$$x = 0{,}3193069306\ldots..$$

Aplicando la fórmula precedente se halla

$$x = \frac{319306 - 31}{999900} = \frac{319275}{999900},$$

ó dividiendo sucesivamente los dos términos por los factores 9, 25 y 11 que les son comunes (Véanse los caracteres de divisibilidad establecidos para estos tres números),

$$x = \frac{129}{404}.$$

Propondremos para ejercicio las fracciones

16,285714285714...; 4,9428571428571...; 5,52027027...

Pero en la aplicacion de las reglas anteriores se deberá desde luego prescindir de la parte entera, aunque despues se la añada á cada uno de los tres resultados reducidos á su mas mínima espresion.

161. La fórmula $x = \frac{pqrsabcde - pqrs}{999990000}$

conduce á resultados bastante notables.

Desde luego se ve ser evidente que efectuados los cálculos indicados en el numerador, el resultado no puede terminar por uno ó muchos ceros, pues para que esto tuviese lugar, era necesario que algunas de las últimas cifras de $pqrs$ fuesen las mismas que las correspondientes de $abcde$; en cuyo caso el periodo no comenzaria despues de la 4.ª cifra decimal como se ha supuesto. (Por ejemplo, si se tuviese $s = e$, $r = d$, la fraccion primitiva seria $0,pqdecbcdeabcde...$, y principiando en la 3.ª cifra seria $deabc$.) Se ve, pues, que segun la reduccion de la espresion (n.º 161) á sus mas mínimos términos el resultado deberá ser un quebrado cuyo denominador contenga á los dos factores 2 y 5, ó al menos uno de ellos elevado á la 4.ª potencia, es decir, á una potencia de un grado representado por el número de cifras que no hacen parte del periodo.

De aquí podemos deducir las dos proposiciones siguientes:

1.ª *Todo quebrado cuyo denominador no contenga á alguno de los factores primos 2 y 5, ó es primo con 10, da lugar, reducido á decimales, á una fraccion periódica simple.*

Demostracion.—Si se pudiese llegar á una fraccion periódica mista, resultaria que el quebrado equivalente á que se llega segun la regla del n.º 160 reducido á sus menores términos, seria igual á la fraccion propuesta; pero como esto es imposible, porque se ha visto (n.º 153) que un quebrado cuyos términos son primos entre sí, ó que es irreductible, no puede ser igual á otro quebrado sino siendo los términos de este *equimúltiplos suyos*, resulta que el denominador del quebrado propuesto seria múltiplo de 2 ó de 5, lo cual contradice la hipótesis que hemos admitido.

2.ª *Todo quebrado* IRREDUCTIBLE *cuyo denominador contenga á uno de los factores 2 y 5 ó á ambos, da lugar á una fraccion periódica mista cuyo periodo debe principiar despues de* TANTAS *cifras como unidades contiene el mayor de los esponentes 2 y 5 que entran en el denominador.*

Primeramente se ve que la dicha fraccion periódica no puede ser *simple*, porque la fórmula para estas clases de fracciones siendo igual á $\frac{abcde....}{99999....}$, es imposible que esta última fraccion cuyo denominador no contiene á ninguno de los factores 2 y 5, sea segun la reduccion á menores términos igual al quebrado propuesto cuyo denominador contiene estos mismos factores.

En segundo lugar, si n representa al mayor de los esponentes de 2 y 5 que se hallan en el denominador, el periodo debe principiar despues de n cifras, pues suponemos por ejemplo que comience despues de $(n-1)$ cifras; el quebrado equivalente á esta fraccion periódica tendria un denominador que no contendria á los dos factores 2 y 5 ó á uno de ellos elevado no mas que á la $(n-1)^n$ potencia, y no podria ser igual á la fraccion propuesta, puesto que por otra parte á estos dos quebrados se les ha supuesto irreductibles.

Por ejemplo, los quebrados $\frac{6}{7}$, $\frac{13}{37}$ (n.º 158) han dado lugar á fracciones periódicas *simples*, porque 7 y 37 son primos con 10; mas no sucede así con el quebrado $\frac{29}{84}$ que da lugar á una fraccion periódica cuyo periodo empieza despues de la segunda cifra, porque 84 es igual á $2^2.21$.

Finalmente el quebrado $\frac{145}{176}$, pudiendo ponerse bajo la forma $\frac{145}{5^4.11}$, debe dar lugar á una fraccion periódica cuyo periodo principie despues de la 4.ª cifra decimal.

Así se halla por el valor de este quebrado reducido á decimales la fraccion 0,8238636363....

162. Nos parece conveniente no llevar mas adelante el estudio de las fracciones decimales periódicas y limitarnos á observar que ciertas propiedades análogas tendrian lugar en un sistema cualquiera de numeracion cuya base fuese B.

A primera vista se concibe que para reducir un quebrado á subdivisiones de B en B menores que la unidad, será necesario conforme á la regla del n.º 91 *multiplicar el numerador por* B ó 10, *es decir, escribir uno á su derecha y dividir el producto por el denominador*, lo cual daria en el cociente unidades B veces menores que las anteriores, ó B^2 veces menores que la unidad principal, y así sucesivamente. Esto supuesto, tendremos que:

Todo quebrado cuyo denominador no contenga á otros factores primos que los que entren en la base B *reducida á subdivisiones de* B *en* B *veces menores que la unidad, da lugar á una fraccion irreductible de un* LIMITADO *número de cifras, y todo quebrado* IRRE-

DUCTIBLE *cuyo denominador contiene factores primos diferentes de los que componen la base, da lugar á una fraccion* PERIODICA *y de un número* INDEFINIDO *de cifras* &c.

Hay otras muchas propiedades que bien podrán acertar á enunciar y demostrar los principiantes, reflexionando detenidamente sobre los principios anteriormente establecidos, pues no vienen á ser mas que consecuencias de ellos.

§ IV. De las fracciones continuas *.

163. Las fracciones continuas provienen de la valuacion aproximada de aquellas cuyos términos siendo considerables son á la vez primos entre sí.

Para comprenderlo mejor, sea la fraccion $\frac{159}{493}$ cuyos dos términos son primos entre sí, como es fácil comprobarlo, y por ésta razon es (n.º 153) irreductible.

Si se deja la fraccion bajo esta forma, no será muy fácil formarse de ella una idea clara y exacta, y por eso vamos á darla la siguiente forma fundándonos en un principio de los quebrados.

Si se dividen por 159 los dos términos de la fraccion, lo cual no altera su valor, tendremos $\dfrac{1}{\left(\dfrac{493}{159}\right)}$, ó efectuando la division indicada en el denominador, $\dfrac{1}{3+\dfrac{16}{159}}$ ....

Esto supuesto, si hacemos abstraccion por un momento del quebrado $\frac{16}{159}$, veremos que la fraccion resultante $\frac{1}{3}$ es mayor que la primitiva, pues se ha disminuido al denominador.

---

* Algunos de los números de este párrafo suponen conocimientos algebráicos mas profundos que los presentados en la introduccion del capítulo V; pero los discípulos no deben pararse en esto, sino volver á estudiarlo cuando se hallen mas familiarizados con las operaciones del Algebra, ó cuando conozcan la necesidad de examinar esta teoría.

Por otra parte, si en lugar de despreciar á $\frac{16}{159}$ se le sustituye por 1, lo cual da $\frac{1}{3+1}$ ó $\frac{1}{4}$, la nueva fraccion $\frac{1}{4}$ es menor, pues que se la ha aumentado el denominador.

De donde podemos inferir que la fraccion $\frac{159}{493}$ se halla comprendida entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$. Esta observacion da ya una idea bastante exacta de dicha fraccion.

Si se quisiese obtener un grado mayor de aproximacion, no habria mas que operar con $\frac{16}{159}$ como con $\frac{159}{493}$.

Haciendo la operacion análoga se tendrá

$$\frac{16}{159}=\frac{1}{\left(\frac{159}{16}\right)}=\frac{1}{9+\frac{15}{16}};$$

y entonces la propuesta se reduce á $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{9+\dfrac{15}{16}}}$.

Si se desprecia á $\frac{15}{16}$, se tiene $\frac{1}{9}$, que es mayor que $\frac{16}{159}$, de donde se sigue que $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{9}}$ es menor que $\frac{159}{493}$; y como $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{9}}$ se reduce á $\dfrac{1}{\left(\frac{28}{9}\right)}$ ó á $\frac{9}{28}$, resulta que la propuesta estará comprendida entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{9}{28}$.

La diferencia de estas dos últimas fracciones es $\frac{28-27}{3\times 28}$ ó $\frac{1}{84}$.

por lo que se ve que el error que se comete tomando $\frac{1}{3}$ por el valor de la fraccion propuesta, es menor que $\frac{1}{84}$.

Operando sobre $\frac{15}{16}$ como sobre las anteriores, resulta $\frac{15}{16} =$

$\frac{1}{\left(\frac{16}{15}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{15}}$, que se puede poner bajo la forma siguiente:

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}$$

Despreciemos á $\frac{1}{15}$, y resulta que el número $\frac{1}{1}$ ó 1 es mayor que $\frac{15}{16}$: de donde $\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}$ ó $\frac{1}{10}$ es menor que $\frac{16}{159}$.

Luego $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}}$ ó $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{10}}$ ó $\frac{10}{31}$ es mayor que $\frac{159}{493}$.

De lo que fácilmente se infiere que $\frac{159}{493}$ está comprendido entre $\frac{9}{28}$ y $\frac{10}{31}$, de los que el primero es menor y el segundo mayor relativamente comparados con la fraccion propuesta.

Y siendo la diferencia de estos dos quebrados $\frac{10}{31} - \frac{9}{28}$ ó $\frac{1}{868}$, se sigue que el error cometido tomando $\frac{9}{28}$ ó bien $\frac{10}{31}$ por el valor de la fraccion propuesta es menor que $\frac{1}{868}$.

Ya vemos cómo mediante esta serie de operaciones se llegan á reducir á términos mínimos de fracciones que dan valores muy aproximados, otra fraccion cuyos términos son considerablemente mayores.

La espresion
$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}$$

es lo que propiamente se llama una *fraccion continua.*

En general se entiende por fraccion continua *una fraccion que tiene por numerador la unidad y por denominador un entero mas una fraccion cuyo numerador es la unidad y el denominador la unidad mas otra fraccion, y así sucesivamente.*

Muchas veces el número propuesto es mayor que la unidad, y en este caso para generalizar mas la definicion de una fraccion continua, es necesario decir que una fraccion continua es una espresion compuesta *de un entero mas una fraccion que tiene por numerador la unidad y por denominador* &c....

Tal es la espresion
$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}}$$

a,b,c,d..... siendo números enteros.

164. Reflexionando ahora sobre la marcha que hemos seguido para reducir $\frac{159}{493}$ á fraccion continua, se observa que se ha dividido 493 por 159, lo que ha dado 5 por cociente y 14 por resto; en seguida 159 por 16, que ha dado 9 por cociente y 15 por resto; despues 16 por 15, cuyo cociente ha sido 1 y cuyo resto tambien 1: de donde es bien fácil inferir el siguiente procedimiento para reducir un quebrado ó un número fraccionario á fraccion continua.

Opérese sobre la fraccion propuesta como para hallar su máximo comun divisor (Véase n.º 52), *haciendo estensiva la operacion hasta hallar un resto igual á cero, y los cocientes sucesivamente hallados serán los denominadores de los quebrados que deben constituir la fraccion continua.*

Cuando el número propuesto es mayor que la unidad, el primer cociente representa la parte entera que entra á formar parte de la fraccion continua.

Con arreglo á este procedimiento ės muy fácil reducir á fraccion continua los dos quebrados $\frac{65}{149}$ y $\frac{829}{347}$.

He aquí la tabla de operaciones:

1.ª

	2	3	2	2	1	2
149	65	19	8	3	2	1
19	8	3	2	1	0	

Luego..... $$\frac{15}{149}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}$$

2.ª

	2	2	1	1	3	19
829	347	135	7	58	19	1
135	77	58	19	1	0	

de donde $$\frac{829}{347}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\frac{1}{19}}}}}$$

Las fracciones continuas gozan de una multitud de propiedades cuya investigacion ha sido objeto de los trabajos de los mas célebres geómetras. Nosotros nos hemos limitado á presentar aquellos que son puramente elementalės, cuyo uso ės muy frecuente y cuyas demostraciones estan fundadas en los primeros principios del Algebra, aconsejando á los principiantes que gusten poseerlas á fondo y conocer de ellas mas amplios detalles, lean con detencion las *Adiciones de Lagrange al Algebra de Euler*.

DEFINICIONES.

165. Recordemos la fraccion continua general

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\ldots,}}}}$$

que consideraremos representando el valor de un número fraccionario designado por x.

Se llaman *fracciones integrantes* las fracciones $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}\ldots$, cuyo conjunto constituye la fraccion continua, y *cocientes incompletos* los denominadores b, c d.... (Se les da este nombre á dichos denominadores, porque b, por ejemplo, no es mas que la parte entera del número espresado por $b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}$; c la del espresado por.... $c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\ldots}}$; y así sucesivamente.)

Y *por el contrario* se ha dado el nombre de *cocientes completos* á las espresiones $b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}$, $c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\ldots}}$ de las que b, c, d, e..... no son mas que las partes enteras.

Cada *cociente completo* contiene además de la parte entera todos los cocientes de la fraccion continua, pues que por el desarrollo ó descomposicion sucesiva de cada cociente se hallan los que siguen. El último *cociente completo*, que no es otra cosa que el denominador de la última fraccion integrante, debe ser al menos igual á 2, segun la naturaleza del procedimiento establecido para reducir un quebrado cualquiera á fraccion continua.

Se llaman *reducidas* los resultados que se obtienen reduciendo sucesivamente á un solo número fraccionario cada una de las espresiones

$$a+\frac{1}{b},\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}\ldots\ldots$$

Tambien se les llama *fracciones convergentes*, porque como demostraremos mas adelante, estos resultados se aproximan cada vez mas al número reducido á fraccion continua, á medida que se toma mayor número de *fracciones integrantes*.

FORMACION DE LAS REDUCIDAS CONSECUTIVAS.

166. Veamos si hay un medio fácil y sencillo de formar estas diferentes reducidas.

La primera es a, que puede ponerse bajo la forma $\frac{a}{1}$.

La segunda es $a+\frac{1}{b}$, ó reduciendo el entero á quebrado, $\frac{ab+1}{b}$.

Para obtener la tercera representada por $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$,

bastará sustituir en la segunda $b+\frac{1}{c}$ en lugar de b; pues que si se representa $b+\frac{1}{c}$ por b', se tendrá

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=a+\frac{1}{b'}=\frac{ab'+1}{b'},$$

espresion que no difiere de $\frac{ab'+1}{b}$ sino en que b' ó $b+\frac{1}{c}$ sustituye á b.

Hagamos la sustitucion y se tendrá para la tercera reducida

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} \text{ ó } \frac{a\left(b+\frac{1}{c}\right)+1}{b+\frac{1}{c}} \text{ ó } \frac{ab+\frac{a}{c}+1}{b+\frac{1}{c}},$$

ó reduciendo los enteros á quebrados y multiplicando ambas partes por c, $\dfrac{(ab+1)\,c+a}{bc+1}$.

Por el mismo consiguiente la cuarta se obtendrá sustituyendo en la tercera $c+\frac{1}{d}$ en lugar de c, lo que dará

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}} = \frac{(ab+1)\left(c+\frac{1}{d}\right)+a}{b\left(c+\frac{1}{d}\right)+1} = \frac{(ab+1)\,c+\frac{ab+1}{d}+a}{bc+\frac{b}{d}+1},$$

ó reduciendo los enteros á quebrados y multiplicando ambas partes por d, $\dfrac{((ab+1)\,c+a)\,d+ab+1}{(bc+1)\,d+b}$.

Sin necesidad de pasar mas adelante se podrá observar que el numerador de la tercera puede obtenerse multiplicando el numerador de la segunda por el tercer cociente c y añadiendo al producto el numerador de la primera fraccion. En cuanto al denominador, se forma del mismo modo por medio de los denominadores de la segunda y primera fraccion.

El numerador y denominador de la cuarta reducida se obtienen igualmente multiplicando los dos términos de la tercera por el cuarto cociente d y añadiendo á ambos productos los dos términos de la segunda fraccion.

Si se observa detenidamente cómo se han formado la tercera y cuarta reducida, se verá que *esta ley de formacion* debe hacerse estensiva á las reducidas siguientes, proposicion cuya verdad vamos á demostrar ahora; y para hacerlo en general y con todo el rigor matemático nos valdremos de los medios que nos presenta el Algebra.

Haremos ver que si esta relacion tiene lugar para tres reducidas consecutivas, cualquiera que sea el lugar que ocupen, tambien lo debe tener para la reducida siguiente, porque habiendo sido reconocida como aplicable á la tercera, lo será asimismo á la cuarta; siéndolo á esta, lo será á la quinta, y así sucesivamente.

Sea pues $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$ tres reducidas consecutivas, r el *cociente incompleto* al cual nos hemos atenido para formar á $\frac{R}{R'}$, y supongamos que se tenga $\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}$ (suponiendo á R y R′ respectivamente iguales á $Qr+P$ y $Q'r+P'$).

Añadamos ahora una nueva fraccion integrante $\frac{1}{s}$ á continuacion de r, y sea $\frac{S}{S'}$ la reducida correspondiente: es claro que para formar á $\frac{S}{S'}$ no habrá mas que sustituir en la espresion de $\frac{R}{R'}$ r por $r+\frac{1}{s}$, y se tendrá

$$\frac{S}{S'}=\frac{Q\left(r+\frac{1}{s}\right)+P}{Q'\left(r+\frac{1}{s}\right)+P'}=\frac{(Qr+P)\,s+Q}{(Q'r+P')\,s+Q'}=\frac{Rs+Q}{R's+Q'};$$

donde se ve que $\frac{S}{S'}$ se deduce de las dos precedentes segun la ley anteriormente enunciada. Luego esta ley es general.

Así pues, *el numerador de una reducida cualquiera se forma multiplicando el numerador de la reducida anterior por el cociente incompleto que le corresponde, y añadiendo al producto el numerador de la reducida precedente de dos lugares á la que se quiere formar. El denominador se forma* SEGUN LA MISMA LEY *por medio de los dos denominadores anteriores.*

NOTA.—Cuando el número reducido á fraccion continua ó x es menor que la unidad, se sustituye la espresion $\frac{0}{1}$ en vez de a, con el objeto de que se pueda formar la tercera reducida, segun la ley que supone se hayan formado necesariamente las dos primeras.

Propongámonos por ejemplo formar las reducidas consecutivas le la fraccion continua

$$\frac{65}{149} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}.$$

Resulta para las dos primeras reducidas $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{2}$.

Para formar la tercera multiplicaremos el numerador 1 de la segunda por 3 y añadiremos 0 al producto: multiplíquese en seguida el denominador 2 de la segunda por 3 y añádase al producto el denominador 1 de la primera, lo que dará $\frac{3}{7}$.

Del mismo modo se halla por las reducidas siguientes:

$$\frac{7}{16},\ \frac{17}{39},\ \frac{24}{55},\ \frac{65}{149}.$$

Así tambien se hallará por las diferentes reducidas de la fraccion continua procedente de $\frac{829}{347}$ (Véase n.º 164)

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{3},\ \frac{12}{5},\ \frac{43}{18},\ \frac{829}{347}.$$

167. Consecuencia de la ley anterior.—Resulta de esta ley que los términos de las diferentes reducidas aumentan á medida que se toma mayor número de fracciones integrantes, pues que el numerador ó denominador de una reducida cualquiera *es al menos igual* á la suma de los numeradores ó de los denominadores de las dos reducidas que la preceden.

PROPIEDADES DE LAS REDUCIDAS.

168. **Primera propiedad.**—Si se toma en los dos ejemplos anteriores la diferencia de dos reducidas consecutivas cualesquiera, conviniendo en sustraer siempre una reducida de la que le sigue, se tendrá constantemente por esta diferencia $+1$ ó -1, segun que la segunda de las dos reducidas que se consideran es de órden *par* ó *impar*; permaneciendo por otra parte el denominador de la diferencia igual al producto de los denominadores de las dos reducidas.

Así en el primer ejemplo se tiene

$$\frac{1}{2}-\frac{0}{1}=\frac{+1}{2\times 1};\ \frac{3}{7}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2\times 7};\ \frac{7}{16}-\frac{3}{7}=\frac{+1}{16\times 7}+\ldots\ldots;$$

cuya propiedad vamos á demostrar que *es general.*

Para esto tomemos en la fraccion continua general tres reducidas consecutivas, cualesquiera que sean, como $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$.

Tendremos $\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{RQ'-QR'}{R'\,Q'}$.

Y segun el n.º 156, $R=Qr+P$, $R'=Q'r+P.'$

Sustituyendo en vez de R y R′ estos valores en el numerador de la diferencia anterior, se obtiene

$$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{(Qr+P)\,Q'-Q\,(Q'r+P)}{R'\,Q'};$$

ó efectuando los cálculos y reduciendo,

$$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{PQ'-QP'}{R'\,Q'}.$$

Por lo cual se ve que el numerador de la diferencia $\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}$ es *numéricamente igual*, aunque *con signo contrario* al de la diferencia $\frac{Q}{Q'}\,\frac{P}{P'}$ ó $\frac{QP'-PQ'}{Q'\,P'}$.

Es decir, que *los numeradores de dos diferencias consecutivas son numéricamente iguales*, bien que *con signos contrarios.*

De modo que si se consideran las dos primeras reducidas

$$\frac{a}{1}\text{ y }\frac{ab+1}{b}\text{ se tendrá }\frac{ab+1}{b}-\frac{a}{1}=\frac{+1}{b\times 1};$$

y segun lo que acabamos de decir, el numerador de la diferencia siguiente debe ser -1, el de la tercera $+1$, y así sucesivamente.

Luego en general *el numerador de una diferencia cualquiera es* $+1$ *si la segunda de las dos reducidas que se consideran es de órden par*, *y* -1 *si es de impar*. Por lo que toca al denominador, desde luego se ve que debe ser igual al producto de los denominadores de las dos reducidas.

169. CONSECUENCIA DE LA PROPIEDAD ANTERIOR.—*Una reducida de cualquier órden* $\frac{R}{R'}$ (formada segun la regla del n.º 166), *es siempre una fraccion ó un número fraccionario irreductible.*

En efecto, supongamos por un momento que R y R′ tengan un factor comun h; y como segun la propiedad precedente se tiene $RQ' - QR' = \pm 1$, resulta que

$$\frac{RQ' - QR'}{h} \text{ ó } \frac{RQ'}{h} - \frac{QR'}{h} = \pm \frac{1}{h}.$$

Pero es así que el primer miembro de esta igualdad es un número entero, pues que R y R′ son divisibles por h, al paso que el segundo miembro es una fraccion; luego es absurdo suponer que R y R′ no sean primos entre sí.

De aquí resulta que si se reduce á fraccion continua un quebrado cuyos términos no son primos entre sí, y se forma en seguida en todas las reducidas inclusive la última, el quebrado no aparecerá bajo su forma primera, pero sí *reducido á su mas mínima espresion*, es decir, sin el máximo comun divisor de sus dos términos.

Sea por ejemplo *el quebrado* $\frac{348}{924}$ *que se quiere reducir á fraccion continua.*

Reducido á fraccion continua, es

$$\frac{348}{924} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{9}}}}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

y las reducidas son

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{29}{77}.$$

La última reducida $\frac{29}{77}$ es el valor del quebrado $\frac{348}{924}$ aislado del factor comun 12, pues si se multiplican por él sus dos términos respectivamente, se tendrá dicho quebrado $\frac{348}{924}$.

170. Segunda propiedad.—Recordemos la fraccion continua general

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ldots\ldots}}}$$

Fácilmente se reconocerá por un razonamiento análogo al que hicimos en el n.° 163 sobre un ejemplo particular, que el valor de x está comprendido entre la primera y segunda reducida, entre la tercera y cuarta, y así sucesivamente; de donde podrá inferirse por analogía que en general *el valor de x está comprendido entre dos reducidas consecutivas de cualquier órden.*

Sin embargo, vamos á demostrar esta propiedad bastante interesante de un modo mas general.

Sean al efecto dos reducidas consecutivas $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ de un órden cualquiera, y propongámonos determinar las diferencias $x - \frac{P}{P'}$, $x - \frac{Q}{Q'}$.

Observemos que si en la espresion de la reducida siguiente $\frac{R}{R'}$ ó $\frac{Qr + P}{Q'r + P'}$ se pone en lugar del *cociente incompleto* r, el *cociente completo* y, ó $r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t + \ldots}}$

en el que r no es mas que la parte entera, resultará de nuevo el valor del número reducido á fraccion continua, pues que en tal caso se tendrá la reducida de la fraccion continua total.

Resulta, pues, segun esta observacion

$$x = \frac{Qy + P}{Q'y + P'};$$

de donde $x - \frac{P}{P'} = \frac{Qy + P'}{Q'y + P'} - \frac{P}{P'} = \frac{(QP' - PQ')y}{(Q'y + P')P'}$,

y $$x - \frac{Q}{Q'} = \frac{Qy + P}{Q'y + P'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{PQ' - QP'}{(Q'y + P')Q'};$$

ó á causa de $QP' - PQ' = \pm 1$, $PQ' - P' = \pm 1$ (n.° 168),

$$x - \frac{P}{P'} = \frac{\pm y}{(Q'y + P')P'},$$

$$x - \frac{Q}{Q'} = \frac{\pm 1}{(Q'y + P')Q'};$$

y como los números y P, P′, Q, Q′ son por su naturaleza esencialmente positivos, se deduce que los dos resultados anteriores *deben tener signos contrarios*; luego si se tiene $x >$ ó $< \frac{P}{P'}$, debe resultar necesariamente $x <$ ó $> \frac{Q}{Q'}$; lo que quiere decir que si el número reducido á fraccion continua es mayor ó menor que la reducida $\frac{P}{P'}$ y este mismo número es menor ó mayor que $\frac{Q}{Q'}$, se tendrá por resultado final que *el valor del número reducido á fraccion continua está siempre comprendido entre dos reducidas consecutivas de cualquier órden que sean.*

Observacion.—Si la reducida $\frac{Q}{Q'}$ es de órden par, el numerador de la diferencia entre $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{P}{P'}$ ó $QP' - PQ'$ será positivo é igual á $+1$ (n.° 168); así pues, tendremos $x > \frac{P}{P'}$ y $x < \frac{Q}{Q'}$, de donde resulta que *todas las reducidas de órden par son fracciones mayores, y todas las de órden impar son menores que el número reducido á fraccion continua.*

171. **Tercera propiedad.**—*Una reducida de cualquier órden da un valor mas aproximado á* x *que la que la precede.*

Efectivamente, consideremos las dos diferencias del n.° 170. Como se tiene (n.° 167) $Q' > P'$, se sigue que el denominador $(Q'y + P')Q'$ es $> (Q'y + P')P'$; por otra parte y es > 1; y por esta doble razon la diferencia entre x y $\frac{Q}{Q'}$ es *numéricamente* menor que la que hay entre x y $\frac{P}{P'}$.

Observacion.—Supuesto que segun la observacion del n.° 170 las reducidas de órden *par* son fracciones mayores, y las de *impar* menores que el valor de x, y además en virtud de lo demostrado anteriormente las reducidas *convergen* cada vez mas hácia el valor de x á proporcion que se separan de la primera reducida, deberemos inferir: 1.° Que las reducidas de órden *par* disminuyen de valor á medida que se separan de la segunda; y 2.° que al contrario las reducidas de órden *impar* aumentan de valor segun se van separando de la primera.

172. **Cuarta propiedad.**—El grado de aproximacion que da cada reducida puede valuarse de muchos modos.

Supuesto que (n.° 170) el valor de x está comprendido entre dos reducidas consecutivas, cualesquiera que sean, v. g. $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, resulta que la diferencia entre x y una de estas reducidas debe ser menor que $\frac{1}{P'Q'}$, que es la que existe entre las dos reducidas. Luego bien podemos inferir que el *error cometido al tomar una de estas reducidas por el valor de* x *es menor que la unidad dividida por el producto de sus denominadores.*

En segundo lugar, puesto que la diferencia entre x y $\frac{Q}{Q'}$, haciendo abstraccion del signo, está espresada (n.° 170) por $\frac{1}{(Q'y + P')Q'}$ y se tiene $y > 1$, de donde $(Q'y + P')Q' > (Q' + P')Q'$, resultará por precision

$$x - \frac{Q}{Q'} < \frac{1}{(Q + P')Q'},$$

y *à fortiori* $$x - \frac{Q}{Q'} < \frac{1}{Q'^2}.$$

Así *la diferencia entre* x *y* $\frac{Q}{Q'}$ *ó el error cometido al tomar* $\frac{Q}{Q'}$ *por el valor de* x *es menor que la unidad dividida por el producto del denominador de la reducida multiplicado por la suma de este mismo denominador y del de la reducida anterior*; ó con mas sencillez, aunque no con tanta exactitud, *que la unidad dividida por el cuadrado del denominador de la reducida en cuestion.*

NOTA.—Es de advertir que las tres propiedades que preceden estan fundadas en el mismo cálculo que la del n.° 170: esto hace que las demostraciones puedan retenerse con mas facilidad.

173. QUINTA Y ULTIMA PROPIEDAD.—*Una reducida de un órden cualquiera se aproxima al valor de* x *no solamente mas que cualquiera de las reducidas que la preceden, sino tambien que algun otro quebrado cuyo denominador sea menor que el de la reducida en cuestion*; de modo que se puede asegurar no haber otra fraccion que *en términos mas sencillos* de un valor mas aproximado al de x.

Sea $\frac{Q}{Q'}$ la reducida que se considera y $\frac{m}{m'}$ una fraccion cualquiera tal, que se tenga $m' < Q'$: en este caso podrá decirse que $\frac{m}{m'}$ no mas se aproxima á x que $\frac{Q}{Q'}$.

En efecto, observemos desde luego que la fraccion $\frac{m}{m'}$ no puede estar comprendida entre $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{P}{P'}$, pues para que esto tuviese lugar seria necesario que la diferencia entre $\frac{m}{m'}$ y $\frac{P}{P'}$, á saber, $\frac{mP' - Pm'}{m'P'}$, fuese numéricamente menor que $\frac{1}{P'Q'}$, que es la que hay entre $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{P}{P'}$, lo que es imposible, porque $mP' - Pm'$, *número entero*, es al menos igual á 1, y $m'P'$ es menor que $P'Q'$ en virtud de la hipótesis $m' < Q'$. (No puede suponerse $mP' - Pm' = 0$, pues entonces se tendria $\frac{m}{m'} = \frac{P}{P'}$, y siendo la fraccion $\frac{m}{m'}$ idéntica á la reducida $\frac{Q}{Q'}$ que precede, la proposicion quedaria demostrada.

Supuesto que x está comprendido entre $\frac{P}{P'}$ y $\frac{Q}{Q'}$ y que segun lo que acabamos de decir no tiene esto lugar respecto de la fraccion $\frac{m}{m'}$, resulta necesariamente que si se escriben estos dos números por órden de su magnitud, no podrán formarse mas que las dos combinaciones siguientes:

$$\frac{P}{P'},\ x,\ \frac{Q}{Q'},\ \frac{m}{m'};\ \text{ó bien}\ \frac{m}{m'},\ \frac{P}{P'},\ x,\ \frac{Q}{Q'}.$$

En el primer caso es evidente que la diferencia entre x y $\frac{m}{m'}$ es mayor que la diferencia entre x y $\frac{Q}{Q'}$.

En el segundo es mayor que la que hay entre x y $\frac{P}{P'}$, y con mucha mas razon mayor que la que existe entre x y $\frac{Q}{Q'}$.

Por lo demás, esto no es otra cosa que lo que fácilmente no podrá menos de reconocerse calculando segun el procedimiento del n.° 170 la diferencia $x - \frac{m}{m'}$ y comparando su espresion á la de la diferencia $x - \frac{Q}{Q'}$ establecida en el mismo número.

174. Para terminar la teoría elemental de las fracciones continuas indicaremos el uso que de ella puede hacerse en la valuacion aproximativa de un quebrado irreductible cuyos términos son muy grandes.

Se reducirá desde luego el número propuesto á fraccion segun el procedimiento del n.° 164; *y en seguida se formarán las reducidas consecutivas segun la ley del* n.° 166. *De este modo se obtiene una serie de quebrados alternativamente mayores y menores que el número propuesto* (n.° 170), *entre los que se elije el que dé el grado de aproximacion que se quiere obtener. Este grado está* (n.° 172) *espresado por* $\frac{1}{(Q' + P')}$ *ó* $\frac{1}{Q'^2}$, *en el supuesto de ser* $\frac{Q}{Q'}$ *la reducida en cuestion. La reducida debe ser* (n.° 171) *de un órden tanto mas distante cuanto lo esté el grado de aproximacion que se quiere hallar.*

Propongámonos por ejemplo valuar aproximadamente *la relacion de la circunferencia al diámetro.*

Se sabe que esta relacion espresada en decimales con la diferencia de una cienmilésima próximamente es 3,14159 ó $\frac{314159}{100000}$.

Reducido, pues, este valor á fraccion continua, se tiene

$$\frac{314159}{100000} \text{ ó } x = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{25 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{4}}}}}}};$$

lo cual da para las reducidas consecutivas segun la ley del n.° 166

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{9208}{2931}, \frac{9563}{3044}, \frac{76149}{24239}, \frac{314159}{100000}.$$

Tomando $\frac{22}{7}$ por el valor del número propuesto, se cometeria un error menor que $\frac{1}{7\,(7+1)}$ ó $\frac{1}{56}$; pero esta reducida da además un grado mayor de aproximacion, porque como el número propuesto está comprendido entre $\frac{22}{7}$ y $\frac{333}{106}$, resulta que $\frac{22}{7}$ difiere de este número en una cantidad menor que $\frac{22}{7} - \frac{333}{106}$ ó $\frac{1}{472}$, y por tanto el yerro cometido es mucho menor que $\frac{1}{100}$. Así pues, este $\frac{22}{7}$ ó $3\ \frac{1}{7}$ es la fraccion que frecuentemente se emplea para espresar la relacion de la circunferencia al diámetro. *Esta es la relacion dada por Arquímedes.*

La cuarta reducida $\frac{355}{113}$, que no es mucho mas complicada que $\frac{333}{106}$, da un valor bastante aproximado, porque estando comprendido el número propuesto entre $\frac{355}{113}$ y $\frac{9208}{2931}$, resulta que la diferencia entre este número y $\frac{355}{113}$ es menor que $\frac{1}{113 \times 2931}$, fraccion que es evidentemente menor que 0,00001. Es de notar que las dos fracciones $\frac{355}{113}$ y $\frac{314159}{100000}$, de las que la primera está espresada en términos bastante sencillos, dan en decimales la misma aproximacion por la relacion de la circunferencia al diámetro. *Esta es la relacion dada por Adriano Mecio.* Las reducidas que siguen son bastante complicadas para ser sustituidas con ventaja al número propuesto.

No llevaremos mas adelante el exámen de las propiedades de los números; pero sí aconsejaremos á los principiantes que en estando familiarizados con el análisis algebráico lean con detencion las dos obras tituladas: *Teoría de los Números* por *Legendre* y *Disquisitiones Aritmeticæ* de *Gauss*, obra traducida con mucha perfeccion por M. *Poulet-Delisle*.

CAPITULO VI.

Formacion de las potencias y estraccion de las raices cuadrada y cúbica de los números.

§ I. Formacion del cuadrado y estraccion de la raiz cuadrada.

175. Nociones preliminares.—Se llama *cuadrado* (n.º 108) ó *segunda potencia* de un número el producto de este número multiplicado por sí mismo ó el producto de dos factores iguales á él, y *raiz cuadrada* ó 2.ª de un número es un segundo número que multiplicado por sí mismo ó elevado al cuadrado da por resultado el número propuesto.

Así el cuadrado de 7 es 49, y recíprocamente la raiz cuadrada de 49 es 7: del mismo modo el cuadrado de 12 es 12×12 ó 144, y la raiz cuadrada de 144 es 12.

La formacion del cuadrado de un número entero ó fraccionario no exije de por sí procedimiento alguno particular, pues basta multiplicar por sí mismo el número cuyo cuadrado se quiere formar conforme á las reglas establecidas.

Pero no sucede así con la estraccion de la raiz cuadrada cuyo objeto es: *dado un número, hallar otro segundo que multiplicado por sí mismo le reproduzca.* Esta cuestion exije, pues, una operacion esencialmente distinta de todas las hasta aquí espuestas, y es de un gran interés en la Geometría y el Algebra.

Supuesto esto, siendo los diez primeros números

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$$

cuyos cuadrados son

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,$$

resultará por reciprocidad que los números de esta segunda línea tendrán por raices á los de la primera.

Desde luego se ve que entre los números enteros de una ó de dos cifras no hay mas que *nueve* que sean *cuadrados de otros números enteros*: los demás tienen por raiz cuadrada un entero mas una fraccion.

Así 53, que se halla comprendido entre 49 y 64, tiene por raiz cuadrada 7 mas una fraccion. Del mismo modo 91 tiene por raiz cuadrada 9 mas una fraccion.

176. Pero lo mas notable *es que un número entero que no es cuadrado de otro entero, tampoco puede tener por raiz un número fraccionario exacto.*

Esta proposicion que á primera vista parece una paradoja, es una consecuencia del principio establecido (n.º 130) relativo á la divisibilidad de los números. En efecto, para que un número fraccionario exacto, $\frac{a}{b}$, pueda ser considerado como la raiz cuadrada de un número entero, es necesario que su cuadrado $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$ ó $\frac{a^2}{a^2}$ sea igual á un número entero. Pero esto es imposible, pues que partimos de una hipótesis bastante admitida, á saber, que $\frac{a}{b}$ sea reducido á su mas mínima espresion; y como a^2, b^2 no tienen (n.º 130) otros factores primos que los que entren en a y b, pues estos dos últimos números son primos entre sí, lo cual no tiene lugar con a^2 y b^2, resulta que $\frac{a^2}{b^2}$ es un *número fraccionario irreductible* y no puede por lo tanto ser igual á un número entero.

La raiz cuadrada de un número entero que no es cuadrado de ningun otro número entero, no pudiendo ser espresada por un número exacto, se llama *número inconmensurable* ó *irracional*, es decir, que no puede medirse exactamente por medio de la unidad. Así $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$ son números inconmensurables ó irracionales.

En este caso se dice que el número propuesto no es *cuadrado perfecto*.

177. La diferencia de dos *cuadrados perfectos consecutivos* es tanto mas considerable cuanto mayores sean las raices de ellos: la espresion de esta diferencia es bastante útil de conocer.

Sean, pues, dos números enteros consecutivos a y $(a+1)$.

Se tendrá (n.º 112) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$, de donde haciendo $b = 1$, resulta $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$.

La diferencia entre $(a+1)^2$ y a^2 es $2a + 1$, por lo que se ve que *la diferencia que hay entre los cuadrados de dos números enteros consecutivos es igual al duplo del menor de estos dos números mas una unidad.* Así pues, la diferencia de los cuadrados de 348 y de 347 es igual á 2 veces 347 mas 1 ó 695: ó bien en otros términos, los cuadrados de 347 y de 348 comprenden 694 números enteros, que no son cuadrados perfectos.

Establecidas ya estas nociones, propongámonos hallar un procedimiento para estraer la raiz cuadrada de los números, dando principio por los enteros.

178. Estraccion de la raiz cuadrada de un numero entero. — Como la estraccion de la raiz cuadrada de un número de una ó de dos cifras es bien fácil mediante la sola inspeccion de la de los nueve primeros números (n.º 175), pasaremos á la de un número que conste de mas de dos cifras, por ejemplo de cuatro. Así pues, propongámonos estraer la de 6084.

Estando este número compuesto de mas de dos cifras, su raiz constará de mas de una: por otra parte es menor que 10000, que es el cuadrado de 100; luego no podrá tener ni mas ni menos de dos cifras, es decir, que deberá constar de decenas y unidades. Luego si se designan las decenas por a y las unidades por b, se tendrá (n.º 177)

6 0 8 4	78
4.9	148
1 1 8.4	8
1 1 8.4	1184
0	

$$6084 = (a+b)^2 = a + 2ab + b^2;$$

de donde podrá inferirse que el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades se compone *del cuadrado de las decenas, del duplo del producto de las decenas por las unidades y del cuadrado de las unidades.*

Esto supuesto, si en el número 6084 se pudiera poner en evidencia el cuadrado de las decenas de la raiz, seria bien fácil obtener las decenas; pero no pudiendo dar el cuadrado de un número exacto de decenas mas que un número exacto de centenas, resulta que este cuadrado deberá hallarse por precision en la parte 60 á la izquierda de las dos últimas cifras, que por esta razon se las separa por un punto; anunciando tambien que puede contener además de las decenas las centenas y miles procedentes de los otros términos del cuadrado. Ahora bien, 60 está comprendido entre los dos cuadrados 49 y 64, cuyas raices respectivas son 7 y 8; luego 7 es *la cifra de las decenas buscada*, porque 6000 está evidentemente comprendido entre 4900 y 6400, que son los cuadrados de 70 y 80; y otro tanto podrá decirse respecto de 6084. Así pues, la raiz pedida se compone de 7 decenas y de cierto número de unidades menor que diez.

Hallada ya la cifra 7 de las decenas, se la escribirá á la derecha del número dado, separándola por una línea vertical; en seguida se resta su cuadrado 49 de 60, lo cual da 11 por resto, á cuyo lado deberán bajarse las otras dos cifras 8 y 4. El resultado 1184 de esta primera operacion contiene todavía *el duplo del producto de las dece-*

nas por las unidades y el cuadrado de las unidades. Pero como decenas multiplicadas por unidades no pueden dar en el producto unidades de un órden menor que las decenas, resulta que la última cifra 4 no hace parte del duplo del producto de las decenas por las unidades, y este doble producto se halla por lo tanto en la parte de la izquierda de 118 que se separa de la cifra 4 por un punto.

Luego si se duplican las decenas, lo cual da 14, y se divide 118 por 14, el cociente 8 *será la cifra de las unidades* ó una cifra mayor que la de las unidades. Este cociente no puede ser muy pequeño, pues que conteniendo 118 el producto del duplo de las decenas 14 por las unidades, es necesario que se pueda sustraer el producto de 14 por la cifra que se ensaya; pero sí puede ser muy grande, porque 118 contiene además de este doble producto las decenas procedentes del cuadrado de las unidades. Para cerciorarse si el cociente 8 espresa ó no las unidades, basta escribirlo á la derecha de 14, lo que da 148, y en seguida debajo de sí mismo y multiplicar 148 por 8. De este modo se tendrá formado, 1.º el cuadrado de las unidades, y 2.º el duplo del producto de las decenas por las unidades. Por otra parte, efectuada esta multiplicacion resulta 1184, número igual al resultado de la primera operacion; y verificando la sustraccion, da 0 por resto; luego 78 es la raiz pedida.

En efecto, resulta de las operaciones anteriores que se ha sustraido sucesivamente de 6084 el cuadrado de 7 decenas ó de 70, mas el duplo del producto de 70 por 8, mas el cuadrado de 8, es decir, las tres partes que entran á formar el cuadrado de 70 + 8 ó 78; y como el resultado de la sustraccion es 0, se sigue que 6084 es igual al cuadrado de 78.

Sea propuesto por segundo ejemplo el número 841 *cuya raiz cuadrada se quiere estraer.*

8.4 1	29
4	49
4 4 1	9
4 4 1	441
0	

Estando este número comprendido entre 100 y 1000, su raiz debe componerse de dos cifras, ó de decenas y unidades. Probaremos, pues, como en el ejemplo anterior, que la raiz del mayor cuadrado contenido en 8 ó en la parte de la izquierda de las dos últimas cifras es la cifra de las decenas de la raiz. El mayor cuadrado contenido en 8 es 4, cuya raiz es 2: esta es *la cifra de las decenas.* Si se sustrae el cuadrado de 2 ó 4 del número 8, quedan 4: bajando al lado de este resto el periodo siguiente 41, se obtiene 441, resultado que comprende tambien *el duplo del producto de las decenas por las unidades*, *mas el cuadrado de las unidades.*

Asimismo podrá probarse, como en el ejemplo anterior, que si se separa con un punto la última cifra 1, y se divide la parte de la izquierda 44 por 4, *duplo de las decenas*, el cociente será *la cifra de las decenas*, á no ser que sea mayor que esta cifra. En este ejemplo el cociente es 11, y es evidente que no se puede tener mas que 9 para las unidades (pues que esto seria suponer que la cifra hallada para las decenas no era verdadera). Por lo tanto será necesario hacer la prueba con 9: para esto se colocará el 9 á la derecha del 4, duplo de las decenas, y despues debajo de sí misma, multiplicando 49 por 9; y como esta multiplicacion da el producto 441, que es igual al resultado de la primera operacion, se tendrá que 29 es la raiz pedida.

Reflexionando sobre el procedimiento que acabamos de emplear para estraer la raiz cuadrada de un número de *tres ó cuatro cifras*, se verá que consta de dos operaciones principales. *La primera* consiste *en estraer la raiz del mayor cuadrado contenido en la parte de la izquierda y en sustraerle este cuadrado despues de haber separado las dos últimas cifras de la derecha.* Esta raiz deberá espresar por precision las decenas de la raiz total, porque el cuadrado de esta raiz seguido de un cero y el mismo cuadrado seguido tambien de otro y aumentado en una unidad comprenden al número propuesto. La *segunda* consiste *en dividir la parte de la izquierda por el duplo de la cifra ya hallada en la raiz* despues de haber bajado las dos cifras siguientes y separado la última de ellas por medio de un punto. El cociente deberá espresar las unidades, á menos que no sea mucho mayor; y para cerciorarse de si tiene lugar lo contrario, se formará el cuadrado de este cociente y el duplo de las decenas por él. Si la suma obtenida es igual á la primera operacion ó menor que ella, podrá asegurarse que dicho cociente representa las unidades, y deberá escribírsele á la derecha de las decenas: en el caso contrario se le disminuirá en una ó muchas unidades.

Observacion. —En la investigacion de la raiz cuadrada de un número no puede obtenerse desde luego el cuadrado de las unidades; porque este cuadrado da en general (n.° 175) decenas que se combinan con las que da el producto de las decenas por las unidades; de modo que es imposible determinar con toda exactitud en qué parte del número propuesto se halla el cuadrado de las unidades.

Elejiremos para último ejemplo un número que no sea un cuadrado perfecto: sea 1287.

Aplicando el procedimiento que ya conocemos, se obtiene por raiz 35 y 62 por resto, lo cual indica que el número 1287 no es un cuadrado perfecto y que está comprendido entre el cuadrado de 35 y el de 36. En efecto, el cuadrado de 35 es 1225 y el de 36 es 1296, número que escede á 1225 en 75 ó en $35 \times 2 + 1$ (n.° 177).

1 2.8 7.	35
9	—
—	65
3 8.7	5
3 2 5	——
———	325
6 2	

Así cuando un número entero no es cuadrado perfecto, mediante el procedimiento establecido se halla *la raiz del mayor cuadrado contenido en él*, ó bien *la parte entera de la raiz cuadrada de este número.*

Mas adelante veremos cómo se obtiene aproximadamente la fraccion que debe completar la raiz.

179. Pasemos á la estraccion de la raiz cuadrada de un número de mas de cuatro cifras.

Sea 56821444 el número propuesto.

5 6. 8 2. 1 4. 4 4	7538		
4 9			
7 8. 2	145	1503	15068
7 2 5	5	3	8
5 7 1. 4	725	4509	120544
4 5 0 9			
1 2 0 5 4. 4			
1 2 0 5 4 4			
0			

Pasando el número propuesto de 10000, su raiz debe ser mayor que 100, es decir, que debe tener mas de dos cifras. Pero de todos modos, siempre se podrá considerar como una coleccion de unidades simples y de decenas (pues que desde luego se deja ver que un número cualquiera 5367 puede descomponerse en $5360+7$, ó 536 decenas mas 7 unidades).

El cuadrado de esta raiz ó el número propuesto se compone de tres partes, que son cuadrado de las decenas, duplo del producto de las decenas por las unidades y cuadrado de las unidades; y como el cuadrado de las decenas da por lo menos centenas, resulta que el último periodo 44 no puede formar parte de él, y sí en la parte de la izquierda es en donde se halla este cuadrado.

Ahora bien, puede decirse que si se busca la *raiz del mayor cuadrado* contenido en 568214 considerado como espresando unidades simples, se tendrá *el número total* de las decenas de la raiz pedida.

En efecto, sea a la raiz del mayor cuadrado contenido en 568214: resultará segun lo establecido que la raiz pedida deberá tener al menos un número a de decenas, pues que $a \times 100$ puede ser sustraido de 56821400 y *à fortiori* de 56821444; y por otra parte la raiz no podrá tener $(a+1)$ decenas, porque $(a+1)^2$ siendo mayor que 568214, se sigue que $(a+1)^2 \times 100$ escede á 56821400 en una centena por lo menos, y de consiguiente es mayor que 56821444.

Luego finalmente la raiz pedida se compone de a decenas mas cierto número de unidades menor que *diez*; y la cuestion queda por lo tanto reducida á estraer la raiz cuadrada del número 568214 considerado por el pronto como espresando unidades simples.

Razonando sobre este número como sobre el anterior, tendremos (para hallar las decenas de su raiz) que estraer la raiz del mayor cuadrado contenido en la parte izquierda de 14, es decir, en 5682; y para obtener las decenas de esta nueva raiz, hacer abstraccion de las dos últimas cifras 8 y 2, y estraer la raiz del mayor cuadrado contenido en 56.

Estráigase, pues, la raiz de 56: se tendrá 7 (respectivamente al cuadrado 49); se escribirá el 7 á la derecha del número propuesto y se restará 49 de 56, lo cual da por resto 7, á cuyo lado se colocará el periodo 82 (puesto que ahora es necesario determinar la segunda cifra de la raiz del mayor cuadrado contenido en 5682). Separando la última cifra á la derecha de 782 y dividiendo 78 por 14, duplo de la raiz hallada, se tendrá 5 por cociente, que se escribirá á la derecha de 14, lo cual da 145; despues se escribe 5 debajo de 145, se multiplica 145 por 5 y se sustrae el producto 725 de 782: 75 representa en este caso la reunion ó el conjunto de las decenas de la raiz del número 568214.

Para obtener las unidades se baja al lado del resto 57 el periodo 14, y se tendrá el número 5714, del que se separa la última cifra. Dividiendo ahora 571 por 150, duplo de la raiz hallada, se tiene por cociente 3, que se pone al lado de 150, lo que compone 1503: escribiendo en seguida 3 debajo de 1503, multiplicando 1503 por 3 y sustrayendo el producto 4507 de 5719, quedará terminada esta operacion. Ahora pues, 753 espresa el *número total* de decenas de la raiz pedida.

Finalmente, para hallar la cifra de las unidades se bajará al lado del resto 1205 el último periodo 44, y haciendo abstraccion de la última cifra, se dividirá la parte izquierda de 12054 por 1205, duplo de la raiz hallada, y se tendrá por cociente 8, que deberá escribirse á la derecha de 1506, lo cual da 15068. Multiplicando 15068 por 8 y sustrayendo el producto 120544, se obtiene por resto cero. Luego 7538 es la raiz pedida. Para cerciorarnos de la exactitud de la operacion bastará multiplicar 7538 por sí mismo, segun la regla de la multiplicacion aritmética.

Comprendidas bien las diferentes partes de la operacion que antecede, fácilmente se deducirá la regla que sigue:

Divídase el número en periodos de dos cifras cada uno comenzando por la derecha (EL NUMERO DE PERIODOS ES IGUAL AL NUMERO DE CIFRAS DE LA RAIZ). *Tómese la raiz del mayor cuadrado contenido en el primer periodo de la izquierda*, que puede constar no mas que de una sola cifra, *y réstese el cuadrado de la cifra hallada del primer periodo de la izquierda.*

Bájese al lado del resto el segundo periodo de la izquierda, del cual se separará la última cifra por medio de un punto, y divídase la parte izquierda de esta cifra por el duplo de la raiz hallada. Escríbase el cociente al lado del duplo de la raiz, multiplíquese el número así formado por este cociente y sustráigase el producto del primer resto seguido del segundo periodo.

Bájese al lado del nuevo resto el tercer periodo, sepárese la última cifra y divídase la parte izquierda por el duplo de la raiz hallada: escríbase el cociente á la derecha de este divisor, multiplíquese el número así formado por el cociente y sustráigase el producto del segundo resto seguido del tercer periodo. Continúese así esta serie de operaciones hasta que se hayan bajado todos los periodos.

Si hechas todas estas operaciones resulta algun resto, podrá deducirse que el número dado no es un cuadrado perfecto; pero sí se conocerá la *raiz del mayor cuadrado contenido en él*, ó lo que es lo mismo, *la parte entera de la raiz cuadrada de este número.* Este resto debe ser (n.° 177) menor que el duplo de la raiz hallada, mas 1, pues de lo contrario las cifras de la raiz estarán mal determinadas.

180. Propondremos como nuevas aplicaciones estraer la raiz de los números 17698849 y 698485: hechas las operaciones se hallará

$$\sqrt{17698849} = 4207, \ \sqrt{698485} = 835, \text{ con un resto } 1260.$$

PRIMERA OBSERVACION.—En este último ejemplo, luego que se ha bajado el penúltimo periodo y separado la última cifra, como la parte izquierda resulta ser menor que el duplo de la raiz hallada, puede muy bien inferirse que la raiz no tiene unidades del órden de las decenas, y en tal caso deberá ponerse un 0 en la raiz para que las cifras ya obtenidas tengan su correspondiente valor relativo.

SEGUNDA OBSERVACION.—Resulta de la misma naturaleza del procedimiento anterior que *el número de cifras de la raiz es igual al número de periodos de á dos cifras que pueden formarse con el número propuesto.* Pero esta proposicion se demuestra *à priori*, esto es, sin necesidad de recurrir al enunciado del procedimiento.

Efectivamente, el cuadrado de 10^{n-1} ó del menor número de cifras es igual á la unidad seguida de $2(n-1)$ ó de $2n-2$ ceros que espresa el menor número de $2n-1$ cifras.

Por otra parte el cuadrado de 10^n ó del menor número de $(n+1)$ cifras es igual á la unidad seguida de $2n$ ceros que espresa el menor número de $(2n+1)$ cifras.

Luego todo número compuesto de $(2n+1)$ cifras ó de $2n$ al menos, es decir, un número que se puede descomponer en n periodos de á 2 cifras (de los que uno puede no tener mas que una) tiene su raiz comprendida entre 10^{n-1} y 10^n, y por consiguiente compuesta de n cifras.

181. TERCERA OBSERVACION.—Muchas veces es fácil echar de ver á primera vista que un número entero no es un cuadrado perfecto; y he aquí los indicios que se reconocen como mas principales:

1.° Todo número par pudiendo ser espresado por $2n$, su cuadrado $4n^2$ es esencialmente divisible por 4.

Así pues, *todo número que no es divisible por 4* (n.° 136) *no es un cuadrado perfecto.* Del mismo modo el cuadrado de un número impar $(2n+1)$ siendo $(4n^2+4n+1)$ número que disminuido de una unidad se hace necesariamente divisible por 4, resulta que *todo número impar que disminuido en* 1 *no da un resultado divisible por* 4, *no es un cuadrado perfecto.*

2.° En general, *todo número que teniendo un factor primo* α *no es divisible por* α^2, *no puede ser un cuadrado perfecto*, pues que si la raiz cuadrada de este número fuese entera, no podria ser (n.° 130) mas que de la forma αn cuyo cuadrado $\alpha^2 n^2$ es divisible por α^2. Así un número divisible por 3 ó por 5 deberá serlo tambien por 9 ó por 25 para que sea un cuadrado perfecto. Por el mismo consiguiente un número divisible por 15 debe serlo por 225 (n.° id.) para poder ser un cuadrado perfecto.

3.° *Ningun número acabado en una de las cuatro cifras* 2, 3 7, 8 *puede ser cuadrado perfecto.* Porque segun la composicion del cuadrado de un número que consta de mas de una cifra (n.° 175) las unidades simples de este cuadrado no pueden provenir mas que del cuadrado de las unidades de la raiz; es así que formando los cuadrados de los nueve primeros números, ninguno de ellos termina en las cifras 2.3.7.8; luego ya es fácil inferir que ningun número que termine en una de estas cuatro cifras puede ser cuadrado perfecto.

4.° *Ningun número terminado en* 5 *puede ser cuadrado perfecto si la cifra de las decenas no es* 2. Esta propiedad se deduce de la composicion del cuadrado de un número de dos ó muchas cifras. Las dos últimas del número propuesto no pueden en este caso provenir del cuadrado de las unidades de la raiz, pues que siendo 5 la cifra de las unidades, el duplo del producto de las decenas por esta cifra deberá ser por precision cierto número de centenas; y como el cuadrado de 5 es 25, resulta que el número debe estar terminado por 25.

5.° Por último, *ningun número terminado por un número impar de ceros puede ser cuadrado perfecto.* Esto es evidente, pues que si la raiz fuese exacta, no podria menos de ser un número entero terminado por uno ó muchos ceros, y su cuadrado deberia estarlo por doble número de ceros, y por consiguiente por un *número par de ceros*, lo cual estaria en contradiccion con la hipótesis sentada.

ESTRACCION DE LA RAIZ CUADRADA POR APROXIMACION.

182. Cuando un número entero no es cuadrado de otro número tambien entero, no se puede obtener (n.° 176) el valor exacto de su raiz cuadrada; pero sí se puede aproximar cuanto se quiera el resultado á su verdadero valor.

Antes de esponer las reglas relativas á la valuacion aproximada de las raices cuadradas, es necesario establecer que el cuadrado de una fraccion ó de un número fraccionario $\frac{a}{b}$ siendo $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$ ó $\frac{a^2}{b^2}$, la raiz de $\frac{a^2}{b^2}$ debe ser necesariamente $\frac{a}{b}$.

Luego *para estraer la raiz cuadrada de un quebrado cuyos términos son cuadrados perfectos, bastará estraer la raiz cuadrada del numerador y la del denominador, y en seguida dividir la primera por la segunda.*

Esto supuesto, propongamos en general *estraer la raiz cuadrada de un número* a, entero ó fraccionario, aproximada en $\frac{1}{n}$ (Véase la nota del n.º 93); ó en otros términos, supongamos que se pide un número que difiera de la raiz cuadrada de a en una cantidad menor que la fraccion $\frac{1}{n}$.

Para obtener esto observemos que a puede ponerse bajo la forma

$$\frac{a \times n^2}{n^2};$$

y por tanto si representamos por r la parte entera de la raiz cuadrada de an^2, este número an^2 se hallará comprendido entre r^2 y $(r+1)^2$, y $\frac{an^2}{n^2}$ lo estará entre $\frac{r^2}{n^2}$ y $\frac{(r+1)^2}{n^2}$: por consiguiente la raiz de a se halla comprendida entre la de $\frac{r^2}{n^2}$ y la de $\frac{(r+1)^2}{n^2}$, esto es, entre $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$.

Luego finalmente $\frac{r}{n}$ representa la raiz cuadrada de a aproximada en una fraccion $\frac{1}{n}$.

De donde se puede inferir el siguiente procedimiento: *para estraer la raiz cuadrada por aproximacion se multiplicará el número dado* a *por el cuadrado del denominador* n *de la fraccion que determina el grado de aproximacion que se quiere hallar, se estraerá la parte entera de la raiz cuadrada del producto, y se dividirá esta parte por el denominador* n.

Sea por primer ejemplo estraer la raiz cuadrada de 59 aproximada á su verdadero valor en $\frac{1}{12}$ poco mas ó menos.

Con arreglo al procedimiento que acabamos de establecer se multiplicará 59 por $(12)^2$ ó 144, y se tendrá 8496, cuya raiz cuadrada tiene 92 por parte entera.

Luego $\frac{92}{12}$ ó $\frac{93}{12}$ es la raiz cuadrada de 59 aproximada en $\frac{1}{12}$ con corta diferencia.

Apliquemos, pues, á este ejemplo la demostracion mas arriba establecida.

. El número 59 puede ponerse bajo la forma .... $\frac{59\times(12)^2}{(12)^2}$,

ó efectuando las operaciones indicadas en el numerador, $\frac{8496}{(12)^2}$.

Y como la raiz de 8496 con la diferencia de una unidad es 92, resulta que $\frac{8496}{(12)^2}$ ó 59 se halla comprendido entre $\frac{(92)^2}{(12)^2}$ y $\frac{(93)^2}{(12)^2}$.

Luego la raiz cuadrada de 59 se halla comprendida entre $\frac{92}{12}$ y $\frac{93}{12}$, es decir, que es mayor que $\frac{92}{12}$ en una fraccion menor que $\frac{1}{12}$, y menor que $\frac{93}{12}$ en una fraccion tambien menor que $\frac{1}{12}$.

En efecto, los cuadrados de $\frac{92}{12}$ y de $\frac{93}{12}$ son $\frac{8464}{(12)^2}$ y $\frac{8649}{(12)^2}$, números que comprenden entre sí á $\frac{8496}{(12)^2}$ ó á 59.

Propongámonos por segundo ejemplo el número $31\frac{4}{7}$ cuya raiz cuadrada se quiere determinar aproximada en $\frac{1}{23}$.

El producto de $\frac{221}{7}$ por $(23)^2$ es $\frac{221\times(23)^2}{7}$, ó efectuando los cálculos del numerador, $\frac{116909}{7}$, ó haciendo la division, $17701\frac{2}{7}$, número cuya raiz cuadráda *aproximada en una unidad* es 129.

Así $\frac{129}{23}$ ó $5\frac{14}{23}$ es la raiz cuadrada de $31\frac{4}{7}$ próximamente $\frac{1}{23}$.

NOTA.—En el ejemplo que precede se ha estraido la raiz cuadrada de $16701\frac{2}{7}$ haciendo abstraccion del quebrado $\frac{2}{7}$, porque es bien claro que si 16701 está comprendido entre los cuadrados de 129 y de 130, lo mismo deberá tener lugar respecto de $16701\frac{2}{7}$.

Esta observacion es aplicable á todos los casos en que solo sea necesario conocer la parte entera de la raiz cuadrada de un número fraccionario: así bastará considerar la parte entera contenida en este número y estraer la raiz aproximada en una unidad.

Propondremos para ejercicio los siguientes ejemplos:

$$\sqrt{11} = \frac{49}{15} = 3\frac{4}{15} \text{ valuada en } \frac{1}{15} \text{ de aproximacion.}$$

$$\sqrt{223} = \frac{597}{40} = 14\frac{37}{40} \text{ valuada en } \frac{1}{40} \text{ de aproximacion.}$$

$$\sqrt{79\frac{8}{11}} = \frac{178}{20} = 8\frac{18}{20} = 8\frac{9}{10} \text{ valuada en } \frac{1}{20} \text{ de aproximacion.}$$

$$\sqrt{\frac{7}{13}} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15} \text{ valuada en } \frac{1}{30} \text{ de aproximacion.}$$

El artificio que sirve de base al procedimiento de aproximacion de la raiz cuadrada consiste en *comprender el número propuesto entre dos números fraccionarios cuyo denominador comun sea el de la fraccion que determina la aproximacion y cuyos numeradores no difieren entre sí sino en la unidad.*

183. La *aproximacion por decimales*, que está mas usada, es una consecuencia de la regla precedente.

Para obtener la raiz cuadrada de un número entero aproximada en $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$.... es necesario conforme á esta regla multiplicar el número propuesto por $(10)^2$, $(100)^2$, $(1000)^2$ ..., es decir, *colocar á la derecha del número, dos, cuatro, seis... ceros; despues estraer la raiz cuadrada del producto aproximada en una unidad y dividir esta raiz por* 10, 100, 1000...

O en otros términos, *escríbase á la derecha del número propuesto* DOBLE NUMERO *de ceros que cifras decimales se quieran hallar*, *estrái-*

gase la parte entera de la raiz cuadrada de este nuevo número y sepárese hácia la derecha el de cifras decimales pedido.

Sea propuesto por ejemplo estraer la raiz cuadrada de 7 aproximada en $\frac{1}{1000}$.

Escribiendo *seis* ceros á la derecha del 7 se obtiene 7000000, número cuya raiz cuadrada tiene por parte entera 2645. Así 2,645 es la raiz pedida, lo que indica que la raiz cuadrada de 7 está comprendida entre 2,645 y 2,646.

Nota.—Como despues de haber escrito el número de ceros conveniente, es necesario dividir el número dado en periodos de dos cifras principiando por la derecha, puede muy bien dispensarse el escribir de antemano los periodos de dos ceros, y colocar cada periodo cada vez que se quiera obtener una nueva cifra en la raiz.

He aquí el cálculo para el ejemplo que antecede.

7	2645		
3 0.0	4.6	52.4	528.5
	6	4	5
2 4 0.0			
3 0 4 0 0			
3 9 7 5			

Luego 2,645 es la raiz pedida.

Del mismo modo se hallará

$$\sqrt{29} = 5{,}38 \text{ valuada en } \frac{1}{100} \text{ de aproximacion.}$$

$$\sqrt{227} = 15{,}0665 \text{ valuada en } \frac{1}{10000} \text{ de aproximacion.}$$

Observacion.—La fraccion decimal procedente de la raiz cuadrada de un número entero que no es un cuadrado perfecto, aunque compuesta de un número *ilimitado* de cifras, jamás podrá ser *periódica*, pues de lo contrario, como se ha visto (n.os 159 y 160) que toda fraccion periódica equivale á un quebrado *limitado*, se tendria que un número conmensurable era igual á uno irracional (n.º 176), lo cual es absurdo.

184. Cuando el número cuya raiz cuadrada quiere determinarse en decimales es fraccionario, pueden ocurrir dos casos: ó el número

propuesto es una *fraccion decimal*, ó bien es un quebrado comun. Examinemos, pues, por su órden cada uno de estos casos.

PRIMER CASO.—*Estraer, por ejemplo, la raiz cuadrada de* 3,425.

Como segun la regla del n.° 182 es necesario multiplicar este número por $(1000)^2$ ó 1000000, no habrá mas que escribir *tres* ceros á su derecha y suprimir la coma. Se tendrá mediante esta operacion 3425000, número cuya raiz con diferencia de una unidad es 1849.

Luego 1,849 es la raiz pedida valuada en $\frac{1}{1000}$ de aproximacion.

REGLA GENERAL.—*Para estraer la raiz cuadrada de una fraccion decimal se hará el número de cifras decimales* DOBLE *del que se quiere hallar en la raiz, lo cual se consigue bien fácilmente escribiendo un número conveniente de ceros á la derecha del número propuesto; en seguida haciendo abstraccion de la coma, se estraerá la raiz aproximada en una unidad, y por último se separará hácia la derecha de esta raiz el número de cifras decimales pedido.*

Esta regla es una consecuencia del procedimiento (n.° 89) de la multiplicacion de las fracciones decimales, en virtud del cual el cuadrado de una fraccion decimal ó el producto de esta fraccion por sí misma debe contener el duplo del número de cifras decimales que entran en la raiz.

NOTA.—En el ejemplo anterior si se pidiese la raiz de 3,425 valuada solamente en $\frac{1}{10}$, bastaria para multiplicar por $(10)^2$ ó 100 adelantar la coma dos lugares hácia la derecha, y se tendria 324,5, pues que (N. n.° 182) haciendo abstraccion de la parte que está á la derecha de la coma, se estraeria la raiz cuadrada de 342 aproximada en una unidad, y se hallaria 18 por esta raiz; y por consiguiente 1,8 seria la raiz pedida.

SEGUNDO CASO.—Para valuar en decimales la raiz cuadrada de un número fraccionario cualquiera *se reducirá el número á decimales segun el procedimiento del* n.° 91, *y se hará estensiva la operacion hasta que se haya hallado doble número de cifras decimales del que se quiere obtener en la raiz; en seguida se operará como en el caso precedente.*

Propongámonos, por ejemplo, *estraer la raiz cuadrada de* $\frac{310}{13}$ *valuada en* $\frac{1}{100}$.

Desde luego se tiene segun el procedimiento ya citado $\frac{310}{13} =$ 23,8461, y aplicando la regla del primer caso,

$$\sqrt{\frac{310}{13}} = 4,88 \text{ valuada en } \frac{1}{100}.$$

He aquí nuevas aplicaciones de las dos reglas que preceden:

$$\sqrt{31,027} = 5,570 \text{ valuada en } 0,001 \text{ de aproximacion.}$$

$$\sqrt{0,01001} = 0,10004 \text{ valuada en } 0,00001 \text{ de aproximacion.}$$

$$\sqrt{2\frac{13}{15}} = 1,6931 \text{ valuada en } 0,0001 \text{ de aproximacion.}$$

$$\sqrt{\frac{11}{14}} = 0,886 \text{ valuada en } 0,001 \text{ de aproximacion.}$$

OBSERVACIONES IMPORTANTES SOBRE LA ESTRACCION DE LA RAIZ CUADRADA DE LOS QUEBRADOS.

185. Hasta el presente hemos supuesto que en la valuacion aproximada de las raices el grado de aproximacion se indique de antemano, y las trasformaciones que hemos dado á los números propuestos han sido consecuencias de esta suposicion. Pero hay cuestiones numéricas para las cuales el grado de aproximacion no está fijado, y en tal caso es necesario someter los números á disposiciones tales, que permitan formarse una idea clara y exacta del grado de aproximacion obtenido para el resultado.

Para dar de esto una esplicacion mas clara propongámonos *estraer la raiz cuadrada* de un quebrado $\frac{a}{b}$ teniendo por denominador ó un número *primo* ó un número cuyos factores no esten elevados en él mas que á la primera potencia: tales son los números 13, 14 ó 2×71, 5 ó 3×5.

Multiplicando los dos términos de este quebrado por el denominador b se obtiene $\frac{ab}{b^2}$, y si se designa por r la parte entera de la raiz del numerador ab, se sigue que $\frac{ab}{b^2}$ ó $\frac{a}{b}$ se halla comprendido entre $\frac{r^2}{b^2}$ y $\frac{(r+1)^2}{b^2}$. Luego la raiz cuadrada de $\frac{a}{b}$ está comprendida entre $\frac{r}{b}$ y $\frac{r+1}{b}$: así pues, $\frac{r}{b}$ representa la raiz de $\frac{a}{b}$ valuada en una fraccion representada por $\frac{1}{b}$.

El resultado en este ejemplo no está aproximado mas que en $\frac{1}{b}$; pero si se quisiese un grado mayor de aproximacion, se buscaria la raiz cuadrada de ab aproximada en $\frac{1}{n}$ por ejemplo (Véase el n.° 182). Representando ahora por $\frac{r'}{n}$ el valor de esta raiz se tendrá que $\sqrt{ab}$ está comprendida entre $\frac{r'}{n}$ y $\frac{r'+1}{n}$, y por consiguiente $\sqrt{\frac{ab}{b^2}}$ ó $\sqrt{\frac{a}{b}}$ entre $\frac{r'}{nb}$ y $\frac{r'+1}{nb}$.

Así $\frac{r'}{nb}$ será el valor de $\sqrt{\frac{a}{b}}$ próximamente una fraccion representada por $\frac{1}{nb}$.

Sea, por ejemplo, $\frac{7}{13}$ *la fraccion propuesta.*

Esta fraccion se reduce á $\frac{7 \times 13}{(13)^2}$ ó á $\frac{91}{(13)^2}$; pero la raiz cuadrada de 91 es 9, con la diferencia de una unidad próximamente; luego $\frac{9}{13}$ es la raiz pedida valuada en $\frac{1}{13}$.

Si se quiere mayor grado de aproximacion, se estraerá la raiz cuadrada de 91 aproximado en 0,01 (n.° 183), y resulta 9,53.

Luego $\sqrt{\frac{7}{13}} = \frac{9,53}{13} = \frac{953}{1300}$, $\frac{1}{1300}$ de aproximacion.

Nota. — En este ejemplo hemos hallado $\frac{9}{13}$ por un valor aproximado de la raiz cuadrada de $\frac{7}{13}$, es decir, *una fraccion mayor* que la propuesta. Y así debe ser, pues que el cuadrado de una fraccion es el producto de ella por sí misma, y en la multiplicacion de los quebrados propiamente tales el producto es menor que uno de los factores.

El artificio de la trasformacion precedente, que consiste en *multiplicar* los dos términos del quebrado por el *denominador*, tiene por objeto hacer á este un *cuadrado perfecto*, á fin de que el valor aproximado de la raiz que se quiere estraer, sea representado por un quebrado exacto y se pueda juzgar acerca del grado de aproximacion obtenido. Así hemos dicho (n.° 8) que no se puede formar una idea clara de un quebrado ó de un número fraccionario sino concibiendo la *unidad dividida en un número exacto de partes iguales de las que se tome cierto número.*

186. Hay casos en que se puede hacer al denominador de un quebrado cuadrado perfecto sin necesidad de multiplicar sus dos términos por él: estos son los que el denominador contiene un factor cuadrado perfecto. En este caso basta *multiplicar los dos términos por el factor que no lo es.*

Sea, por ejemplo, el quebrado $\frac{23}{48}$.

Observemos que 48 es igual á 16×3 ó á $(4)^2 \times 3$; así multiplicando los dos términos por 3 se tendrá el quebrado equivalente $\frac{23 \times 3}{(4)^2 \times 3}$ ó $\frac{69}{(12)^2}$, con cuya operacion el denominador queda hecho un cuadrado perfecto.

Estrayendo ahora la raiz de 69 valuada en $\frac{1}{10}$ de aproximacion por ejemplo, lo cual da 8,3, resulta $\frac{8,3}{12}$ por la raiz pedida $\frac{1}{120}$ próximamente.

En esta modificacion debe, pues, fundarse la disposicion que deberá darse á toda fraccion decimal cuya raiz cuadrada quiera estraerse, disposicion que consiste en *hacer* PAR *el número de cifras decimales* (si no lo es).

Sea pues la fraccion decimal 5,249.

Siendo el denominador de esta fraccion 1000 ó 100×10, bastará multiplicar por 10 sus dos términos, lo que se reduce á colocar un 0 á la derecha del número propuesto, y se obtiene 5,2490. Estrayendo la raiz de 52490 aproximada en una unidad, se halla 229: así 2,29 es la raiz pedida valuada en $\frac{1}{100}$ de aproximacion.

187. Casi todos los autores, al hablar de la estraccion de la raiz cuadrada por aproximacion, establecen como *principio* que para estraer la raiz cuadrada de un quebrado *es necesario estraer la del numerador y la del denominador*. Este principio tiene lugar (n.º 182) cuando los dos términos del quebrado son cuadrados perfectos, pero no lo tienen cuando no lo son; y he aquí porque este principio no lo hemos hecho estensivo al establecerlo sino para los quebrados cuyos términos son cuadrados perfectos. Resulta por otra parte de lo que hemos dicho en los n.os 183 y 185, que tambien tiene lugar en un quebrado cuyo denominador es cuadrado perfecto, en cuyo caso ya *puede hacérsele aplicable á toda clase de quebrados*, sin que pueda presentarse sin inconveniente alguno en las aplicaciones numéricas, pues que de todos modos siempre es necesario para valuar la raiz cuadrada de un quebrado hacer á su denominador cuadrado perfecto.

188. Observacion general. — Resulta evidentemente de los principios anteriormente demostrados que dado un número entero, puede obtenerse la espresion exacta de su raiz cuadrada, siempre que sea un cuadrado perfecto, ó bien un valor aproximado cuanto se quiera á esta raiz si no es cuadrado perfecto; mas no sucede así con los números fraccionarios.

Estos principios son por otra parte del todo independientes del sistema de numeracion en que se opera; es decir, que los procedimientos establecidos para la investigacion de la raiz cuadrada de los números enteros ó fraccionarios en el sistema decimal serian absolutamente semejantes en cualquier otro sistema de numeracion. Así aconsejamos á los principiantes que para adquirir toda la práctica que exije de por sí la ciencia del cálculo se ejerciten en estraer raices cuadradas conforme á otros sistemas de numeracion, por ejemplo al duodecimal. Esto les hará conocer sin dificultad alguna que para la estraccion de la raiz cuadrada de un número entero, bien sea exactamente, ó bien en fracciones duodecimales, basta operar segun las reglas espuestas en los n.os 179 y 183, y para la de los quebrados es necesario darles trasformaciones análogas á las que hemos indicado en los n.os 184, 185 y 186.

Tal es finalmente la naturaleza de los números reconocidos como *cuadrados perfectos* en el sistema decimal, que estos mismos números no dejan de serlo porque se les considere conforme á otro sistema; y los que no tienen raiz exacta en el sistema decimal tampoco la tienen en ningun otro. Así pues, los números *cuatro*, *nueve*, *diez y seis*..... *cuarenta y nueve*.... *óchenta y uno*... son cuadrados perfectos en todos los sistemas, y los números *dos*, *tres*... *siete*... *once*... no tienen raiz exacta en sistema alguno. Esto es, pues, una consecuencia de que la proposicion del n.º 176 se funde sobre los principios demostrados en los n.os 129 y 130, y de que estos principios sean independientes de cualquier hipótesis particular relativa al sistema de numeracion.

§ II. Formacion del cubo y estraccion de la raiz cúbica de los números.

189. Se llama *cubo ó tercera potencia* de un número el producto de tres factores iguales á este número, y *raiz cúbica ó tercera* de un número es un segundo número que elevado al cubo reproduce al primero.

La formacion del cubo de un número entero se reduce á dos multiplicaciones sucesivas que se efectuan segun las reglas indicadas en la primera parte al tratar de las operaciones fundamentales de la Aritmética.

Siendo los diez primeros números

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$$

se tendrá que sus cubos ó terceras potencias son

$$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.$$

Por ejemplo, el cubo de 7 siendo igual á $7 \times 7 \times 7$, se dirá para formarlo: 7 veces 7 son 49, y en seguida 49 veces 7 son 343; luego 343 es el cubo de 7, y así de otros.

Y *recíprocamente*, los números de la segunda línea tienen por *raiz cúbica* á los de la primera.

A la simple inspeccion de lo que acabamos de ver se reconoce fácilmente que entre los números de una, dos ó tres cifras no hay mas que *nueve* que sean *cubos perfectos*, y cada uno de los otros tienen por raiz cúbica un entero mas una fraccion, que *no puede espresarse exactamente*. En efecto, supongamos por un momento que un número entero N tenga por raiz 3.ª exacta un número fraccionario $\frac{a}{b}$: en este caso es preciso que elevando $\frac{a}{b}$ al cubo se tenga á N, pero este es imposible, porque $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$ da por resultado $\frac{a^3}{b^3}$; y como no se puede suponer que $\frac{a}{b}$ sea un número fraccionario irreductible, resulta que a y b son primos entre sí, y por tanto a^3 y b^3; de modo que $\frac{a^3}{b^3}$ es un número fraccionario irreductible que por consiguiente no puede ser igual al número entero N.

Las raices cúbicas de los números enteros que no son cubos exactos de otros números enteros no pueden obtenerse exactamente, y son por esta razon números INCONMENSURABLES ó IRRACIONALES.

190. Así como para descubrir el procedimiento de la estraccion de la raiz cuadrada de un número entero cualquiera nos ha sido indispensable fundarnos en la espresion del cuadrado de un *binomio* $(a+b)$, es decir, de la *suma de dos cantidades*; así tambien para la estraccion de la raiz cúbica tenemos que conocer la espresion del cubo de esta suma $(a+b)$.

Ya hemos visto (n.º 177) que

$$(a+b)^2 \text{ ó } (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2.$$

Si se multiplica este primer resultado por $a+b$................ segun la regla establecida (n.º 112) para la multiplicacion de los polinomios, y se hace la reduccion de los términos semejantes, se tendrá

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \qquad \\ +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Si en esta fórmula se hace $b=1$, resulta

$$(a+1)^3 = a^3+3a^2+3a+1,$$

de donde se deduce $\qquad (a+1)^3 - a^3 = 3a^2+3a+1,$

lo que prueba que *la diferencia de los cubos de dos números cualesquiera que difieren en una unidad es igual al triplo del cuadrado del menor número*, *mas el triplo de este mismo número*, *mas* 1.

Así la diferencia entre el cubo de 90 y el de 89 es igual á

$$3\times(89)^2+3\times 89+1 = 24031.$$

De aquí, pues, se infiere que dos cubos perfectos consecutivos se diferencian entre sí cuanto mayores sean sus raices tomadas en la serie natural de los números.

191. Investiguemos ahora un procedimiento *para estraer la raiz cúbica de un número entero.*

Si el número tiene tres cifras todo lo mas, *su raiz se obtiene inmediatamente con la sola inspeccion de los cubos de los nueve primeros números*. Así la raiz cúbica de 125 es 5, la de 72 es 4 mas una fraccion, ó si se quiere 4, con diferencia de una unidad próximamente. La de 841 es 9 escepto una unidad poco mas ó menos, pues que 841 se halla entre 729 ó el cubo de 9, y 1000 ó el cubo de 10.

Consideremos un número de mas de tres cifras.

Sea, por ejemplo, 103823 el número propuesto.

103.823	4		
64	48		
398.23		48	47
		48	47
		384	329
		192	188
		2304	2209
		48	47
		18432	15463
		9216	8836
		110592	103823

Estando comprendido este número entre 1000, que es el cubo de 10, y 1000000, que es el de 100, su raiz cúbica estará compuesta de dos cifras, es decir, de decenas y unidades. Representemos por a las decenas y por b las unidades, y tendremos (n.º 190)

$$103823 = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Por lo que se ve que el cubo de un número compuesto de decenas y unidades *contiene el cubo de las decenas, mas el triplo del producto del cuadrado de las decenas por las unidades, mas el triplo del producto de las decenas por el cuadrado de las unidades, mas el cubo de las unidades.*

Esto supuesto, no pudiendo dar el cubo de las decenas unidades de un órden inferior á los *miles*, resulta que las tres últimas cifras de la derecha no pueden hacer parte de él, y sí se hallará en la parte 103 (separada por un punto de 823).

Ahora bien, la raiz del mayor cubo contenido en 103 siendo 4 para 64, y como 4 es la cifra de las decenas de la raiz buscada, porque 103823 está comprendido entre 64000 ó $(40)^3$ y 125000 ó (50)3, resulta que la raiz estará compuesta de 4 decenas, mas cierto número de unidades menor que *diez*.

Hallada ya la cifra de las decenas, restemos su cubo 64 de 103, y se tendrá de resto 39, que seguido del periodo 823 da 39823, resultado que contiene el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, mas las dos otras partes anteriormente enunciadas. Y como el cuadrado de un número de decenas no puede dar unidades de un órden inferior al de las centenas, se sigue que el triplo del producto del cuadrado de las decenas por las unidades no puede hallarse mas que en la parte izquierda 823 de las dos últimas cifras 23 (que por esta razon se separa por un punto). Por otra parte se puede formar el triplo del cuadrado de las 4 decenas, lo cual da 48; y dividiendo 398 por 48, el cociente 8 será la cifra de las unidades de la raiz ó un número mayor que esta cifra, porque las 398 centenas contienen además del triplo producto del cuadrado de las decenas por las unidades las reservas procedentes de las otras dos partes. Para comprobar si 8 no es muy grande, se podrá como para la raiz cuadrada formar con esta cifra 8 y con la cifra 4 de las decenas las tres partes que entran en 39823; pero *es mas sencillo* elevar 48 al cubo.

Haciéndolo así, se halla 110592, número mayor que 103823; por lo que la cifra 8 no conviene. Formando el cubo 47, se tiene 103823: luego el número propuesto es un cubo perfecto y tiene por raiz cúbica exacta 47.

Nota.—No se puede buscar desde luego la cifra de las unidades, porque como el cubo de las unidades puede dar decenas y centenas, resulta que estas decenas y centenas se hallan confundidas con las que provienen de las otras partes del cubo.

Propongámonos estraer la raiz cúbica de 47954.

47.954		
27	36	
——	27	36
209		36
		——
		218
47954		108
46656		——
——		1296
1298		36
		——
		7776
		3888
		——
		46656

El número 47954 estando comprendido entre 1000 y 1000000, su raiz lo estará entre 10 y 100, ó bien se compondrá de decenas y unidades. El cubo de las decenas se halla en 47 *mil*, y podrá probarse como en el ejemplo anterior que 3 raiz del mayor cubo contenido en 47 espresa el número de las decenas. Restando el cubo de 3 ó 27 de 47, se tiene por resto 20; bajando al lado de este resto la sola cifra 9 del periodo 954 resultan 209 *centenas*, número que se compone *del triplo del producto del cuadrado de las decenas por las unidades*, mas de las reservas procedentes de las otras partes. Luego si se forma el triplo del producto del cuadrado de las decenas 3, lo cual da 27 *centenas*, y se divide 209 por 27, el cociente 7 será la cifra de las unidades de la raiz ó un número mayor que esta cifra. Elevando 37 al cubo se halla 50653, número mayor que 47954; pero si se eleva á 36, resulta 46656, que restado de 47954 da de resto 1298. Así pues, el número propuesto no es un cubo perfecto, y su raiz próximamente una unidad es 36. En efecto, la diferencia entre el número dado y el cubo de 36 es como acabamos de ver 1298, número menor que $3 \times (36)^2 + 3 \times 36 + 1$ (diferencia entre $(37)^3$ y $(36)^3$), pues que se ha obtenido en la comprobacion 3888 por el triplo del cuadrado de 36.

192. Sea propuesto ahora estraer la raiz cúbica de un número de mas de seis cifras, tal como 43725658.

43.725.658	352		
27	———	35	352
———	27	35	352
167		———	———
		175	704
43725		105	1760
42875		———	1056
———		1225	———
8506		35	123904
		———	352
43725658		6125	———
43614208		3675	247808
———		———	619520
resto... 111450		42875	371712
			———
			43614208

Cualquiera que sea la raiz pedida, debe tener por precision mas de una cifra, y puede considerársela como compuesta solamente de unidades y decenas (pudiendo tener el número de las decenas muchas cifras).

Pero como el cubo de las decenas da al menos *miles*, resulta que este cubo se halla necesariamente en la parte izquierda de las tres últimas cifras 658. Si ahora se estrae la raiz del mayor cubo contenido en 43725 considerada como espresando unidades simples, se tendrá el número total de las decenas de la raiz pedida. Efectivamente, sea a la raiz de dicho cubo mayor; resultará que la raiz pedida tendrá por lo menos un número a de decenas, pues que $a^3 \times 1000$ puede ser sustraido de 43725000 y *à fortiori* de 43725658. Por otra parte la raiz no podrá tener $(a+1)$ decenas, porque $(a+1)^3$ siendo mayor que 43725, se sigue que $(a+1)^3 \times 1000$ escede á 437250000 al menos en *mil*, y es por consiguiente mayor que 43725658. Luego la raiz pedida se compone de a decenas, mas cierto número de unidades menor que *diez*.

Ya queda, pues, reducida la cuestion á estraer la raiz cúbica de 43725; pero como este número tiene mas de tres cifras, su raiz deberá constar de mas de una, esto es, que deberá componerse de decenas y unidades. Para obtener las decenas es necesario separar las tres últimas cifras 725, y estraer la raiz del mayor cubo contenido en 43. (Desde luego se ve lo que debiera hacerse si este número contuviese mas de tres cifras.)

El mayor cubo contenido en 43 es 27, cuya raiz es 3; y esta cifra espresa las decenas de la raiz de 43725 (ó la cifra de las centenas de la raiz total). Restando el cubo de 3 ó 27 de 43, se tiene por resto 16, á cuyo lado deberá bajarse la cifra 7 del siguiente periodo 725, lo cual da 167.

Formando ahora el triplo del cuadrado de las decenas 3, resulta 27 *mil*, y dividiendo 167 por 27, el cociente 6 espresará la cifra de las unidades de la raiz de 43725, ó bien un número mayor: bien fácil es de ver que tiene lugar lo segundo, y por tanto será necesario hacer la prueba con 5, para lo cual se elevará 35 al cubo, y el resultado 42875 se restará de 43725. Resulta un resto 850, que es evidentemente menor que $3 \times (35)^2 + 3 \times 35 + 1$, pues que el cuadrado de 35 como hemos visto en la operacion es 1225. Así 35 es la raiz del mayor cubo contenido en 43725: este es pues *el número total de las decenas de la raiz pedida.*

Para obtener las unidades se bajará á la derecha del resto 850 la primera cifra 6 del último periodo 658, lo cual da 8506; fórmese además el triplo del cuadrado de las decenas 35 (lo que es fácil, por haberse ya formado el cuadrado de 35 en la comprobacion de la cifra anterior), y divídase 8506 por este triplo cuadrado 3675: el cociente es 2, cuya exactitud se comprobará elevando 352 al cubo; y resulta 43614208, número menor que el propuesto. Haciendo la sustraccion, se obtiene por resto 111450. Luego 352 es la raiz cúbica de 43725668 próximamente una unidad.

REGLA GENERAL. — *Para estraer la raiz cúbica de un número entero se le dividirá en periodos de tres cifras cada uno principiando por la derecha* (*el último puede ser de dos y aun de una sola cifra* y el NUMERO DE PERIODOS ES IGUAL AL DE LAS CIFRAS DE LA RAIZ); *en seguida se estraerá la raiz del mayor cubo contenido en el primer periodo de la izquierda y se restará este cubo de dicho primer periodo*: *bájese al lado del resto la primera cifra del segundo periodo y divídase el número resultante por el triplo del cuadrado de la cifra hallada en la raiz*; *escríbase el cociente á la derecha de esta cifra y elévese al cubo el conjunto de ambas*: *si este cubo es mayor que los* *dos primeros periodos, se disminuirá al cociente en una ó muchas unidades hasta tanto que se obtenga un cubo que pueda sustraerse del conjunto de dichos dos periodos: hecha la sustraccion, se bajará al lado del resto la primera cifra del tercer periodo y se dividirá el número así formado por el triplo del cuadrado de las dos cifras ya halladas; y el cociente resultante, si no es muy grande, deberá ser tal que escribiéndólo á la derecha de las otras cifras y elevando al cubo el resultado, pueda sustraerse del conjunto de los tres primeros periodos. Hecha esta nueva sustraccion, bájese al lado del resto la primera cifra del cuarto periodo y continúese la misma serie de operaciones hasta que no quede periodo alguno.*

Observacion.—Sucede muy á menudo llegar á sospechar en el curso de las operaciones que uno de los cocientes de que hemos hablado sea muy grande, y en tal caso se supone conveniente disminuirlo desde luego en dos ó muchas unidades; pero elevando al cubo la raiz hallada seguida de esta cifra y restando el resultado del conjunto de los periodos considerados en el número propuesto, se puede obtener un resto muy grande, lo cual puede dar á recelar si la última cifra colocada en la raiz es muy pequeña. Por tanto para estar cierto del fundamento de esta sospecha es necesario asegurarse de *si el resto escede ó es igual al triplo del cuadrado de la raiz obtenida, mas el triplo de esta misma raiz, mas uno.* En tal caso se debe aumentar á la raiz en una ó muchas unidades del órden de la última cifra obtenida.

He aquí ejemplos sobre los cuales se podrán ejercitar los principiantes:

$$\sqrt[3]{483249} = 78 \text{ con un resto } 8697.$$

$$\sqrt[3]{91632508641} = 4508 \text{ con un resto } 20644129.$$

$$\sqrt[3]{32977340218432} = 32068, \text{ sin resto alguno.}$$

ESTRACCION DE LA RAIZ CUBICA POR APROXIMACION.

193. Cuando el número propuesto no es el cubo de otro número entero, el procedimiento de que hemos hablado no da mas que la parte entera. En cuanto á la fraccion que debe completar la raiz, ya hemos visto (n.º 189) que no puede obtenerse exactamente; pero se puede hallar otra fraccion que no difiera sino en una cantidad tan pequeña como se quiera, conforme á una regla análoga á la del n.º 182.

Propongámonos estraer en general la raiz cúbica ó tercera de un número (entero ó fraccionario) *aproximada en una fraccion* $\frac{1}{n}$.

El número a puede ponerse bajo la forma $\frac{a \times n^3}{n^3}$; y representando por r la raiz del mayor cubo contenido en an^3, es decir, en la raiz cúbica de an^3 aproximada en una unidad, resultará que el número $\frac{an^3}{a^3}$ ó a se halla comprendido entre $\frac{r^3}{n^3}$ y $\frac{(r+1)^3}{n^3}$; y así también $\sqrt[3]{a}$ lo estará entre las raices 3.as de estos dos números ó entre $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$; luego $\frac{r}{n}$ es la raiz pedida aproximada en una fraccion $\frac{1}{n}$.

Así para estraer la raiz 3.a de un número valuada en una fraccion $\frac{1}{n}$ próximamente se multiplicará el número por el cubo del denominador n, *se estraerá la raiz del producto aproximada en una unidad y se dividirá el resultado por* n.

Ejemplo.—*Se pide la raiz cúbica de* 15 *aproximada en* $\frac{1}{12}$.

Se tendrá $15 \times (12)^3 = 15 \times 1728 = 25920$: la raiz cúbica de 25920 aproximada en una unidad es 29: luego la raiz pedida es $\frac{29}{12}$ ó $2\frac{5}{12}$.

2.° *Estraer la raiz cúbica de* $37\frac{8}{13}$ ó $\frac{489}{13}$ *aproximada en* $\frac{1}{20}$.

Se tiene $\frac{489}{13} \times (20)^3 = \frac{489 \times 8000}{13} = \frac{3912000}{13} = 300923\frac{1}{13}$; pero la raiz cúbica de $300923\frac{1}{13}$ próximamente una unidad es 67; luego $\frac{67}{20}$ ó $3\frac{7}{20}$ es la raiz pedida valuada en $\frac{1}{20}$ de aproximacion.

Del mismo modo se hallará

$$\sqrt[3]{47} = \frac{72}{20} = 3\,\frac{12}{20} = 3\,\frac{3}{5} \text{ valuada en } \frac{1}{20} \text{ de aproximacion.}$$

$$\sqrt[3]{23\,\frac{7}{8}} = \frac{37}{13} = 2\,\frac{11}{13} \text{ valuada en } \frac{1}{13} \text{ de aproximacion.}$$

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15} \text{ valuada en } \frac{1}{30} \text{ de aproximacion.}$$

194. La aproximacion por decimales viene á ser una consecuencia de la regla anterior.

Así *propongámonos valuar la espresion* $\sqrt[3]{25}$ en 0,001 *próximamente*.

Es necesario (n.° 193) multiplicar 25 por el cubo de 1000 ó por 1000000000, es decir, añadir *nueve* ceros á la derecha de 25, lo cual da 25000000000: la raiz cúbica de este número es 2924 próximamente una unidad mas; luego 2,924 es la raiz pedida valuada en $\frac{1}{1000}$ de aproximacion.

En general *para valuar la raiz cúbica de un número entero en decimales se escribirán á la derecha del número* TRES VECES *tantos ceros como cifras decimales se quieran obtener en la raiz; en seguida se estraerá aproximadamente la raiz cúbica del nuevo número, y por último se separarán hácia la derecha del resultado el número de cifras decimales pedido.*

NOTA.—Así como al estraer la raiz cuadrada por aproximacion en decimales era permitido el no escribir inmediatamente los periodos, así tambien se permite en la estraccion de la raiz cúbica; y bastará como en aquella irlos escribiendo á medida que se quieran obtener nuevas cifras decimales.

195. Cuando el número propuesto es fraccionario, se pueden considerar dos cosas, á saber: ó es decimal, ó es un número cualquiera.

PRIMER CASO.—*Estraer la raiz cúbica de* 3,1415 *valuada en* $\frac{1}{100}$ *próximamente*.

Como en virtud de la regla del n.° 193 es necesario multiplicar el número por $(100)^3$ ó 1000000, bastará escribir *dos* ceros á la derecha de 3,1415 y suprimir la coma, lo cual da 3141500; y como la raiz cúbica de este último número aproximada en una unidad es 146, resulta que 1,46 es la raiz pedida valuada en $\frac{1}{100}$.

Si se quisiese obtener una nueva cifra decimal en la raiz, bastaria colocar otro *período* de tres ceros á la derecha del resto y continuar la operacion.

Regla general.—Para estraer la raiz cúbica de una fraccion decimal con un grado de aproximacion determinado *se hará* (colocando á la derecha de la fraccion un número conveniente de ceros) *que el número de cifras decimales sea* TRIPLO *del que se quiere obtener en la raiz; suprímase en seguida la coma, estráigase la raiz* 3.ª *del número resultante aproximada en una unidad y sepárese hácia la derecha de esta raiz el número de cifras decimales pedido.*

Segundo caso.—Cuando se trata de un número fraccionario cualquiera, *se le reducirá desde luego á decimales* (n.º 91) *haciendo estensiva la operacion hasta haber obtenido en el cociente* TRES VECES *tantas cifras decimales como quieran obtenerse en la raiz y despues se opera como en el caso precedente.*

He aquí nuevas aplicaciones:

$$\sqrt[3]{79} = 4{,}2908 \text{ valuada en } \frac{1}{10000} \text{ próximamente.}$$

$$\sqrt[3]{3{,}00415} = 1{,}4429 \text{ valuada en } \frac{1}{10000} \text{ próximamente.}$$

$$\sqrt[3]{0{,}00101} = 0{,}10 \text{ valuada en } \frac{1}{100} \text{ próximamente.}$$

$$\sqrt[3]{\frac{14}{25}} = 0{,}824 \text{ valuada en } \frac{1}{1000} \text{ próximamente.}$$

OBSERVACION SOBRE LA ESTRACCION DE LA RAIZ CUBICA DE LOS QUEBRADOS.

196. Siempre que al estraer la raiz cúbica de un quebrado no se fije de antemano el grado de aproximacion, se deberá como para la raiz cuadrada dar al número propuesto algunas trasformaciones.

Sea $\frac{a}{b}$ el número propuesto, suponiendo á b un número primo ó un producto de factores primos elevados á la primera potencia.

Principiemos por hacer al denominador un cubo perfecto multiplicando los dos términos por b^2, y el quebrado se mudará en $\frac{ab^2}{b^3}$. Representando por r la parte entera de la raiz cúbica de ab^2, se reconocerá fácilmente que $\frac{ab^2}{b^3}$ ó $\frac{a}{b}$ se halla comprendido entre $\frac{r^3}{b^3}$ y $\frac{(r+1)^3}{b^3}$, y por consiguiente $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ estará comprendida entre $\frac{r}{b}$ y $\frac{r+1}{b}$; así pues, $\frac{r}{b}$ es la raiz cúbica de $\frac{a}{b}$ aproximada en una fraccion $\frac{1}{b}$.

Si se quisiese mayor exactitud, no habria mas que buscar un grado mayor de aproximacion, tal como $\sqrt[3]{ab^2}$, y dividir el resultado por b.

Cuando el denominador b contiene factores de los que unos son cubos perfectos y los otros cuadrados tambien perfectos, la trasformacion que debe darse al quebrado es muy sencilla.

Sea, por ejemplo, el quebrado $\frac{113}{360}$.

El número 360 es igual (n.º 144) á $2^3.3^2.5$; luego si se multiplican los dos términos del quebrado por 3×5^2 ó 75, podrá ponerse bajo la forma

$$\frac{113 \times 75}{2^3 \times 3^3 \times 5^3} = \frac{8475}{(30)^3}.$$

Estrayendo la raiz cúbica de 8475 aproximada en una unidad, lo cual da 20, resulta $\frac{20}{30}$ ó $\frac{2}{3}$ por la raiz pedida aproximada en $\frac{1}{30}$.

La regla de la estraccion de la raiz cúbica de los quebrados decimales puede considerarse como un caso particular de esta última trasformacion.

Para que el denominador de un quebrado decimal sea *un cubo perfecto*, es decir, para que sea igual á $(10)^3$, $(100)^3$, es necesario *hacer al número de cifras decimales múltiplo de* TRES, lo cual se consigue añadiendo un número conveniente de ceros.

Por último, todo lo que se ha dicho en los n.os 187 y 188 sobre la raiz cuadrada de los números se aplica igualmente á la raiz cúbica y en general á las raices, cualquiera que sea su grado.

No podemos estendernos en estos Elementos á dar procedimientos para la estraccion de las raices de un grado superior al 3.°, porque estan fundados en la composicion de la potencia de un grado cualquiera de un binomio, y porque la *fórmula* que está conexa con esta composicion, exige para su completo desarrollo conocimientos mas estensos de Algebra que los que hasta aquí hemos indicado. Sin embargo daremos en el último capítulo de este tratado un medio sencillo para efectuar la estraccion de las raices de todos grados.

CAPITULO VII.

Aplicaciones de las reglas de la Aritmética.—Teoría de las Relaciones y Proporciones.

197. Introduccion.—Despues de haber dado á conocer las propiedades relativas á las diversas operaciones de la Aritmética nos queda un punto bastante difícil de desempeñar, cual es el de poner á los principiantes al alcance de la resolucion de toda clase de cuestiones numéricas.

Se distinguen dos clases principales de cuestiones, que son teoremas y problemas.

Puede una cuestion tener por objeto demostrar la existencia de ciertas propiedades de que gozan números conocidos y dados, y entonces recibe el nombre de *teorema*.

El capítulo V contiene una porcion de cuestiones de este género y entre ellas se hallan los principios de la divisibilidad de los números, las propiedades de las fracciones decimales periódicas y de las fracciones continuas, que son otros tantos teoremas.

Si es el objeto de la cuestion determinar ciertos números mediante el conocimiento de otros que tienen con los primeros relaciones indicadas en el enunciado, entonces recibe el nombre de *problema*. Tales son las cuestiones que hemos presentado en el curso de los dos primeros capítulos como aplicaciones de las diversas reglas de la Aritmética.

Pero pueden presentarse algunos problemas difíciles de resolver cuyos enunciados sean tales, que *haya dificultad en descubrir y determinar la serie de operaciones que es indispensable efectuar con los números conocidos y dados para conocer los números que se buscan*, y esto es lo que constituye el *análisis ó resolucion* del problema.

Sin embargo, hay cierta clase de problemas para cuya resolucion se pueden establecer reglas fijas y ciertas: tales son los que dependen de *la teoría de las relaciones y proporciones.* Es por lo tanto muy natural dar principio con el análisis de esta teoría, que sin duda debe considerársele por sus muchas aplicaciones como una de las mas importantes de las Matemáticas.

§ I. De las Relaciones y Proporciones.

198. Ya hemos dicho (n.º 1) que no hay magnitud absoluta; que para formarse una idea de una magnitud cualquiera es necesario compararla con otra elejida convencionalmente, aunque de la misma especie, y que puede ser tomada arbitrariamente ó sacada de la misma naturaleza: el resultado de esta comparacion es lo que hemos llamado *número*.

Pero si en vez de comparar una magnitud con su unidad se la quiere cotejar con dos magnitudes cualesquiera de una misma especie, lo que se reduce á comparar los dos números que las representan, *el resultado de esta comparacion* es lo que constituye la *relacion* ó *razon* de dos números.

NOTA. — Estas dos palabras *relacion* y *razon* en Matemáticas son sinónimas y espresan la idea que se forma uno de una magnitud cualquiera por medio de otra con quien se compara y que debe ser en la esencia de la misma especie.

En este sentido *un número* es la espresion de la relacion ó razon de una magnitud con su *unidad*.

En general *hay dos modos de comparar dos magnitudes entre sí*:

O bien se quiere saber en qué cantidad la mayor escede á la menor, y el resultado se obtiene sustrayendo esta de aquella;

O bien se quiere saber cuántas veces una contiene á otra, cuya operacion está reducida á dividir ambas cantidades una por otra.

Así sean 24 y 6 los dos números que se quieren comparar:

Se tiene $24 - 6 = 18$, y $\frac{24}{6} = 4$:

El resultado de la comparacion por sustraccion es 18, en tanto que el de la comparacion por division no es mas que 4.

Para distinguir estas dos especies de relaciones se les llamó en un tiempo á la primera *relacion aritmética* y á la segunda *relacion geométrica*. Pero estas denominaciones, que á la verdad ningun sentido ofrecen, se ha reemplazado por otras, cuales son para la primera, *relacion por sustraccion* ó simplemente *diferencia*, porque es el resultado de una sustraccion; y para la segunda, *relacion por division* ó simplemente *relacion*, pues que por lo regular el objeto de la comparacion de las magnitudes en Matemáticas es averiguar cuántas veces una de las cantidades contiene á la otra.

Por ejemplo, en la teoría de los números complejos la *relacion de la unidad principal* de cierta naturaleza *con una de sus subdivisiones* *ó la relacion de dos subdivisiones entre sí* no es otra cosa mas que el número de veces que la una contiene á la otra. En la comparacion del nuevo Sistema de pesos y medidas con el antiguo *la relacion del metro con la toesa* y *la de la toesa con el metro*, *la del quilógramo con la libra* y *la de la libra con el quilógramo* son los números enteros ó fraccionarios que resultan de la division de los dos números, espresando *en unidades de la misma especie* las medidas que se comparan.

Así pues, de aquí en adelante nos serviremos de la palabra *relacion* para espresar *el resultado ó el cociente de la division de dos números*, y de las voces *diferencia* ó *relacion por sustraccion* para indicar que dos números se han comparado por sustraccion.

En toda relacion por sustraccion ó por division se distinguen dos términos, que son los números que se comparan. El primero se llama *antecedente* y el segundo *consecuente*.

199. Cuando dos relaciones por sustraccion son iguales, el conjunto de los cuatro números que las constituyen se llama una *equidiferencia*, pues que es la espresion de dos diferencias iguales. (Antes se la llamaba *proporcion aritmética*.)

Por ejemplo, los cuatro números 12, 5, 24, 17: como la diferencia de 12 á 5 es 7 y la de 24 á 17 es tambien 7, se dice que estas magnitudes forman una equidiferencia que se escribe así:

$$12 \,.\, 5 \,:\, 24 \,.\, 17,$$

colocando *un* punto entre el primero y segundo término, *dos* entre el segundo y tercero y *uno* entre el tercero y el cuarto.

Se enuncia de este modo:

12 *es á* 5 *como* 24 *es á* 17,

lo que quiere decir que 12 escede á 5 en tantas unidades como 24 á 17.

Tambien puede escribirse segun los principios adoptados:

$$12 - 5 = 24 - 17.$$

El primero y tercer término 12 y 24 se llaman *antecedentes* de la *equidiferencia*; y el segundo y el cuarto 5 y 17 *consecuentes*: estas denominaciones estan acordes con la de *relacion por sustraccion* que se ha dado á los dos términos.

El primero y último término 12 y 17 se llaman *estremos* y el segundo y tercero 5 y 24 *medios*.

200. Cuando dos relaciones por division son iguales, el conjunto de los números que las constituyen se llama *una proporcion*: antes se le llamaba *proporcion geométrica*, pero esta denominacion que no tiene sentido, pudiera ser reemplazada por la de *equicociente*, en razon de

ser *la espresion de dos cocientes iguales*, aunque la palabra *proporcion* es la que generalmente se emplea.

Sean, por ejemplo, los cuatro números 15, 5, 36, 12 los que constituyen una *proporcion*, pues que siendo 3 la relacion de 15 con 5 ó el cociente de 15 por 5, es igual á la de 36 con 12 ó al cociente de 36 por 12, que tambien es 3. Se escribe así:

$$15 : 5 :: 36 : 12,$$

colocando *dos* puntos entre el primero y segundo término, *cuatro* entre el segundo y tercero y *dos* entre el tercero y cuarto.

Se la enuncia del mismo modo que una *equidiferencia*: 15 *es á* 5 *como* 36 *es á* 12, lo que da á entender que 15 contiene á 5 tantas veces como 36 á 12; y por consiguiente tambien podrá escribirse de este modo: $\frac{15}{5} = \frac{36}{12}$.

Las denominaciones de los términos son las mismas que en la equidiferencia.

Así 15 y 36 son *antecedentes*, y 5 y 12 *consecuentes*: 15 y 12 *estremos* y 5 y 36 *medios*.

Tanto las equidiferencias como las proporciones y en particular estas gozan de muchas propiedades que espondremos sucesivamente.

DE LAS EQUIDIFERENCIAS.

201. Se llama *equidiferencia* (n.° 199) la espresion de la igualdad de dos diferencias.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL.—*En toda equidiferencia la suma de los estremos es igual á la suma de los medios.*

Sea la equidiferencia $11 \,.\, 7 \,.\, 19 \,.\, 15$;
resulta evidentemente $11 + 15 = 7 + 19$.

Pero para comprender esta proposicion mas generalmente observemos que si los consecuentes fuesen iguales á los antecedentes, por ejemplo,

$$11 \,.\, 11 \,.\, 19 \,.\, 19,$$

la proposicion seria evidente, porque $11 + 19 = 11 + 19$.

De modo que para darle esta trasformacion á la equidiferencia basta aumentar á cada uno de los consecuentes en la misma diferencia 4. Pero mediante esta adicion resulta con toda evidencia aumentado uno de los medios y uno de los estremos en el número 4; luego la suma de los medios y de los estremos se halla aumentada en el mismo número 4, y puesto que segun esta adicion las dos sumas son iguales, tambien deberán serlo las anteriores.

Observemos por otra parte que si no hubiese *equidiferencia* en los cuatro números, seria necesario para hacer á los consecuentes *iguales* á los antecedentes añadir á cada uno de ellos un *número diferente*, y como mediante esta adicion la suma de los estremos vendria á ser igual á la de los medios, resultaria que ambas sumas deberian ser desiguales antes de la adicion.

Luego *si cuatro números enunciados en cierto órden ó escritos sobre una misma línea forman una equidiferencia, la suma de sus términos estremos será igual á la de sus términos medios.*

Y recíprocamente, *si la suma del primero y último término es igual á la del segundo y tercero, ó si la suma de los estremos es igual á la de los medios, los cuatro números forman una equidiferencia en el órden en que estan enunciados ó escritos.* Pues que si nó la hubiese, no se verificaria ser la suma de los estremos igual á la de los medios.

Nota.—Puede suceder que los antecedentes sean menores que los consecuentes, como en esta equidiferencia:

$$9 . 14 \,\vdots\, 18 . 23.$$

Sin embargo, los razonamientos serán los mismos que para el caso anterior, esto es, que bastaria añadir á los dos antecedentes la *diferencia comun* 5, lo cual equivaldria á añadir el mismo número á la suma de los estremos y á la de los medios.

Veamos ahora con cuánta exactitud se aplican á esta propiedad y á su contraria las notaciones algebráicas.

Sean cuatro números a, b, c, d, que supondremos formen entre sí una *equidiferencia*:

Se tendrá $a . b \,\vdots\, c . d$, ó bien $a - b = c - d$.

Esto supuesto, añadamos á los dos miembros de esta igualdad la suma $b + d$, y resultará

$$a - b + b + d = c - d + b + d,$$

ó reduciendo, $a + d = c + b$;

luego *la suma de los estremos* a *y* d *es igual á la de los medios* c *y* b.

Y viceversa, si se tienen cuatro números a, b, c d, de tal modo que se verifique $a + d = b + c$,

sustrayendo $b + d$ de los dos miembros de esta igualdad se tendrá

$$a + d - b - d = b + c - b - d,$$

ó reduciendo, $a - d = c - d$,

ó finalmente, $a . b \,\vdots\, c . d.$

Luego *estos cuatro números forman una equidiferencia cuyos es-*

tremos son los dos términos de una de las dos sumas y los medios los dos términos de la otra.

202. Consecuencia.—Resulta de la anterior propiedad que *conociendo tres términos de una equidiferencia podrá obtenerse el cuarto*, si es un estremo, *restando de la suma de los medios el estremo conocido*, y si es un medio, *restando de la suma de los estremos el medio conocido.*

Así sea la equidiferencia

$$23 \,.\, 11 : 49 \,.\, x$$

(representando x el término incógnito).

Como segun la propiedad fundamental se tiene

$$x + 23 = 11 + 49,$$

resulta $$x = 11 + 49 - 23 = 37,$$

lo cual da $$23 \,.\, 11 : 49 \,.\, 37.$$

Así tambien en la equidiferencia

$$31 \,.\, 25 : x \,.\, 78$$

se tiene $$x + 25 = 31 + 78;$$

de donde $$x = 31 + 78 - 25 = 84,$$

y por consiguiente, $$3 \,.\, 25 : 84 \,.\, 78.$$

203. Algunas veces se presentan equidiferencias cuyos medios son iguales y entonces recibe el nombre de *equidiferencia continua* (ó *proporcion aritmética continua*).

Por ejemplo,

$$27 \,.\, 39 : 39 \,.\, 51$$

es una equidiferencia continua.

Como en este caso el duplo de uno de los medios debe en virtud de la propiedad ya enunciada ser igual á la suma de los estremos, resulta que *este medio debe ser igual á la semisuma de los dos estremos.*

Por consiguiente en la equidiferencia

$$23 \,.\, x : x \,.\, 49$$

se tendrá $$x = \frac{49 + 23}{2} = 36;$$

Luego $$23 \,.\, 36 : 36 \,.\, 49.$$

Este valor de x es lo que se llama *un medio diferencial* (ó *un medio proporcional aritmético*) entre los dos números 23 y 49.

204. He aquí algunas otras propiedades de las equidiferencias. Se pueden *aumentar ó disminuir los dos antecedentes ó consecuentes en un mismo número*, y *aumentar ó disminuir los dos primeros términos ó los dos últimos tambien en un mismo número*, sin que deje de existir igualmente la equidiferencia.

Esto es evidente, porque con estas trasformaciones se aumenta ó disminuye en un mismo número la suma de los estremos y la de los medios; y así la igualdad de ambas sumas subsiste la misma, como tambien la equidiferencia, pues que la propiedad fundamental á que está conexa es recíproca.

Tambien puede *invertirse el órden de los dos estremos y el de los medios*, ó bien *colocar los medios en el lugar de los estremos*, sin que por esto deje de subsistir la equidiferencia, pues es claro que segun estas trasformaciones la suma de los estremos es asimismo igual á la de los medios.

En general toda trasformacion efectuada con una equidiferencia, y tal que la suma de los estremos permanezca igual á la de los medios, no destruye la equidiferencia.

Siendo de poca utilidad el que nos estendamos mas en las propiedades de las equidiferencias por ser de muy poco uso, pasaremos á tratar de las de las *proporciones* propiamente dichas ó antes bien *proporciones geométricas*.

DE LAS PROPORCIONES.

205. Se entiende (n.º 203) por *proporcion* la espresion de la igualdad de dos *relaciones ó cocientes*.

Cuando cuatro números estan en proporcion, la *relacion comun* que existe entre los dos primeros términos y los dos últimos, puede ser ó un número entero, ó fraccionario, ó un quebrado propiamente tal.

Sean, por ejemplo, las proporciones

$$18 : 6 :: 24 : 8,$$
$$12 : 9 :: 36 : 27,$$
$$5 : 12 :: 20 : 48.$$

En la primera la relacion comun es 3, y en la segunda se tiene $\frac{12}{9} = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$; luego la relacion comun es un número fraccionario.

Por último en la tercera se tiene $\frac{20}{48} = \frac{5}{12}$, suprimiendo el factor comun 4 á ambos términos; luego la relacion comun es el quebrado $\frac{5}{12}$.

Propiedad fundamental.—*En toda proporcion el producto de los estremos es igual al de los medios.*

Desde luego se ve manifiesta la evidencia de esta proposicion si en vez de una proporcion, tal como

$$18 \,:\, 6 \,::\, 24 \,:\, 8,$$

se tuviese esta en la que los antecedentes son iguales á sus consecuentes, á saber:

$$18 \,:\, 18 \,::\, 24 \,:\, 24.$$

Ahora bien, para dar esta trasformacion á la primera basta multiplicar cada consecuente por la relacion comun 3; pero mediante esta multiplicacion uno de los estremos y uno de los medios resultan multiplicados por un mismo número, así como tambien el producto de los estremos y el de los medios; luego puesto que ambos productos resultantes son iguales, tambien lo serán los primitivos.

Observemos por otra parte que si los cuatro números dados no constituyesen una proporcion, seria indispensable para hacer los consecuentes iguales á los antecedentes multiplicar cada uno de ellos por un número diferente que espresase la relacion del primer término con el segundo ó del tercero con el cuarto; y como mediante esta multiplicacion el producto de los estremos vendria á ser igual al de los medios, resulta que los productos antes de la multiplicacion no eran iguales.

De donde podemos inferir que *si cuatro números enunciados ó escritos en cierto órden estan en proporcion, el producto de los estremos debe ser igual al de los medios.*

Y viceversa, *si el producto de dos términos estremos es igual al de dos medios, los cuatro números que los constituyen forman una proporcion en el órden en que estan enunciados ó escritos*; pues que si no la hubiese, tampoco el producto de los estremos seria igual al de los medios.

Apliquemos las notaciones algebráicas á la demostracion de esta propiedad recíproca.

Sean al efecto cuatro números a, b, c, d, que supondremos guarden tal proporcion entre sí que se tenga

$$a \,:\, b \,::\, c \,:\, d \text{ ó } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Multipliquemos, pues, los dos miembros de esta igualdad por *bd* y tendremos

$$\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d},$$

ó reduciendo, $ad = bc$.

Luego el *producto de los estremos* ad *es igual al de los medios* bc.

Y recíprocamente, si se tienen cuatro números a, b, c, d, de tal modo que se verifique

$$a \times d = b \times c,$$

dividiendo los dos miembros de esta igualdad por $b \times d$ resultará

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d},$$

ó suprimiendo los factores comunes, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, es decir,

$$a : b :: c : d.$$

Luego *los cuatro números* a, b, c, d *forman una proporcion cuyos estremos son los factores de uno de los productos y los medios los del otro.*

206. Consecuencia.—De esta propiedad fundamental resulta que *conociendo tres términos de una proporcion se puede hallar el cuarto,* si es un estremo, *dividiendo el producto de los medios por el estremo conocido*; y si es un medio, *dividiendo el producto de los estremos por el medio conocido.*

Así sea la proporcion $18 : 24 :: 72 : x$:

como se tiene $18 \times x = 24 \times 72,$

resulta $x = \frac{24 \times 72}{18} = 96;$

lo cual da $18 : 24 :: 72 : 96.$

207. Puede suceder que los dos medios de una proporcion sean iguales entre sí, como en esta:

$$9 : 12 :: 12 : 16;$$

y en tal caso recibe el nombre de *proporcion continua*, en la cual como el producto de los dos medios se reduce al *cuadrado* de cada uno de ellos, resulta que este cuadrado es igual al producto de los estremos, y por consiguiente que *cada uno de los medios tiene por valor la raiz cuadrada del producto de los estremos.*

Así sea, por ejemplo, la proporcion $50 : x :: x : 8$, siendo x el término medio incógnito de una *proporcion continua*; se tendrá

$$x^2 = 50 \times 8 = 400,$$

de donde se deduce $\quad x = \sqrt{400} = 20;$

lo cual da $\quad 50 : 20 :: 20 : 8.$

Y en general siendo la proporcion literal $a : x :: x : b$, resultará $x^2 = a \times b$, y de aquí $x = \sqrt{a \times b}$. Este valor de x es lo que se llama *un medio proporcional entre los números* a *y* b.

208. Otras propiedades.—Una proporcion cualquiera que sea permanece siempre como tal, *aun cuando se multipliquen ó dividan por un mismo número sus dos primeros ó sus dos últimos términos.*

Así es efectivamente, pues que la relacion de los dos primeros términos ó la de los dos últimos no viene á ser otra cosa mas (n.º 198) que el cociente de una division cuyo dividendo es el antecedente y cuyo divisor es el consecuente; y se sabe que el valor del cociente no varía porque se multipliquen ó dividan ambos términos de la division por un mismo número.

La proporcion tampoco se altera porque *se multipliquen ó dividan por un mismo número los dos antecedentes ó los dos consecuentes.*

Porque mediante estas trasformaciones se multiplica ó divide á la vez uno de los estremos y uno de los medios por un mismo número, de modo que el producto de los estremos permanece siempre igual al de los medios; y segun la reciprocidad de la propiedad fundamental, basta esta condicion para que haya proporcion entre los cuatro números que se comparan.

Del mismo modo que en la equidiferencia, *se puede invertir el órden de los estremos de una proporcion y el de los medios, ó bien colocar los estremos en el lugar de los medios*, sin que por esto deje de subsistir la proporcion.

Por ejemplo, de la proporcion $\quad 36 : 12 :: 75 : 25$
se deduce alternativamente,
1.º cambiando los estremos.... $\quad 25 : 12 :: 75 : 36;$
2.º cambiando los medios..... $\quad 36 : 75 :: 12 : 25;$
3.º colocando los medios en el lugar de los estremos............ $\quad 12 : 36 :: 25 : 75.$

La relacion *comun* varía de una proporcion á la otra: así esta relacion es 3 en la primera, $\frac{25}{12}$ en la segunda, $\frac{12}{25}$ en la tercera y $\frac{12}{36}$ ó $\frac{1}{3}$ en la cuarta. Pero la proporcion no desaparece, pues es evidente que segun estas *trasformaciones* el producto de los estremos permanece siempre igual al de los medios.

NOTA.—La mayor parte de los autores de Geometría designan por las palabras *alternando* é *invertiendo* las trasformaciones que pueden darse á una proporcion. (Tambien se dice *una alternada*, *una invertida.*)

Además deberemos advertir que las palabras *multiplicando* ó *dividendo* se deben reconocer como destinadas á espresar las trasformaciones procedentes de la multiplicacion y division.

Las propiedades siguientes son de un frecuente uso en la Geometría, y merecen por lo tanto toda la atencion posible por parte de los principiantes.

209. PRIMERA PROPIEDAD.—En toda proporcion *la suma ó la diferencia de los dos primeros términos es al segundo como la suma ó diferencia de los últimos es al cuarto.*

Así en la proporcion	$72 : 24 :: 45 : 15$
se tiene sumando	$72+24 : 24 :: 45+15 : 15,$
y sustrayendo,	$72-24 : 24 :: 45-15 : 15,$

proporciones cuya exactitud fácilmente podrá comprobarse.

Para comprender esto de un modo mas satisfactorio, sin que no dé lugar á duda, observemos que aumentando ó disminuyendo á cada antecedente en su consecuente no se hace mas que aumentar ó disminuir en una *unidad* á cada una de las relaciones; y puesto que las primitivas eran iguales, las resultantes despues de esta trasformacion deberán serlo asimismo.

De la proporcion $72 \pm 24 : 24 :: 45 \pm 15 : 15$

($\pm$ se enuncia *mas ó menos*)

se deduce mudando los medios la siguiente (n.° 208):

$$72 \pm 24 : 45 \pm 15 :: 24 : 15;$$

y como ya se tiene	$72 : 24 :: 45 : 15,$
ó bien	$72 : 45 :: 24 : 15,$

resulta que como dos números iguales á un tercero son necesariamente iguales entre sí, tendremos tambien

$$72 \pm 24 : 45 \pm 15 :: 72 : 45,$$

ó bien $$72 \pm 24 : 72 :: 45 \pm 15 : 45.$$

Asimismo en toda proporcion la *suma ó diferencia de los dos primeros términos es al primero como la suma ó diferencia de los dos últimos es al tercero*, enunciado que ciertamente es una consecuencia del anterior.

210. En toda proporcion *la suma ó diferencia de los antecedentes es á la suma ó diferencia de los consecuentes como cualquiera de los antecedentes es á su consecuente.*

Recordemos la proporcion arriba enunciada $72 : 24 :: 45 : 15$, y cambiando de lugar á los medios, resultará

$$72 : 45 :: 24 : 15.$$

Aplicando á esta proporcion la propiedad del número precedente se tendrá

$$72 \pm 45 : 45 :: 24 \pm 15 : 15.$$

ó cambiando de lugar á los medios,

$$72 \pm 45 : 24 \pm 15 :: 45 : 15 \text{ ó } :: 72 : 24.$$

Traducida esta proporcion al lenguaje comun y comparándola con la otra $72 : 24 :: 45 : 15$, demuestra evidentemente la propiedad enunciada.

Si en la proporcion $72 \pm 45 : 24 \pm 15 :: 45 : 15$ se considera primero los dos signos superiores y despues los inferiores, resultarán estas otras dos:

$$72 + 45 : 24 + 15 :: 45 : 15,$$

$$72 - 45 : 24 - 15 :: 45 : 15,$$

de donde en razon á la relacion comun se tendrá

$$72 + 45 : 24 + 15 :: 72 + 45 : 24 - 15,$$

ó bien cambiando á los medios de lugar,

$$72 + 45 : 72 - 45 :: 24 + 15 : 24 - 15;$$

es decir, que en toda proporcion *la suma de los antecedentes es á su diferencia como la suma de los consecuentes es tambien á su diferencia.*

211. Consecuencias de esta propiedad.—1.° Sea una continuacion $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k \ldots\ldots$ tal que se tenga

$$a : b :: c : d :: e : f :: g : h :: i : k \ldots;$$

con arreglo á lo que hemos dicho se tendrá que *en esta serie de relaciones la suma de los antecedentes* a, c, e, g, i... *es á la de todos los consecuentes* b, d, f, h, k... *como un antecedente cualquiera es á su consecuente.*

En efecto, las dos primeras relaciones.... $a : b :: c : d$

dan en virtud de la propiedad anterior....... $a + c : b + d :: c : d;$

pero como por otra parte se tiene........... $c : d :: e : f,$

resulta que.......... $a + c : b + d :: e : f,$

de donde aplicando á esta nueva proporcion la misma propiedad... $a + c + e : b + d + f :: e : f;$

pero tambien........ $e : f :: g : h;$

luego............... $a + c + e : b + d + f :: g : h;$

y por consiguiente..... $a + c + e + g : b + d + f + h :: g : h;$

y así sucesivamente, cualquiera que sea el número de relaciones iguales comparadas.

2.° Sean los dos quebrados iguales $\frac{8}{12}$, $\frac{2}{3}$: *si se suman numeradores y denominadores, se tendrá un nuevo quebrado* $\frac{10}{15}$ *igual á cada uno de los propuestos.*

Efectivamente, la igualdad $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ se reduce á la proporcion $8 : 12 :: 2 : 3$; de donde aplicando la propiedad anteriormente anunciada

$$8 + 2 : 12 + 3 :: 8 : 12 :: 2 : 3;$$

luego $$\frac{8+2}{12+3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Lo mismo tendria lugar si se restasen numeradores y denominadores.

Las trasformaciones que tienen relacion con las propiedades anteriores se designan por las palabras *adendo* y *sustraendo.*

212. Tercera propiedad.—*Si se tiene un número cualquiera de proporciones y despues de colocarlas unas debajo de otras se les multiplica en columna, los productos resultantes son proporcionales entre sí.*

Sean por ejemplo las tres proporciones

$$3 : 8 :: 12 : 32,$$
$$7 : 15 :: 28 : 60,$$
$$40 : 12 :: 50 : 15,$$

que pueden escribirse de este otro modo:

$$\frac{3}{8}=\frac{12}{32}$$
$$\frac{7}{15}=\frac{28}{60}$$
$$\frac{40}{12}=\frac{50}{15}$$

Esto supuesto, si se multiplican estas dos igualdades miembro por miembro, resultarán por precision productos iguales. Así efectuando la operacion segun la multiplicacion de los quebrados (Véase n.º 59) se tendrá

$$\frac{3\times 7\times 40}{8\times 15\times 12}=\frac{12\times 28\times 50}{32\times 60\times 15},$$

de donde $3\times 7\times 40 : 8\times 15\times 12 :: 12\times 28\times 50 : 32\times 60\times 15$, ó efectuando los cálculos,

$$840 : 1440 :: 16800 : 28800.$$

Cuya exactitud es fácil averiguar, porque dividiendo los dos últimos términos sucesivamente por 10 y por 2 resulta

$$840 : 1440 :: 840 : 1440,$$

que es una *proporcion idéntica.*

Nota.—Es de advertir que segun la naturaleza de las operaciones que acabamos de efectuar, la *relacion comun* de la proporcion precedente, á saber, $\frac{840}{1440}$, es igual al producto de las tres *relaciones* de las proporciones dadas.

Así siendo las dichas tres relaciones $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{10}{3}$, como es fácil comprobarlo, se tiene por su producto $\frac{210}{360}$, ó suprimiendo el factor comun 30 á ambos términos, $\frac{7}{12}$, resultado á que puede reducirse la fraccion $\frac{840}{1440}$ por la supresion del factor comun 120.

Esta relacion $\frac{7}{12}$, que proviene de la multiplicacion de muchas otras, es lo que llaman los aritméticos *relacion compuesta.*

La operacion que ha hecho el objeto de la propiedad precedente, se designa con la palabra *componendo.*

213. CONSECUENCIAS DE ESTA PROPIEDAD. — 1.° *Cuando cuatro números estan en proporcion, sus cuadrados, sus cubos y en general sus potencias semejantes son tambien proporcionales.*

Para comprender esto bastará observar que segun la propiedad precedente muchas proporciones semejantes multiplicadas por órden darian por resultados productos que deberian estar en proporcion.

2.° Y viceversa, *cuando cuatro números estan en proporcion, las raices cuadradas, cúbicas, cuartas.... de estos números lo estan tambien.*

Sea la proporcion $a : b :: c : d$ ó $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Puesto que las dos relaciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ son iguales, sus raices cuadradas lo serán asimismo, y se tendra $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{c}{d}}$.

Pero para estraer la raiz cuadrada de un quebrado es necesario (n.° 187) estraer la del numerador y denominador, lo cual da

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad \sqrt{\frac{c}{d}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}};$$

luego $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$, ó bien $\sqrt{a} : \sqrt{b} :: \sqrt{c} : \sqrt{d}$.

El razonamiento seria el mismo para la raiz cúbica ó de un grado cualquiera que sea, partiendo de este principio general, á saber, que *para estraer una raiz de un grado cualquiera de un quebrado es necesario estraer la del numerador y la del denominador.*

214. Observacion.—Cuando los números a, b, c, d no son *cuadrados perfectos*, en cuyo caso las cantidades $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ son números irracionales, la proporcion arriba enunciada tiene lugar entre números inconmensurables; es decir, que es necesario considerar relaciones entre números inconmensurables, las cuales son en general irracionales por sí mismas; y que por lo tanto dan lugar á una nueva cuestion, cual es averiguar si se pueden aplicar á proporciones de esta especie todas las propiedades anteriormente establecidas.

No dudaremos un momento en responder afirmativamente á esta cuestion, pues que si recordamos lo que antes hemos dicho (n.os 182 y 193), no dejaremos de reconocer que un número irracional puede ser siempre sustituido *mentalmente* por otro número fraccionario exacto que no difiera del propuesto sino en una cantidad tan pequeña como se quiera, y que por consiguiente se la puede tomar tan mínima que no deba hacerse caso del error que se cometeria despreciando esa cantidad; y he aquí que ya son aplicables las tales propiedades, pues que en vez de las cantidades irracionales han entrado números conmensurables que se les han sustituido.

Por lo que toca á las relaciones entre los números fraccionarios exactos, es fácil reconocer que con arreglo al procedimiento de la division de los quebrados puede sustituírseles por relaciones entre números enteros.

Por ejemplo, la relacion que hay entre $\frac{3}{7}$ y $\frac{5}{11}$, siendo el cociente de la division de $\frac{3}{7}$ por $\frac{5}{11}$, es igual (n.° 62) á $\frac{3}{7}\times\frac{11}{5}$ ó á $\frac{33}{35}$, es decir, á la que hay entre 33 y 35.

Del mismo modo la relacion de $\frac{7}{8}$ con $\frac{15}{23}$ es igual á $\frac{7}{8}\times\frac{23}{15}$ ó bien la de 161 con 120.

Así todas las propiedades anteriormente demostradas sobre las proporciones, suponiendo que fuesen números enteros los términos comparados, tienen lugar, cualquiera que sea la naturaleza de estos términos.

§ II. De la Regla de Tres y de las que de ella dependen.

DE LA REGLA DE TRES.

215. La cuestion cuyo objeto es *dados tres términos de una proporcion determinar el valor del cuarto*, es lo que en Aritmética se conoce bajo el nombre de REGLA DE TRES SIMPLE.

Ya hemos espuesto en el n.° 206 el modo de hallar este cuarto término; y así para resolver una cuestion dependiente de la *regla de tres* no habrá mas que formar la proporcion á que dé lugar el enunciado del problema. Los siguientes ejemplos aclararán prácticamente lo que ya hemos indicado en teoría.

PRIMER EJEMPLO. — *Se quiere saber cuál será el precio de* 384 *quilógramos de cierta mercadería bajo el supuesto de haber costado* 650 *francos* 25 *quilógramos de la misma mercancía.*

ANALISIS DEL PROBLEMA. — Supuesto que 25 quilógramos han costado 650 francos, es claro que 2, 3, 4.... veces mas quilógramos deberán costar 2, 3, 4 veces mas. Así los dos números de quilógramos estan en la misma relacion que sus precios, y forman por consiguiente una proporcion entre sí.

Luego si representamos por x el precio incógnito de los 384 quilógramos, se tendrá la proporcion

$$25 \text{ quil.} : 38 \text{ quil.} :: 650 \text{ fr.} : x,$$

de donde (n.° 206) $x = \dfrac{384 \times 650}{25} = \dfrac{249600}{25} = 9984$; lo cual da 9984 fr. por el precio de los 384 quilógramos.

NOTA. — En este ejemplo puede muy bien simplificarse el cálculo observando que en la primera proporcion los dos antecedentes son divisibles por 25; y suprimiendo este factor comun se tiene

$$1 : 384 :: 26 : x, \text{ de donde } x = 384 \times 26 = 9984.$$

Simplificaciones de que deberá hacerse uso siempre que tengan lugar.

SEGUNDO EJEMPLO. — *Se ha pagado* 743 lib. 15 s. 8 d. *por* 43 toe. 5 p. 4 pulg. *de cierta obra*; *se pregunta cuánto será necesario pagar por* 77 toe. 3 p. 8 pulg. *del mismo trabajo.*

Desde luego se ve que hay proporcion entre los dos números fraccionarios de toesa y los precios de estos dos números.

Sea pues x el precio pedido; se tendrá la proporcion

$$43 \text{ toe. } 5 \text{ p. } 4 \text{ pul.} : 77 \text{ toe. } 3 \text{ p. } 8 \text{ pul.} :: 743 \text{ lib. } 15 \text{ s. } 8 \text{ d.} : x.$$

Segun las reglas establecidas para el cálculo de los números complejos se podria hacer el producto de los dos medios y dividir este producto por el estremo conocido; pero como los dos medios espresan unidades de una misma especie, será mucho mas breve reducirlas á la menor subdivision que indican, es decir, á *pulgadas*, y se tendrá

$$3160\,\text{pul.} : 5588\,\text{pul.} :: 473\,\text{lib.}\ 15\,\text{s.}\ 8\,\text{d.} : x,$$

ó suprimiendo el factor comun 4 á los dos primeros términos,

$$790 : 1397 :: 743\ 15\,\text{s.}\ 8\,\text{d.} : x.$$

La operacion queda reducida á efectuar una multiplicacion de un número complejo por un número entero y á dividir el producto por otro número entero, lo cual es bien fácil.

El producto de 743 lib. 15 s. 8 d. por 1397 es igual á 1039065 lib. 6 s. 4 d.

Dividiendo este producto por 790, resulta por cociente 1315 lib. 5 s. 5 d. $\frac{326}{790}$ ó $\frac{163}{395}$.

Nota. — Cuando ocurran ejemplos semejantes á este, conviene *reducir los dos primeros términos de la proporcion* (que siempre son de la misma naturaleza) *á unidades de la menor de las subdivisiones que contienen.*

Tercer ejemplo. — 135 *hombres han empleado* 20 *dias para hacer cierta obra*; *¿cuántos necesitarán* 300 *para hacer la misma obra?*

Analisis. — Si un determinado número de hombres ha empleado 20 dias para hacer cierta obra, es claro que un número de hombres 2, 3, 4... veces *mayor* deberá emplear 2, 3, 4.... veces *menos* tiempo, en igualdad de circunstancias; luego cuantas veces el *primer* número de hombres 135 esté contenido en el *segundo* 300, otras tantas lo será el número de dias necesario á este *segundo* número de hombres, es decir, el número buscado x lo estará en el número de dias necesario al primer número de hombres.

Así la proporcion será

$$135\,\text{h.} : 300\,\text{h.} :: x\,\text{d.} : 20\,\text{d.},$$

ó poniendo á los medios en el lugar de los estremos para que x sea el último término,

$$300 : 135 :: 20 : x;$$

de donde $x = \frac{135 \times 20}{300} = \frac{2700}{300} = 9$ dias.

(En la proporcion se puede suprimir el factor 15 comun á los dos primeros términos y el factor 20 comun á los dos antecedentes, lo cual da $1 : 9 :: 1 : x$ y de aquí $x = 9$.)

— OBSERVACIONES SOBRE LAS RELACIONES DIRECTAS É INVERSAS.

216. Nos parece conveniente demos á conocer á los principiantes el verdadero sentido de ciertas denominaciones que usan los matemáticos con mucha frecuencia.

Las cuestiones que dependen de la *regla de tres* contienen siempre en su enunciado cuatro números, dos de una especie y dos de otra. De estos cuatro números *tres* son conocidos y *uno* incógnito, y además cada uno de los términos de la segunda especie está íntimamente unido por las condiciones del enunciado con uno de los de la primera.

Así en el primero de los ejemplos que hemos puesto anteriormente, dos de los cuatro números espresan pesos y los otros dos sus precios respectivos. El precio del primer peso está ligado con él, y puede por esta razon llamársele término *correspondiente* al primer peso: otro tanto podrá decirse del segundo precio y de su peso y se les llamará por consiguiente términos *correspondientes* al segundo precio.

En el segundo ejemplo los dos primeros términos que espresan longitudes, estan ligados á los otros dos que son sus precios, y asimismo cada uno de ellos se denomina término *correspondiente* á la longitud estimada por este precio.

Finalmente, en el tercer ejemplo se consideran dos números de hombres y dos números de dias empleados por ellos para hacer cierta obra. El número de dias empleado por el primer número de hombres es el término *correspondiente* á este número de hombres, y el segundo número de dias es el *correspondiente* al segundo número de hombres.

Esto supuesto, se dice que hay *relacion directa* entre los dos números de la primera especie y los dos de la segunda, ó bien que los dos números de la primera especie son *directamente proporcionales* á sus correspondientes de la segunda, cuando despues de haber averiguado que hay proporcion entre los cuatro números se halla además que cada número crece ó mengua en la misma razon que su correspondiente; en cuyo caso uno de los números de la primera especie y su *correspondiente* de la segunda deben formar los *dos antecedentes* de la proporcion, y el otro término de la primera especie y su *correspondiente* de la segunda deben constituir los *dos consecuentes*; es decir, que un término de la primera especie y su *correspondiente* de la segunda deben formar *un estremo* y *un medio*, y el otro término de la primera y su *correspondiente* de la segunda, *un medio y un estremo*.

Por el contrario hay *relacion indirecta*, ó bien los dos números de la primera especie son *recíproca* ó *inversamente proporcionales* á sus *correspondientes*, cuando cada término crece á medida que su correspondiente mengua, y viceversa; y entonces cada uno de los términos de la primera especie y su *correspondiente* deben formar los *dos estremos*, entre tanto que el otro término de la primera especie y su *correspondiente* deben formar los *dos medios*.

Reflexionando sobre las proporciones de los tres ejemplos que preceden, será fácil reconocer que en las dos primeras hay *relacion directa* entre los cuatro números, es decir, que los dos pesos ó las dos longitudes son *directamente proporcionales* á los precios. Por el contrario en la tercera hay *relacion indirecta*, ó lo que es lo mismo, los dos números de hombres son *recíprocamente proporcionales* á los dos números de dias *.

Por lo demás, el análisis del problema basta para conocer si la *relacion es directa* ó *indirecta*. Así averiguado que sea haber proporcionalidad entre los cuatro números de la proporcion, no habrá mas que observar si aumentando ó disminuyendo una de las magnitudes de la primera especie, se aumenta ó disminuye su *correspondiente*; ó bien si al contrario aumentando ó disminuyendo aquella, su *correspondiente* debe disminuirse ó aumentarse. En el primer caso hay *relacion directa* y en el segundo *relacion indirecta*.

Tambien suele decirse en el primer caso que cada magnitud de la primera especie está en *razon directa* de su correspondiente y en el segundo que está en *razon inversa*.

Por ejemplo, se dice que el precio de cierta mercancía está en *razon directa* del número de unidades de ella misma, porque cuanto *mas* unidades haya de esta mercancía, tanto *mas* deberá pagarse por ella; y al contrario el número de dias necesario á cierto número de hombres para hacer una obra está en *razon inversa* del número de ellos, porque á *mas* hombres *menos* dias.

217. Estas locuciones, aunque algo viciosas, se emplean con mucha frecuencia en Matemáticas. Así que hablando de dos quebrados que tienen un mismo denominador, se dice que estan en *razon directa de sus numeradores*, y de dos quebrados que tienen un mismo numerador, que estan en *razon inversa de sus denominadores*.

Para interpretar estas dos espresiones consideremos desde luego los dos quebrados $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{12}$ que tienen un mismo denominador.

Poniéndolos en proporcion, se tiene $\frac{7}{12} : \frac{11}{12} :: 7 : 11$, pues que la segunda relacion no es otra cosa mas que la primera cuyos términos se han multiplicado por 12.

---

* Las denominaciones de relacion *directa* é *indirecta* han sido propuestas por Mauduit, uno de los mejores autores de tratados de Aritmética.

Ahora bien, el quebrado $\frac{7}{12}$ y su numerador 7 forman los dos antecedentes, y el quebrado $\frac{11}{12}$ y su numerador 11 los dos consecuentes; luego ambos quebrados son *directamente* proporcionales á sus numeradores, ó bien estan en *razon directa* de ellos.

Sean ahora los dos quebrados $\frac{15}{23}$ y $\frac{15}{36}$ que tienen un mismo numerador.

Descomponiéndolos resulta $\frac{15}{23} : \frac{15}{36} :: \frac{1}{23} : \frac{1}{36}$, pues que la segunda relacion no es mas que la primera cuyos términos se han dividido por 15.

Multiplicando los dos términos de la segunda relacion por 23×36 y simplificando se tendrá

$$\frac{15}{23} : \frac{15}{36} :: 36 : 23.$$

Y como el quebrado $\frac{15}{23}$ y su denominador 23 forman *los estremos*, y el quebrado $\frac{15}{36}$ y su denominador *los medios*, resulta que ambos son *recíprocamente* proporcionales á sus denominadores, ó bien estan en *razon inversa* de ellos.

Por otra parte hemos visto (n.° 45) que quedando el denominador el mismo y *aumentando* el numerador, el quebrado *aumenta* en la misma proporcion, y por el contrario, permaneciendo el mismo el numerador y *aumentando* el denominador, el quebrado *disminuye* en la misma proporcion.

Hemos juzgado oportuno entrar en algunas esplicaciones sobre estos principios, porque hemos notado que los jóvenes suelen equivocarse en la resolucion de las cuestiones relativas á las proporciones, por falta de nociones suficientes acerca del modo de establecerla debidamente.

218. Es de un frecuente uso, cuando hay que resolver una *regla de tres*, hacer que el último término de la proporcion sea x ó el incógnito.

Para satisfacer esta condicion se comienza por escribir la relacion de los dos términos de la especie á que pertenece el incógnito. En seguida y despues de haber reconocido por el análisis del problema si la *relacion* que hay entre los cuatro números es *directa* ó *inversa*, se coloca la otra relacion á su izquierda, de modo que el término de que x es correspondiente sea el *primer medio ó el primer estremo*, segun que la relacion sea *directa ó inversa* (Véase n.° 216).

Cuarto ejemplo. — 45 *obreros han hecho* 250 *metros de mazonería*, ¿76 *cuántos harán del mismo trabajo en igual tiempo?*

Sea x el número de metros buscado, se escribirá desde luego la relacion.. $280 : x$;
en seguida se observará que cuantos mas hombres haya, mayor cantidad de obra harán; por lo que la *relacion es directa*; luego siendo x un consecuente ó un estremo, su correspondiente 76 debe ser el primer consecuente ó el primer medio, y se tendrá

$$45 : 76 :: 280 : x;$$

de donde se deduce $x = \dfrac{280 \times 76}{45} = 472$ m., 89 valuado en 0,01.

Quinto ejemplo. — *La tripulacion de un navío no tiene víveres mas que para* 20 *dias, y sin embargo tiene que estar* 35 *en el mar: se pregunta á qué cantidad deberá reducirse la racion de cada navegante.*

Analisis. — Sea 1 la racion diaria de cada individuo y x la que se le deberá dar, consideradas las circunstancias en que se halla la tripulacion: es claro que esta nueva racion deberá ser 2, 3 veces... menor relativamente á la primera, si el número de dias que ha de permanecer el navío en el mar llega á ser proporcionalmente 2, 3 veces... mayor. Así pues, las dos raciones son *inversamente proporcionales* á los dos números de dias.

Luego si tenemos la relacion..................... $1 : x$,
el número 35 del cual x es su correspondiente debe formar el primer estremo, pues que x es el segundo, y se tendrá

$$35 : 20 :: 1 : x;$$

de donde $x = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7}$. Es decir, que la racion de cada individuo

debe quedar reducida á los $\dfrac{4}{7}$ de la ordinaria.

Otra solucion. — Se puede llegar á este mismo resultado sin necesidad de hacer proporcion alguna y de un modo mas sencillo.

Supongamos por un momento que no haya mas que una sola racion por cada individuo para estar en el mar durante 35 dias: la racion diaria quedará reducida á $\dfrac{1}{35}$ de la comun; pero como segun el enunciado hay 20 raciones para cada individuo, resulta que la racion actual debe ser $\frac{1}{35} \times 20$ ó $\frac{20}{35}$, es decir, los $\frac{4}{7}$ de la racion ordinaria.

REGLA DE TRES COMPUESTA.

219. Se llama así la operacion por la cual se determina el *cuarto* término de una proporcion resultante de la multiplicacion de *dos* ó *muchas* otras.

Sesto ejemplo. — 20 *obreros han empleado* 18 *dias en hacer* 500 *metros de cierta obra*, *¿ cuántos dias emplearán* 76 *obreros para hacer* 1265 *metros de la misma obra?*

Analisis. — En el enunciado hay que considerar *tres* relaciones, que son la de los dos números de obreros, la de los dos números de dias, y la de las dos obras. Pero para hacer mas fácil la cuestion y reducirla á la especie de las anteriores supondremos que la obra que se haya de hacer por los dos números de obreros, sea la misma é igual á la que hace el primero, esto es, á 500 metros; y la cuestion quedará reducida á esta: 20 *obreros han empleado* 18 *dias en hacer* 500 *metros de cierta obra*; *¿* 76 *obreros cuántos dias necesitarán para hacer la misma obra?*

Aquí hay evidentemente proporcion (en *relacion directa*) entre los dos números de obreros y los dos números de dias. Así representando por x no el *número de dias que corresponde al primer enunciado*, pero sí el que se busca con arreglo á este último, se tendrá la proporcion

$$76 : 20 :: 18 : x \quad (1).$$

Claro es que de esta proporcion puede deducirse el valor de x, pero vamos á ver que esto es inútil. Así bastará razonar sobre x, considerándolo como ya conocido segun esta proporcion.

Observemos ahora que *siendo x el número de dias necesario* á los 76 obreros *para hacer los* 500 metros, no se trata de averiguar otra cosa que *cuántos dias le faltan para hacer los* 1265 *metros.*

Siendo el mismo número de obreros, si la obra llega á ser doble, triple &c., el número de dias necesario será tambien doble, triple &c., de modo que hay proporcion en *relacion directa*, y representando por x' el número de dias buscado, esto es, la *incógnita del primer enunciado*, se tendrá la nueva proporcion

$$500 : 1265 :: x : x' \dots (2).$$

(500 y x forman un estremo y un medio, porque la relacion es directa.)

Multiplicando término por término las proporciones (1) y (2) resultará (n.° 213)

$$76\times500 : 20\times1265 :: 18\times x : x\times x',$$

y suprimiendo el factor x comun á los dos últimos términos,

$$76\times500 : 20\times1265 :: 18 : x'.$$

Luego $x' = \dfrac{20\times1265\times18}{76\times500} = 11\,\text{d.}\,\dfrac{187}{190}$ ó unos 12 dias.

Pasemos á un ejemplo mas complicado.

Setimo ejemplo. — 500 *hombres trabajando* 12 *horas por dia han empleado* 57 *dias en abrir un canal de* 1800 *metros de longitud,* 7 *de latitud y* 3 *de profundidad; se quiere saber cuántos dias emplearán* 860 *hombres trabajando* 10 *horas por dia para abrir otro canal de* 2900 *metros de longitud,* 12 *de latitud y* 5 *de profundidad, situado en un terreno* 3 *veces mas difícil que el primero.*

He aquí la tabla de las operaciones de que daremos en seguida la esplicacion:

860 hom.	:	500 hom.	::	57 dias	:	x dias.	(1),
10 hor.	:	12 hor.	::	x	:	x'.........	(2),
1800 m. long.	:	2900 m. long.	::	x'	:	x''........	(3),
7 m. lat.	:	12 m. lat.	::	x''	:	x'''........	(4),
3 p.	:	5 p.	::	x'''	:	x^{IV}........	(5),
1 d.	:	3 d.	::	x^{IV}	:	x^{V} ó X.....	(6).

$$860\times10\times1800\times7\times3\times1 : 500\times12\times2900\times12\times5\times3 :: 57 : X;$$

de donde $X = \dfrac{500\times12\times2900\times12\times5\times3\times57}{860\times10\times1800\times7\times3\times1} = 549\,\text{dias}\,\dfrac{51}{301}.$

Analisis. — En el enunciado hay que distinguir dos partes principales: la primera comprende los números

	500 hom.,	12 hor.,	57 dias,	1800 m. long.,	7 m. lat.,	3 m. p.,	1 d.,
y la segunda	860,	10,	X,	2900,	12,	5,	3.

(Puesto que el segundo terreno es tres veces mas difícil de romper que el primero, representaremos por 1 d. la dureza del primer terreno y por 3 d. la del segundo.)

El número de dias pedido está representado por X.

En vista de esto supongamos por un instante que sea igual la obra encargada á cada número de obreros y que estos trabajen igual número de horas por dia.

Como en este caso á *mayor* número de obreros corresponde *menor* número de dias, se dirá que hay una *relacion indirecta* entre los dos números de obreros y los dos números de dias.

Así representando por x el número de dias que necesitan los 860 hombres para hacer la primera escavacion, como el tiempo de su trabajo diario lo hemos supuesto igual al del primer número de hombres, se tendrá la proporcion (1) en la que 860 y su correspondiente x forman los dos estremos.

Si estos 860 hombres en vez de trabajar 12 horas por dia no trabajan mas que 10 horas, deberán por precision emplear mas dias en hacer la misma obra. Pero á *menos* horas de trabajo corresponde *mayor* número de dias; luego hay una relacion indirecta entre los dos números 12 h., 10 h. y los dos números de dias x, x', y por tanto se formará la proporcion (2) en la que 10 y su correspondiente x' forman los dos estremos.

Fácilmente podria hallarse el valor de x', que deberá espresar el número de dias necesario á los 860 hombres trabajando 10 horas por dia para hacer la primera escavacion, multiplicando las dos proporciones (1) y (2) y observando que el término x desaparece como factor de los dos últimos términos de la nueva proporcion; pero es mas conveniente considerar á x' como determinada y pasar á la tercera proporcion.

Hagamos ahora *variable* la longitud de la escavacion, permaneciendo siempre una misma la latitud, la profundidad y la dureza del terreno.

Ahora bien, si la zanja ó escavacion *aumenta* de longitud, tambien *aumentará* el número de dias necesario para hacerla, de modo que hay *relacion directa* entre los dos números 1800, 2900 y x', x'' (representando x'' el número de dias *correspondiente* á la longitud 2900); de donde resulta la proporcion (3) en la cual 2900 y x'' forman *un medio* y *un estremo*.

Razonando del mismo modo respecto de las otras dos dimensiones, se tendrán las proporciones (4) y (5) en las que x''' y x^{IV} espresan los números de dias correspondientes á las variaciones dadas á la latitud y profundidad.

Por último, considerando la dureza de ambos terrenos resultará *relacion directa* y se tendrá la proporcion (6), cuyo último término x^{V} ó X espresa el número de dias pedido.

Multiplicando ahora término por término las seis proporciones, y observando que todos los términos x, x', x'', x''', x^{IV} desaparecen como factores comunes en el segundo antecedente y el segundo consecuente de la nueva proporcion, resultará la proporcion (7) en la que simplificando se deduce el valor de $X = 549$ dias $\frac{51}{301}$.

Así el número de dias pedido es de unos 549.

Nota.—Téngase presente sin embargo que cuando resulte la espresion $X = \frac{500 \times 12 \times 2900 \times 12 \times 5 \times 3 \times 57}{860 \times 10 \times 1800 \times 7 \times 3 \times 1}$, deberá cuidarse de suprimir todos los factores comunes que se hallen en evidencia en el numerador y denominador, antes de efectuar las multiplicaciones indicadas.

En este caso por ejemplo, despues de haber hecho dichas supresiones resulta $X = \frac{5 \times 4 \times 29 \times 5 \times 57}{43 \times 7}$, ó efectuando las multiplicaciones, $X = \frac{165300}{301} = 549\frac{51}{301}$.

Este ejemplo, que es de los mas complicados que puedan proponerse, basta para poner á los principiantes al corriente en la marcha que deberá seguirse.

OBSERVACIONES GENERALES SOBRE LA REGLA DE TRES.

220. La operacion por la que se halla el término incógnito en las dos cuestiones que preceden, se llama *regla de tres compuesta*, pues que por ella se obtiene una proporcion cuya primera relacion es el producto de todas las comprendidas en el enunciado, á escepcion de la en que entra la incógnita y que constituye la segunda relacion.

Antes se clasificaba la regla de tres en *simple*, *directa*, *simple inversa* y *compuesta directa é inversa*, denominaciones que si no son viciosas, al menos son inútiles para hallar el resultado de la cuestion.

Antes de todo deberá cuidarse al colocar las diferentes proporciones en columna para multiplicarlas, si los cuatro números de cada una son *directa* ó *recíprocamente* proporcionales, y en seguida proceder á escribirlas segun la observacion del n.º 218.

Propondremos para ejercicio los siguientes problemas.

Octavo ejemplo.—15 *obreros trabajando* 10 *horas por dia han empleado* 18 *dias en hacer* 450 *metros de cierta obra, ¿cuántos obreros se necesitarán trabajando* 2 *horas por dia para hacer en* 8 *dias* 480 *metros de la misma obra?*

(*Result.* X = 30 obreros.)

Noveno ejemplo.—*Se han necesitado* 1200 *metros de paño de* $\frac{5}{4}$ *de ancho para vestir á* 500 *hombres*; *se quiere saber cuántos metros se necesitarán de* $\frac{7}{8}$ *de ancho para vestir á* 960.

(*Result.* 3291 m. $\frac{3}{7}$.)

DECIMO EJEMPLO.—*Un correo que anda* 15 *horas por dia ha hecho una caminata de* 375 *leguas en* 20 *dias; ¿cuántas horas deberá caminar por dia para andar* 400 *leguas en* 18 *dias?*

(*Result.* 17 h. $\frac{7}{9}$.)

DE LA REGLA DE INTERES.

221. Se llama *interés* de una suma el beneficio resultante del préstamo que de ella se hace ó el *rédito* exigido por el *prestamista*: la suma depositada se llama *capital existente.*

El interés de una suma depende de la *cantidad* del capital, del *tiempo* que dure el préstamo y del *tanto* de interés.

Se llama *tanto* de interés el beneficio que reporta cierta suma durante un tiempo determinado: este tanto es por lo regular la cantidad que se lleva sobre 100 reales en España y sobre 100 francos en Francia durante un año.

Este *tanto*, que puede considerarse como una especie de *unidad de interés*, es de pura convencion entre el prestamista y el que recibe á premio, y depende por lo general de la abundancia ó escasez de los capitales. Sin embargo el uso y la ley han intervenido en el comercio y en el banco, fijando límites á este *tanto* mas allá de los cuales no puede pasar sin degenerar en *usura*; y por consiguiente será *usurero* el que preste dinero á un precio mucho mayor que el que generalmente está establecido.

La regla de interés no es mas que un caso particular de la regla de tres: he aquí algunos ejemplos.

PRIMER EJEMPLO.—*Se pide el interés de una suma de* 4500 *francos por* 2 *años y* 5 *meses á razon del* 7 p % fr. *anual* (p % es el modo con que se escribe en el comercio *por* 100).

O de otro modo: *Si* 100 *francos producen* 7 *al año, ¿*4500 *en* 2 *años y* 5 *meses cuánto producirán?*

ANALISIS Y SOLUCION.—Aplicando á este ejemplo los principios anteriormente establecidos, como los intereses de dos capitales durante un mismo tiempo son directamente proporcionales á estos capitales, llamando x al interés que el capital 4500 fr. rinda al cabo de un año, se tendrá esta primera proporcion

$$100 : 4500 :: 7 : x \ldots\ldots (1).$$

Ahora bien, los intereses *de un mismo capital* son directamente proporcionales al tiempo que estan dados á rédito; luego si se designa por X el interés que rindan 4500 fr. durante 2 años y 5 meses, resultará esta nueva proporcion

$$1 \text{ añ.} : 2 \text{ añ. } 5 \text{ ms.} :: x : X \ldots (2);$$

y multiplicando término por término las proporciones (1) y (2),

$$100 : 4500 \times 2 \text{ añ. } 5 \text{ ms.} :: 7 : X,$$

y por consiguiente $X = \dfrac{4500 \times 2 \text{ añ. } 5 \text{ ms.} \times 7}{100} = 315 \times 2 \text{ añ. } 5 \text{ ms.}$

Efectuando la operacion indicada por 315 × 2 añ. 5 ms. segun las reglas conocidas se halla por resultado 761 francos y 25 céntimos. Por tanto el *interés*, *ganancia* ó *rédito que dan* 4500 *francos al* 7 p o/o *anual en* 2 añ. 5 ms. *es* 761 fr. mas una pequeña fraccion 25 *céntimos*.

	315
	2 añ. 5 ms.
	630
4 ms. .	105
1	26,25
	761,25

Sea en general *un capital* a *dado al tanto de* i p o/o *anual por una cantidad de tiempo* t.

Razonando como en el ejemplo anterior se tendrán las dos proporciones . . . . $\left\{ \begin{array}{l} 100 : a :: i : x \\ 1 : t :: x : X \end{array} \right\}$;

de donde se deduce . . . . $100 : a \times t :: i : X,$

y por consiguiente

$$X = \frac{a \times t \times i}{100} = \frac{ait}{100}.$$

Esta fórmula $X = \dfrac{ait}{100}$ que por su sencillez es bien fácil de retener, manifiesta á primera vista lo que deberá hacerse para hallar el interés que una suma cualquiera debe rendir al cabo de cierto tiempo y á razon de un determinado tanto p o/o.

Traducida al lenguaje comun indica que deberá *multiplicarse la* *suma propuesta por el tanto de interés anual, mas por el tiempo que deba estar á rédito, y dividir el resultado por* 100. En esta sencilla operacion consiste, pues, la *regla de interés simple.*

222. Esta fórmula puede hallarse sin necesidad de proporcion por un medio que conviene conocer.

Puesto que 100 francos rinden al año i de interés, es claro que un solo franco deberá rendir $\frac{i}{100}$; luego una suma cualquiera rendirá al año $\frac{i}{100} \times a$ ó $\frac{ai}{100}$, y esta misma suma al cabo de t años deberá rendir $\frac{ai}{100} \times t$ ó $\frac{ait}{100}$.

Nota.—La fraccion $\frac{i}{100}$ que representa el interés de un franco por año se presenta en ciertos casos particulares bajo una forma muy sencilla.

Sea, por ejemplo, $i = 5$ (lo que quiere decir que la suma está dada al 5 p % anual): resulta $\frac{i}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$; de donde $\frac{ai}{100} = \frac{a}{20}$; por lo cual se ve que el interés de un capital al 5 p % anual es igual á la *vigésima* parte del capital.

Si se tiene $i = 10$, resultará $\frac{i}{100} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$ y $\frac{ai}{100} = \frac{a}{10}$, ó lo que es lo mismo, que el interés de un capital dado al 10 p % es la *décima* parte del capital.

223. Algunas veces el prestamista lleva el tanto de interés no por un año, sino por 1 mes ó 30 dias (Véase n.º 221), y en este caso la serie de operaciones es la misma, con la diferencia de tomar el mes por unidad de tiempo.

Segundo ejemplo.—*¿Cuál es el interés de* 5000 *francos por* 315 *dias, ó* 10 *meses y* 15 *dias á razon del* $\frac{3}{4}$ p % *mensual?*

Haciendo en la fórmula $X = \frac{ait}{100}$, $a = 5000$, $t = 10$ ms. $\frac{1}{2}$ é $i = \frac{3}{4}$ se obtiene

$$X = \frac{5000 \times 10\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}}{100} = 50 \times \frac{21}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3150}{8} = 393{,}75.$$

Así el interés pedido es 393 francos y 75 céntimos.

TERCER EJEMPLO.—*¿A qué tanto* p % *anual deberán haber sido dados* 3750 *francos para que hayan rendido* 719 *francos* 25 cs. *al cabo de* 2 *años y* 6 *meses?*

Razonando como en el primer ejemplo se tendrán las dos proporciones ....

$$\left\{\begin{array}{l} 3750 : 100 :: 719{,}25 : x \\ 2 \text{ añ. } \frac{1}{2} : 1 :: x : X \end{array}\right\}$$

de donde se deduce $3750 \times 2\frac{1}{2} : 100 :: 719{,}25 : X$.

Luego $X = \frac{719{,}25 \times 100}{3750 \times 2\frac{1}{2}} = \frac{71925}{9375} = 7{,}672$, es decir, que el tanto de interés pedido es 7 fr., 67 p % *próximamente* 1 *céntimo*.

Este resultado podrá comprobarse fácilmente determinando el interés del capital 3750 francos durante 2 años y 6 meses á razon de 7 fr., 67 cs. p % anual; aun cuando para mayor exactitud convendrá tomar el tanto 7,672 cual se ha obtenido.

La fórmula $X = \frac{ait}{100}$ puede servirnos tambien para conocer este tanto. En efecto, de ella se deduce evidentemente $100\,X = a \times i \times t$, y de aquí $i = \frac{100\,X}{a \times t}$.

Y como $a = 3750$, $t = 2$ añ. 6 ms. $X = 719{,}25$, se tendrá sustituyendo estos valores, $i = \frac{71925}{3750 \times 2\frac{1}{2}} = \frac{71925}{9375} = 7{,}672$, que es el mismo resultado que hallamos por el método anterior.

224. En la fórmula $X = \frac{ait}{100}$ dadas tres cantidades de las cua-

tro a, i, t y X se puede hallar la cuarta; lo cual da lugar á cuatro problemas diferentes que vamos á resolver.

1.° *Determinar el interés que deba rendir un capital al cabo de cierto tiempo, á razon de un determinado tanto* p %.

Sea X el interés pedido, se tendrá $X = \frac{ait}{100}$.

(Esta cuestion pertenece á las que han sido objeto de los dos primeros ejemplos.)

2.° *Hallar el tanto* p % *á que deberá darse una suma para que al cabo de cierto tiempo produzca otra suma conocida.*

La fórmula será en este caso $i = \frac{100\ X}{at}$.

(El tercer ejemplo es de la misma especie que esta cuestion.)

3.° *Determinar qué tiempo deberá estar á rédito cierta suma para que á razon de un determinado tanto* p % *produzca una suma dada.*

La fórmula es $t = \frac{100\ X}{ai}$.

Este valor de t deberá ser calculado en unidades de la misma especie que la de las del tanto p %, bien que sean años ó meses.

4.° *¿Qué capital deberá darse á rédito para que al cabo de cierto tiempo conocido y á razon de un tanto* p % *determinado produzca una suma dada?*

La fórmula debe ser $a = \frac{100\ X}{it}$.

He aquí algunos ejemplos que podrán servir de ejercicio.

Cuarto ejemplo.—*¿Cuál es el capital que en* 27 *meses á* $\frac{1}{2}$ p % *mensual ha rendido* 1312 fr., 65 cs. *de ganancia?*

(*Resp.* 9723 fr., 33 cs.)

Quinto ejemplo.—7400 *francos han rendido en* 27 *meses* 832 fr., 50 cs.; *determinar el tanto* p % *á que deben haber sido dados y qué interés rendirian* 8500 *francos al mismo tanto* p % *en* 45 *meses.*

(*Resp.* 1593 fr., 75 cs. *ganancia de los* 8500 *francos en* 45 *meses*; 5 = *al tanto* p % *anual pedido.*)

REGLA DE DESCUENTO.

225. El *descuento* es la rebaja que debe hacerse á una letra que siendo pagadera al cabo de cierto tiempo, se paga antes de espirar el plazo.

Un ejemplo aclarará esto: supongamos que *una persona tiene una letra de* 3000 *francos pagadera en* 1 *año y que se presenta al banquero para que se la* DESCUENTE: *en este caso se quiere saber qué re-*

baja deberá hacer el banquero, ó bien *qué cantidad deberá pagar al cobrador*. Partamos del principio de ser 6 el tanto p %.

ANALISIS.—Es claro que el cobrador debe recibir una suma que reunida á su interés durante 1 año produzca 3000 francos, valor de la letra.

Ahora bien, 100 francos rinden 6 fr. de interés anual; luego 100 francos al cabo del año se aumentarán en 6, y ya no serán 100, sino 106, ó lo que viene á ser lo mismo, que una letra de 106 fr. pagadera en 1 año equivale á 100 fr. pagaderos en la actualidad. Así para hallar el *valor actual* de la letra de 3000 francos bastará establecer esta proporcion

$$106 : 100 :: 3000 : x,$$

en la que el cuarto término representa la suma que el banquero debe dar al cobrador.

Tambien se puede decir: si por 106 francos en 1 año debe retener el banquero 6 fr. ¿por 3000 cuántos deberá retener?

Es decir,

$$106 : 6 :: 3000 : x';$$

y el cuarto término representará el *descuento* que debe hacerse á la letra.

La primera proporcion da $x = \frac{300000}{106} = 2830$ fr., 19 cs.;

y la segunda............ $x' = \frac{18000}{106} = 169,\ 81$

3000 fr., 00.

El *valor actual* de la letra es, pues, 2830 fr., 19 cs., ó bien el banquero debe descontar 169 fr., 81 cs.

Así es efectivamente, pues que el capital 2830 fr., 19 cs. sumado con su interés 169 fr., 81 cs. da 3000 francos, que es el valor primitivo de la letra. Se ve, pues, que las dos operaciones se comprueban mutuamente.

Representemos *en general* por a el total de una letra, por t el tiempo en que es pagadera y por i el tanto de interés llevado por la unidad de tiempo.

Como 100 rs. rinden i en la unidad de tiempo, al cabo de t tiempo deberán rendir una suma $i \times t$ ó it; y por consiguiente $100 + it$ espresa el estado del capital 100 fr. al cabo del tiempo t, incluso el interés; lo que equivale á decir que $100 + it$ pagadero al cabo del tiempo t se reduce á 100 fr. pagaderos en la actualidad.

Luego para hallar el *valor actual* de una letra a es necesario plantear la proporcion

$$100 + it : 100 :: a : x;\ \text{de donde}\ x = \frac{100\,a}{100 + it};$$

y para obtener el descuento de la letra, esta otra

$$100 + it : it :: a : x;\ \text{de donde}\ x = \frac{a \times it}{100 + it}.$$

Así *el* VALOR ACTUAL *de una letra se obtiene multiplicando el total de ella por* 100 *y dividiendo el producto por* 100 fr. *aumentado del interés de* 100 fr. *calculado por el tiempo en que está aplazado su pago.*

Y el DESCUENTO *multiplicando el total de la letra por el interés de* 100 *francos calculado por el tiempo propuesto y dividiendo el producto por* 100 fr. *aumentado de su interés por este mismo tiempo.*

Si la operacion es exacta, deberá verificarse que añadiendo un resultado al otro, se tenga el total de la letra.

PRIMER EJEMPLO.—*Se pide el valor actual de una letra de* 4850 fr. *pagadera en* 13 ms. $\frac{1}{2}$, *bajo el supuesto de ser el tanto de interés* $\frac{3}{4}$ p % *mensual.*

Se tiene $\quad a = 4850,\ t = 13\ \text{ms.}\ \frac{1}{2},\ i = \frac{3}{4};$

de donde $\quad i \times t = \frac{3}{4} \times 13\ \frac{1}{2} = \frac{81}{8} = 10,125.$

Luego la fórmula $x = \dfrac{100a}{100 + it}$ se cambia en

$$x = \frac{485000}{110,125} = \frac{485000000}{110125} = \ldots\ldots\ldots \quad 4404\ \text{fr.},\ 09\ \text{cs.}$$

Asimismo se tiene para la segunda fórmula

$$x = \frac{4850 \times 10,125}{110,125} = \frac{49106250}{110125} = \ldots\ldots\ldots \quad 445\ ,\ 9$$

$$\overline{4850,\ \ 00.}$$

226. Este modo de descontar no es el que usan los banqueros y comerciantes, sino que descuentan *al tanto* p %, es decir, que esta-

blecen *un tanto de descuento* del mismo modo que han establecido *un tanto de interés.*

Volvamos al ejemplo anterior para resolverlo por este nuevo método.

Se quiere descontar una letra de 4850 fr. *pagadera en* 13 ms. $\frac{1}{2}$ *á razon de* $\frac{3}{4}$ p % *de descuento mensual.*

Analisis. —Como segun el enunciado el banquero debe descontar $\frac{3}{4}$ mensual por cada 100 francos, resulta que en 13 ms. $\frac{1}{2}$ deberá descontar $\frac{3}{4} \times 13\frac{1}{2}$ ó $\frac{81}{8}$, ó reduciendo á decimales, 10 fr., 125. Así pues, para saber el descuento que deberá hacerse sobre 4850 fr., se planteará esta proporcion

$$100 : 10,125 :: 4850 : x;$$

de donde $x = \frac{4850 \times 10,125}{100} = 491,06$, *un céntimo próximamente.*

Restando ahora 491,06 de 4850 se tendrá 4358 fr., 94 cs. que representa *el valor actual* de la letra.

Comparando este resultado 4359 fr., 84 cs. con el obtenido segun el primer método, se observa que el cobrador tiene un *déficit* de 45 fr., 15 cs. en su cobro haciendo el descuento por este segundo método. . . . .

$$\begin{array}{r} 4404,09 \\ 4358,94 \\ \hline 45,15 \end{array}$$

Para esplicar esta diferencia es necesario observar que los banqueros al descontar 491 fr., 06 cs. sobre 4850 fr. retienen el interés del *valor total* de la letra al cabo de 13 ms. $\frac{1}{2}$, siendo así que en rigor no deben retener mas que el interés que al cabo de este tiempo deba rendir el *valor actual* de la letra; condicion que solo llena el primer método.

Este número 491,06 que el banquero retiene conforme al segundo método se compone realmente de dos partes; el interés del valor actual de la letra, es decir, 445,91, mas *el interés de este interés,* como vamos á probarlo.

La proporcion $100 : 10,125 :: 445,91 : x$ da

$$\frac{445,91 \times 10,125}{100} = 45,1483875,$$

es decir, 45,15, *próximamente un céntimo.*

De aquí es que estos 45 fr., 15 cs. resultan en pérdida para el cobrador, y es beneficio que sin derecho alguno se atribuye el banquero, independientemente del que por la ley le pertenece en razon de la anticipacion del pago.

Pero sea de ello lo que se quiera, el segundo método es el mas recibido en el comercio por su sencillez con relacion al cálculo.

Así es en efecto: representemos por a el total de la letra, por t el tiempo á que es pagadera y por i el tanto de interés, ó mas bien el *tanto de descuento*, lo cual da $i \times t$ por la suma que debe retenerse sobre 100 francos durante el tiempo t.

Esto supuesto, á fin de obtener el descuento de la letra a no habrá que detenerse mas que en plantear esta proporcion

$$100 : it :: a : x; \text{ de donde } x \frac{a \times it}{100},$$

fórmula bastante parecida á la de la regla de interés, y que solo contiene dos multiplicaciones y una sencilla division, al paso que las dos fórmulas relativas al primer método dan lugar á divisiones que son bastante complicadas.

Sin embargo podria establecerse un medio de conciliar entre sí ambos métodos, el cual seria rebajar un poco el tanto de descuento respecto del tanto de interés; pero la dificultad estaria en la aplicacion de este medio á las circunstancias habituales que á cada paso pudieran presentarse. Así pues, siempre es mejor atenerse en el comercio al segundo método, dejando como para parte del contrato y punto de pura convencion entre el banquero y el poseedor el elegir un método ó el otro.

Nota. — Estos dos modos de descontar han recibido denominaciones particulares que por ser bastante viciosas y de muy poco uso en el comercio las hemos omitido.

227. He aquí algunos ejemplos conforme á ambos métodos.

Segundo ejemplo. — *¿Cuál es el valor actual de una letra de* 2850 fr., 45 cs. *pagadera en* 2 *años y* 8 *meses, suponiendo el tanto de interés* 8 fr., 75 cs. p % *anual?*

Primer metodo. — Puesto que 100 fr. rinden 8 fr., 75 cs. en 1 año, al cabo de 2 añ. 5 ms. el interés deberá ser igual á 8,75 × 2 añ. 5 ms. ó á $8{,}75 \times \frac{8}{3}$ ó $\frac{70}{3}$. Así *el valor actual* de la letra estará bien espresado por

$$\frac{2850{,}45 \times 100}{100 + \frac{70}{3}} = \frac{285045 \times 3}{370} = \frac{855135}{370};$$

de todos modos la suma retenida se halla espresada por

$$\frac{2850{,}45 \times \frac{70}{3}}{100 + \frac{70}{3}} = \frac{2850{,}45 \times 70}{370} = \frac{199531{,}5}{370}$$

Efectuando las dos divisiones indicadas se halla

$$\left.\begin{array}{lll} 1.^{o} \ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{855135}{370} & = 2311{,}18 \\ 2.^{o} \ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{199531{,}5}{370} & = 539{,}27 \end{array}\right\} 2850{,}45.$$

Luego *el valor actual* de la letra es 2311 fr., 18 cs., y el descuento que el banquero deberá hacer 539 fr., 27 cs.

Segundo metodo. — La suma que deberá retenerse sobre 100 fr. por 2 añ. 8 ms. siendo $\frac{70}{3}$ *el descuento* de 2850 fr., 45 cs. *será*

$$\frac{2850{,}45 \times \frac{70}{3}}{100} = \frac{950{,}15 \times 70}{100} = 665{,}105.$$

El valor actual de la letra es, pues, igual á 2850,45 — 665,10, ó bien á 2185,35.

Así el poseedor de la letra recibe 125 fr., 83 cs. menos haciendo el descuento por el segundo método que por el primero.

$$\begin{array}{r} 2311{,}18 \\ 2185{,}35 \\ \hline 125{,}83 \end{array}$$

Esta pérdida que obra en contra del cobrador, es como ya vimos en otro ejemplo el interés de 539 fr., 27 cs.

Así es en efecto, pues este interés á razon de $\frac{70}{3}$ p % al cabo de 2 años y 8 meses es

$$\frac{539{,}27 \times \frac{70}{3}}{100} = \frac{37748{,}9}{300} = 125{,}829.$$

Tercer ejemplo. — *¿A qué tanto de interés mensual debe haber sido descontada una letra de* 5600 fr. *pagadera en* 14 *meses por la que el banquero ha dado á su poseedor* 5129 fr., 45 cs.?

Primer metodo. — Como los 5129 fr., 45 cs. espresan el valor actual de los 5600 fr., la suma cuyo valor actual es 100 fr. se obtendrá por la proporcion

$$5129{,}45 : 5600 :: 100 : x;$$

de donde $$x = \frac{560000}{5129{,}45} = 109 \text{ fr.}, 1735.$$

Así el interés que rinden 100 fr. al cabo de 14 meses es 109 fr., 1735.

Dividiendo esta espresion por 14 se tiene 0 fr., 6552 por el tanto de interés mensual: resultado cuya exactitud es bien fácil comprobar haciendo el descuento de los 5600 fr. conforme á este tanto de interés.

(Hemos hecho estensiva la operacion hasta las *diez milésimas*, á fin de que la comprobacion reuna datos suficientes para dar un resultado exacto.)

Segundo metodo. — Si se sustrae 5129,45 de 5600, se obtiene 470,55 por la suma que el banquero deberá beneficiar para sí sobre 5600.

Ahora, para saber el beneficio que deberá tener sobre 100 fr. al cabo de 14 meses, se planteará esta proporcion

$$5600 : 470{,}55 :: 100 : x;$$

de donde $$x = \frac{47055}{5600} = 8{,}40.$$

Dividiendo este resultado por 14 resulta 0 fr., 60, que es la cantidad que deberá retener mensualmente sobre 100 fr., ó lo que es lo mismo, el tanto de descuento mensual.

Este tanto, que es el que en realidad debiera llevarse, es como bien se ve mucho menor que el que hemos hallado por el otro medio.

228. El siguiente ejemplo contiene á la vez la regla de interés y la de descuento por el primer método.

Cuarto ejemplo. — *Un mercader ha comprado á un fabricante una pieza de género por* 3859 fr., 25 cs., *y no pudiendo pagarle al contado en dinero efectivo le ha dado una letra pagadera en* 18 *meses: se quiere saber qué suma deberá llevar sobre la letra siendo* $\frac{3}{4}$ p o/o *el interés mensual.*

Analisis. — Desde luego se ve que la letra debe componerse de la deuda contraida en el ínterin del contrato, mas el interés que la suma importante de esta deuda rinda al cabo de los 18 meses.

Esto supuesto, pues que $\frac{3}{4}$ es el interés mensual que se lleva sobre 100 fr., resulta que $\frac{3}{4} \times 18$ ó 13,50 será el interés que sobre la misma cantidad se lleve por 18 meses.

Luego para obtener el interés de 3859,25 bastará establecer esta proporcion

$$100 : 13,50 :: 3859,25 : x;$$

de donde $$x = \frac{3859,25 \times 13,50}{100} = 520,99875 \text{ ó } 521 \text{ fr.}$$

Añadiendo este interés á 3859,25 resulta 4380,25 por el total de la letra.

La comprobacion de este resultado deberá hacerse por el primer método, y para ello se establecerá la proporcion

$$113,50 : 100 :: 4380,25 : x,$$

en la que el cuarto término espresa el valor actual de la letra de 4380,25 y es igual á 3859 fr., 25 cs.

Al fin del capítulo VIII trataremos de las reglas de interés y descuento compuestas.

REGLA DE SOCIEDAD.

229. El objeto de esta regla es *dividir la ganancia ó pérdida de un capital entre los socios contribuyentes.*

En el comercio se ha convenido, 1.º que la ganancia ó pérdida de cada asociado sea *proporcional á la parte con que haya contribuido* cuando los tiempos son iguales, y 2.º que sea *proporcional á los tiempos* cuando las partes son iguales. De lo que resulta que para partidas y tiempos diferentes, *las partes son proporcionales á los productos de las partidas por los tiempos.*

Luego considerada la cuestion bajo un punto de vista general, se reduce á *dividir un número dado* (que puede ser una ganancia ó pérdida) *en partes directamente proporcionales á otros números dados.*

Sea pues A el número que se ha de dividir; m, n, p, q...., los números proporcionalmente á los cuales debe ser dividido A; y x, x', x'', x'''..... las diferentes partes.

En virtud del enunciado se tendrá esta serie de relaciones iguales

$$m : x :: n : x' :: p : x'' :: q : x''' \ldots\ldots;$$

de donde haciendo (n.º 211) la suma de los antecedentes y la de los consecuentes,

$$m + n + p + q + \ldots\ldots : x + x' + x'' + x''' + \ldots\ldots :: m : x,$$

ó bien en razon de que $x + x' + x'' + x''' + \ldots\ldots$ ó la suma de las partes es igual á A,

$$\begin{aligned} m + n + p + q + \ldots\ldots : A :: m &: x. \\ :: n &: x' \\ :: p &: x'' \\ :: q &: x''' \\ \ldots&\ldots\ldots \\ \ldots&\ldots\ldots \end{aligned}$$

Lo cual prueba que para obtener cada una de las partes, *basta multiplicar el número que se ha de dividir* A *respectivamente por cada uno de los números* m, n, p. q..., *y dividir el producto por la suma* m + n + p + q.... *de estos mismos números.*

Hagamos algunas aplicaciones.

230. PRIMER EJEMPLO. — *Tres socios han puesto en fondos, el primero* 1500 fr., *el segundo* 22540 fr. *y el tercero* 25600 fr.: *al año han ganado* 12000 fr.: *¿á cómo deberá tocar á cada asociado?*

ANALISIS. — Resulta de la anterior esplicacion que *el capital en fondo* (ó la suma de las tres partidas) *es á la ganancia total como una de las partidas es á la ganancia que le corresponda*; cuarto término de la proporcion que deberá hallarse por la regla de tres.

Luego cada ganancia particular es igual al producto de la ganancia total por la partida que le corresponda dividido por el capital en fondo.

Esto supuesto, sumando desde luego las tres partidas se tiene 63140 rs.

Así se tendrá sucesivamente por las espresiones de las ganancias de cada socio:

1.ª ganancia: $x = \dfrac{12000 \times 15000}{63140} = 2850,81$,

2.ª $x' = \dfrac{12000 \times 22540}{63140} = 4283,81$,

3.ª $x'' = \dfrac{12000 \times 25600}{63140} = \dfrac{4865,38}{12000,00.}$

Operacion bien fácil de comprobar, pues para que sea exacta es necesario que sumadas las ganancias particulares resulte la ganancia particular.

SEGUNDO EJEMPLO.—*Un comerciante acomete una empresa con un fondo de* 25000 fr. Cinco *meses despues se le asocia un capitalista que contribuye con* 40000 fr., *y* seis *meses mas adelante entra en la empresa un segundo capitalista contribuyendo con la cantidad de* 60000 fr. *Al cabo de dos años resulta una ganancia de* 80000 fr. *Partiendo del principio de que el comerciante como solo encargado de la empresa toma un* 5 p % *sobre la ganancia total además de lo que le corresponda por su partida*; *hallar la ganancia correspondiente á cada asociado.*

ANALISIS.—Puesto que el comerciante en recompensa de su trabajo debe tomar en primer lugar un 5 p % del beneficio total, resulta que las $\frac{5}{100}$ ó á la $\frac{1}{20}$ parte de 80000 fr., á saber, 4000 fr. deberán obrar en provecho suyo, fuera parte la ganancia que á su partida corresponda.

Restando 4000 de 80000 quedan 76000 fr., que es lo que deberá repartirse entre los tres socios proporcionalmente á los productos de sus partidas por el tiempo que han estado en fondo.

Así pues, 1.° los 25000 fr. del comerciante durante 24 meses dan 25000×24 ó 600000 fr.

2.° Los 40000 del primer capitalista habiendo estado $24 - 5$ ó 19 meses en fondo dan 40000×19 ó 760000 fr.

3.° Los 60000 del segundo capitalista durante $24 - 5 - 6$ ó 13 meses dan 60000×13 ó 780000 fr.

Luego la cuestion queda reducida á dividir 76000 fr. proporcionalmente á los tres números 600000, 760000 y 780000, ó lo que es lo mismo, proporcionalmente á los números 60, 76 y 78.

La suma de estos tres últimos números es 214. Así se hallará sucesivamente para las tres partes,

$$1.^{a}\text{ parte}\ldots\ldots \frac{76000 \times 60}{214} = 21308{,}41\ ,$$

ó bien añadiendo LA PRIMA de 4000 á razon de 5 p % que obra en beneficio del comerciante........................ 25308,41

$$2.^{a}\ldots\ldots \frac{76000 \times 76}{214} = \frac{5776000}{214} = 26990{,}65$$

$$3.^{a}\ldots\ldots \frac{76000 \times 78}{214} = \frac{5928000}{214} = 27700{,}94$$

Comprobacion....... 80000 fr.,00.

231. La regla de sociedad es una de las operaciones aritméticas mas usuales en todas las naciones cultas y civilizadas, y así es que el recaudo ó reparticion de contribuciones que hace el gobierno de cada nacion para sostener los intereses del estado no vienen á ser otra cosa mas que una regla de sociedad por la cual se determina la cantidad con que cada individuo debe contribuir al aumento de los fondos públicos con arreglo á sus facultades; cantidad que obra al parecer contra el contribuyente, pero que á la verdad no es una *pérdida* real, por cuanto unida á la de sus conciudadanos sirve de medio para sostener el reposo social, aumentar la riqueza material y en una palabra para dar pábulo al cumplimiento de todos los deberes de un buen gobierno.

La cuestion que tiene por objeto fijar ó determinar el total de las contribuciones proporcionales, correspondientes á un número de individuos tan grande como el de un reino, la Francia por ejemplo, parece á primera vista muy complicada; mas las siguientes consideraciones pondrán de manifiesto cuán sencilla es por el contrario.

Supongamos, por ejemplo, que no se trata mas que de determinar las contribuciones prediales ó séanse las que se perciben por *rentas territoriales.*

Las necesidades de un gobierno durante un año exigen una contribucion predial cuyo valor es A. *¿Cómo deberá procederse al cobro de ella?*

Solucion. — Comiéncese por repartir por medio del ministerio de hacienda la suma A entre todos los departamentos que compongan el reino *proporcionalmente* á las rentas que se suponga tener estos diversos departamentos.

Sea B la suma con que cualquiera de ellos deba contribuir por su *cuota correspondiente.*

Dividido este departamento en tres ó cuatro distritos cuyas rentas territoriales son conocidas, se repartirá por medio de su prefectura la suma B entre los dichos distritos *proporcionalmente* á sus rentas.

Sea C la suma que uno de los distritos deba pagar por su *parte correspondiente.*

Dividiéndose cada distrito en muchos pueblos, se hace por medio de la subprefectura de este distrito el reparto de la suma C entre los pueblos que le componen *proporcionalmente* á sus ventas.

Sea D la *parte correspondiente* á uno de estos pueblos.

Finalmente, como un pueblo se compone de cierto número de propiedades rústicas ó urbanas cuyas rentas son conocidas, no habrá mas que repartir la suma D entre ellas *proporcionalmente* á sus rentas.

Una vez hechas las matrículas de las contribuciones de todos los propietarios, ó lo que es lo mismo, formulado el reparto, cada contribuyente hace efectivo y entrega el total de ellas al recaudador del pueblo, ciudad, villa ó lo que sea. Este lo entrega al recaudador del distrito á que pertenece: el recaudador del distrito, al recaudador general del departamento y finalmente todos los recaudadores de los departamentos entregan sus fondos en la Tesorería, en cuyo caso ya queda en poder del gobierno el total del reparto que habia hecho.

He aquí nuevas cuestiones pertenecientes á la regla de sociedad.

TERCER EJEMPLO. — *Repartir una suma de* 36000 rs. *entre cuatro personas, de modo que la segunda tenga duplo de la primera, la tercera tanto como la primera y segunda juntas y la cuarta triplo de la tercera.*

A poco que se medite sobre la naturaleza de esta cuestion, se verá que tomada por unidad la primera persona ó representada por 1, la parte de la segunda deberá ser 2, la de la tercera $2+1$ ó 3 y por último la de la cuarta 3×3 ó 9; y por tanto la cuestion queda reducida á dividir 36000 en cuatro partes que sean entre sí como los números 1, 2, 3, 9, y pertenece por consiguiente á la general del n.° 229.

Sumando estos cuatro números 1, 2, 3, 9 se tiene 15.

Así se obtendrá sucesivamente por las cuatro partes:

$$1.^{a}\text{ parte}\ldots\ldots\frac{1\times 36000}{15}=2400;$$

$$2.^{a}\ldots\ldots\ldots\frac{2\times 36000}{15}=4800;$$

$$3.^{a}\ldots\ldots\ldots\frac{3\times 36000}{15}=7200;$$

$$4.^{a}\ldots\ldots\ldots\frac{9\times 36000}{15}=\frac{21600}{36000.}$$

Algunas veces los números proporcionalmente á los cuales se debe dividir una suma dada son quebrados ó números fraccionarios; pero en este caso la cuestion podrá considerarse como si los datos que en ella entrasen fuesen números enteros, reduciendo los quebrados á un comun denominador.

Así para dividir una suma a en partes proporcionales á los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ se reducirán estos quebrados á un comun denominador, lo cual da $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$; y como (n.° 217) los quebrados que tienen un mismo denominador son proporcionales á sus numeradores, no habrá mas que dividir la suma a proporcionalmente á los números dados 8, 9, 10, y se tendrá $\frac{8a}{27}$, $\frac{9a}{27}$, $\frac{10a}{27}$ por las tres partes pedidas.

Cuarto ejemplo. — *Una persona que al morir deja una suma de 40000 francos lega en su testamento á sus herederos lo siguiente:* $\frac{1}{6}$ *del bien total al primero,* $\frac{2}{5}$ *al segundo,* $\frac{4}{9}$ *al tercero, y* $\frac{1}{3}$ *al cuarto: ¿qué cantidad corresponde á cada uno?*

Solucion.—Si la suma de los cuatro quebrados $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$ y $\frac{1}{3}$ fuese igual á 1, las condiciones del testamento serian bien fáciles de llenar, pues no habria mas que tomar alternativamente la 6.ª parte de 40000, los $\frac{2}{5}$ de 40000 &c, y se tendrian las cuatro partes.

Pero reduciendo estos quebrados á un comun denominador se halla $\frac{15}{90}$, $\frac{36}{90}$, $\frac{40}{90}$, $\frac{30}{90}$, cuya suma es igual á $\frac{121}{90}$ ó á $\frac{131}{90}$, resultado mayor que la unidad; por lo cual se ve que los bienes quedarian mas que repartidos entre solo las tres primeras partes establecidas segun los términos del testamento.

Sin embargo, si se reflexiona sobre el enunciado, se ve que la voluntad del testador era repartir sus bienes entre los cuatro herederos de modo que sus partes fuesen proporcionales á los números $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{3}$.

Por tanto las condiciones que el testador requiere serán cumplidas dividiendo los 40000 francos en partes proporcionales á estos cuatro quebrados, y por consiguiente á los cuatro números 15, 36, 40 y 30.

Siendo 121 la suma de estos números se obtendrá sucesivamente por las cuatro partes:

$$1.^a \text{ parte.} \ldots \quad \frac{15 \times 40000}{121} = 4998 \text{ fr.}, 68,$$

$$2.^a \ldots\ldots \quad \frac{36 \times 40000}{121} = 11900{,}82,$$

$$3.^a \ldots\ldots \quad \frac{40 \times 40000}{121} = 13223{,}14,$$

$$4.^a \ldots\ldots \quad \frac{30 \times 40000}{121} = \underline{9917{,}36}$$

$$40000{,}00.$$

Quinto ejemplo. — *Se ha hecho requisicion de* 1200 *caballos que deberán ser distribuidos á tres regimientos de húsares proporcionalmente á sus fuerzas: la fuerza del primer regimiento es á la del segundo como* 11 *es á* 8 *y á la del tercero como* 9 *es á* 7. *¿Qué número de caballos deberá caber á cada regimiento?*

Resulta evidentemente del enunciado que el número de caballos del segundo regimiento debe ser $\frac{8}{11}$ de el del primero y por una razon análoga que el del tercero debe ser los $\frac{7}{9}$ de el del primero. Luego los tres números pedidos son entre sí como los números $1, \frac{8}{11}, \frac{7}{9}$, ó bien reduciendo el entero á la especie de los quebrados y estos á su comun denominador, como los tres números 99, 72, 77.

Así se obtendrá sucesivamente

$$\text{para el } 1.^{er} \text{ regimiento} \ldots \quad \frac{99 \times 1200}{248} = 479 \frac{1}{31},$$

$$\text{para el } 2.^o \ldots\ldots \quad \frac{72 \times 1200}{248} = 348 \frac{12}{31},$$

$$\text{para el } 3.^o \ldots\ldots \quad \frac{77 \times 1200}{248} = 372 \frac{18}{31}$$

$$1200 \quad 00.$$

Nota. — Dando 1 la adicion de los quebrados será necesario para despreciarlos dar un caballo mas al tercer regimiento que corresponde al mayor numerador.

Hay además otras dos reglas que sin depender precisamente de la regla de tres no es menos importante su conocimiento, pues son de un uso frecuente en el banco y en los diversos ramos del comercio: estas son *la regla conjunta* y *la de aligacion.*

REGLA CONJUNTA.

233. Esta regla tiene por objeto *determinar la relacion de las monedas de dos paises conociendo la de estas monedas con las de otros paises.* Se la llama *regla conjunta*, porque consiste en reducir por via de multiplicacion muchas relaciones á una sola, lo cual da lugar (n.° 212) á una *relacion compuesta.*

Los dos siguientes ejemplos nos parece serán suficientes para dar una idea de esta regla y del modo de ponerla en práctica.

PRIMER EJEMPLO.

48 *francos*. . . . valen . . . . . 52 *chelines de Inglaterra*;
15 *chel. de Ingl.* . . . . 6 *florines de Alemania*;
50 *flor. de Alem.* . . . . 7 *ducados de Hamburgo*;
14 *duc. de Hamb.* . . . . 40 *rublos de Rusia.*

En este supuesto ¿2500 *francos* cuántos *rublos valen de Rusia*?

Nota. — Debemos advertir á los lectores que estos números aquí adoptados para espresar las relaciones de las diversas monedas los hemos tomado casi *ad libitum*, pudiendo variar estas relaciones segun el cambio de una plaza sobre otra.

Solucion. — Representemos por a, b, c, d, e *los valores intrínsecos* * de las cinco monedas que entran en el enunciado, y por x el número de rublos que es necesario para formar 2500 francos; tendremos evidentemente estas igualdades:

$$\begin{aligned} 48a &= 52b \\ 15b &= 6c \\ 50c &= 7d \\ 14d &= 40e \\ x \times e &= 2500a; \end{aligned}$$

de donde multiplicando estas igualdades miembro por miembro y omitiendo los factores comunes a, b, c, d, e,

$$48 \times 15 \times 50 \times 14 \times x = 52 \times 6 \times 7 \times 40 \times 2500.$$

---

* Se llaman VALORES INTRINSECOS los valores de las diversas clases de monedas referidos á una misma unidad, por ejemplo AL FRANCO.

$$\text{Luego } x = \frac{52 \times 6 \times 7 \times 40 \times 2500}{48 \times 15 \times 50 \times 14} = 433 \text{ rub. } \frac{1}{3}.$$

Obsérvese que no deben efectuarse los cálculos indicados en el numerador y en el denominador hasta tanto que no se hayan suprimido los factores comunes á ambos términos.

He aquí cómo se efectuan estas simplificaciones:

$$\begin{array}{rrrrcll}
1 \ldots & 2 \ldots & 12 \ldots & 48a & = & 52b \ldots & 13 \\
 & & 3 \ldots & 15b & = & 6c \ldots & 1 \\
 & & 1 \ldots & 50c & = & 7d \ldots & 1 \\
 & 1 \ldots & 2 \ldots & 14d & = & 40e \ldots & 1 \\
 & & & x \times e & = & 2500a \ldots & 100.
\end{array}$$

Colocadas unas debajo de otras las cinco igualdades, se suprimirán los factores comunes a, b, c, d, e.

Suprímase despues el factor 4 comun á 48 y á 52, lo cual da los cocientes respectivos 12 y 13.

En seguida se suprimirá el factor 6 comun á 12 y á 6, que se reemplaza respectivamente por 2 y 1.

Continúese de este modo hasta haber suprimido todos los factores comunes á los primeros y segundos miembros de las igualdades, y hecha toda la simplificacion posible se obtiene $3x = 1300$; de donde

$$x = \frac{1300}{3} = 433 \ \frac{1}{3}.$$

Estas operaciones exigen de por sí bastante práctica; mas no tienen nada de difíciles. Es necesario tener cuidado en tildar cada uno de los números que se dividan por algun factor y reemplazarlo por el cociente que le corresponda.

SEGUNDO EJEMPLO.

Un comerciante francés quiere enviar á Londres una suma de 1200 *libras esterlinas. Un banquero de París se encarga de librar esta suma llevando un* 1 p % *de comision. Se quiere saber en francos la cantidad que deberá tomar el banquero por su comision.*

Se sabe que

26 *libras esterlinas* valen. . . .	150 *rublos*;
75 *rublos*.	30 *ducados de Hamburgo*;
20 *ducados de Hamb*.	42 *duros de España*;
12 *duros de España*.	65 *francos*.

Representemos por a, b, c, d, e los valores intrínsecos de las monedas y por x el valor de 1200 libras esterlinas en francos, y se tendrán las igualdades siguientes:

$$\begin{array}{rrrrr} 1. \ldots 13. \ldots & 26a = & 150b. \ldots\ldots & 1, \\ 1. \ldots & 75b = & 30c. \ldots\ldots & 3, \\ 1. \ldots & 20c = & 42d. \ldots\ldots & 21, \\ 1. \ldots & 12d = & 65e. \ldots\ldots & 5, \\ & x \times e = & 1200a. \ldots\ldots & 100. \end{array}$$

De donde se deduce efectuando las reducciones como ya hemos indicado

$$\begin{array}{lr} & x = 31500 \\ \text{El 1 p \%} \ldots\ldots\ldots\ldots = & 315 \\ \hline & 31815. \end{array}$$

Luego el comerciante debe dar al banquero 31815 francos por libras las 1200 libras esterlinas sobre Londres.

234. La regla conjunta puede ser considerada como un caso particular de la regla de los quebrados de quebrados espuesta en el n.º 65.

En efecto, recordemos el primero de los dos ejemplos resueltos en el número anterior.

Decir que 48 francos valen 52 chelines de Inglaterra equivale á decir que 1 franco vale $\frac{52}{48}$ de un chelin de Inglaterra. Del mismo modo, pues, que 15 chelines valen 6 florines de Alemania, resulta que 1 chelin vale $\frac{6}{15}$ de un florin de Alemania, y por consiguiente 1 franco vale $\frac{52}{48}$ de $\frac{6}{15}$ de un florin del mismo pais. Así tambien, pues que 50 florines valen 7 ducados de Hamburgo, se tendrá que 1 fl. debe valer $\frac{7}{50}$ del ducado de Hamb. y por consiguiente 1 fl. = á los $\frac{52}{48}$ de los $\frac{6}{15}$ de los $\frac{7}{50}$ de un duc. de Hamb.

Siguiendo de este modo se llegará á probar que se debe tener 2500 francos = 2500 veces los $\frac{52}{48}$ de los $\frac{6}{15}$ de los $\frac{7}{50}$ de los $\frac{40}{14}$ del rublo.

Luego (n.º 65) 2500 fr. $= \dfrac{52 \times 6 \times 7 \times 40 \times 2500}{48 \times 15 \times 50 \times 14}$ del Rº; resultado igual al anteriormente hallado.

REGLA DE ALIGACION.

235. Las cuestiones que pertenecen á esta regla son de dos especies.

O bien tienen por objeto *hallar el valor medio de muchas clases de cosas, conocidos el número y valor particular de cada cosa*;

O bien *determinar las cantidades de cada clase de cosas que deben entrar en una mezcla ó* ALIGACION, *conocidos el precio ó el valor de cada especie y el precio ó valor total de la mezcla.*

No nos ocuparemos, pues, mas que de la primera cuestion dejando la segunda para cuando tratemos del Algebra como perteneciente á esta ciencia.

PRIMER EJEMPLO.—*Un vinatero ha mezclado vinos de dos clases, á saber*: 250 *litros de á* 12 s. *el litro*, 180 *litros de á* 15 s. *y* 200 *de á* 16 s.; *¿á cómo deberá venderse el litro de la* MEZCLA?

SOLUCION.—250 litros á 12 s. valen evidentemente 25 × 12 ó	3000 s.
Del mismo modo 180 litros á 15 s. componen 180 × 15 ó	2700
Por último 200 litros á 16 s. valen 200 × 16 ó .	3200,
lo cual da por el precio total de la mezcla	8900 sueldos.

	250
Sumando ahora los tres números 250, 180 y 200, lo que da 630, la cuestion quedará reducida á esta:	180
	200
	630

630 *litros de vino cuestan* 8900 *sueldos, ¿cuánto deberá valer el litro?*

Para obtener este precio basta dividir 8900 por 630, y el cociente 14 s. 1 d. será el precio pedido.

REGLA GENERAL.—Para hallar el precio de la unidad de la mezcla es necesario, 1.º *multiplicar el precio de la unidad de cada especie de cosas mezcladas por el número de unidades de esta especie y sumar los productos*; 2.º *sumar los números de unidades de las diferentes clases de cosas*; y 3.º *dividir la suma de los productos ó el precio total por la suma de los números de unidades.*

SEGUNDO EJEMPLO.—*Se han mezclado* 14 *fanegas de trigo de á* 25 *reales con* 50 *de á* 30 *y con* 22 *de á* 28; *¿á cómo se deberá vender cada fanega de la mezcla?*

Solucion.—Procediendo como anteriormente tendremos:

Las 14 fs. á 25 rs. valdrán 14 × 25 ó	350 rs.
50 á 30 rs. valen 50 × 30 ó	1500
Y 22 á 28 rs. deben valer 22 × 8 ó	176
lo cual da por el precio total de las cantidades mezcladas .	2466 rs.

Sumando los números 14, 50 y 22 se tiene 86, y la cuestion queda reducida á esta:

14
50
22
86

86 *fanegas de trigo valen* 2466 rs., *¿á cómo deberá valer la fanega?*

Para obtener este precio basta dividir 2466 por 86, y el cociente 28 rs. 22 $\frac{40}{43}$ mrs. será el precio pedido.

Tercer ejemplo.—500 *obreros han estado trabajando por cierto tiempo: de ellos, los* 160 *han ganado* 2 fr. *diarios*; 200, 1 fr. 75 cs.; *y* 140, 1 fr. 50 cs.; *¿uno con otro á cómo sale por dia cada obrero?*

160 obr.	á 2 fr. producen.	320
200	á 1 fr. 75 c.	350
140	á 1 fr. 50 c.	210
500		880

Luego supuesto que 500 obreros han tenido de costo 880 fr., un solo obrero deberá costar $\frac{880}{500}$ ó 1 fr. 76 c.

236. La determinacion de *los valores medios* de muchas cosas de distintos valores es un caso particular de la regla de aligacion de la primera especie.

Se llama *valor medio* de muchas cosas cuyos valores particulares son conocidos, *la suma de los valores de estas cosas dividida por la suma de tantas unidades como cosas hay*, ó en términos mas sencillos, *dividida por su número.*

Así en el caso en que no se tengan mas que dos cosas, *el valor medio* es la semisuma de los valores de estas cosas, ó en otros términos (n.° 203), *el medio diferencial entre los valores de estas dos cosas.*

Cuarto ejemplo.—*Se ha medido cuatro veces la longitud de un coto: en la primera se han obtenido por esta longitud* 250 m. 439; *en* *la segunda* 258 m., 695; *en la tercera* 249 m., 75 *y por último en la cuarta* 251 m., 158. *¿Cuál debe ser la longitud del coto?*

Como las medidas que se han obtenido no estan acordes entre sí, es claro que el único modo de responder á la cuestion es hallar un término medio entre *las medidas halladas*.

La suma de las cuatro medidas es 1002, 042: dividiendo este resultado por 4 se obtiene 250 m., 5105 por la *medida media*.	250,439 m.
	240,695
	249,750
	251,258
	1002,042

ALGUNAS OTRAS CUESTIONES PARA, CUYA RESOLUCION BASTA EL SOLO RACIOCINIO.

237. En las cuestiones que preceden, los medios que hemos empleado para su resolucion han sido fijos y generales, es decir, susceptibles de ser aplicados á todas las cuestiones de la misma especie. Sin embargo pueden presentarse muchas que solo se refieren á aquellas en parte, y que tal vez no dependan de ellas de modo alguno; cuestiones que aun cuando solo el Algebra presta medios para su resolucion, nosotros teniendo en cuenta la poca práctica de los principiantes, las vamos á resolver por el solo raciocinio: esto es lo que se llama resolver un problema *aritméticamente*.

Consideremos antes de todo lo que dijimos en el n.º 197, á saber, que resolver ó analizar un problema es *hallar por medio del raciocinio en las relaciones establecidas entre los números que entran en el enunciado, la serie de operaciones que hay que efectuar con los números conocidos, para de ellas deducir el valor de los incógnitos.*

PRIMER PROBLEMA.—*Hallar un número cuya mitad, tercio, cuarto y los* $\frac{2}{7}$ *compongan sumados* 575.

Observemos que tomar sucesivamente de un número la *mitad*, el *tercio*, el *cuarto*, y los $\frac{2}{7}$, y en seguida sumar estas partes equivale á multiplicar este número por la suma de los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{7}$, es decir, por $\frac{115}{84}$; y como el producto del número buscado por $\frac{115}{84}$ debe ser igual á 575, resulta de la misma naturaleza de la division que este número debe ser igual al cociente de 575 dividido por $\frac{115}{84}$ y por consiguiente (n.º 62) á $575 \times \frac{84}{115}$.

Efectuando el cálculo indicado se halla 240 por el número pedido.

Comprobacion.............			420
	la mitad	=	210
	el tercio	=	140
	el cuarto	=	105
	la 7.ª	=	60
	la 7.ª	=	60
	Total....		575.

Segundo problema.—*Hallar tres números cuya suma sea igual á* 96, *y tales que el segundo esceda al primero en* 2 *y el tercero esceda en* 4 *á la suma de los dos primeros.*

Es evidente segun el enunciado que disminuyendo al segundo número en 2 deberá tenerse el primero, y quitando al tercero 2 + 4 ó 6 unidades debe resultar el duplo del primero: la suma de los tres números conforme á estas dos sustracciones deberá ser cuádrupla del primer número.

Así sustrayendo de 96 la suma 2 + 6, queda 88; por lo cual se ve que el cuádruplo del primer número es igual á 88.

Luego este primer número tiene por valor $\frac{88}{4}$........... ó 22.

Por consiguiente el segundo es igual á........... 22 + 2 ó 24
y el tercero á.................................. 46 + 4 ó 50

Comprobacion ...... 96.

Tercer problema.—*Hallar dos números tales que si se añade* 21 *al primero, la suma resultante sea quíntupla del segundo, y que añadiendo* 21 *al segundo la suma resultante sea tripla del primero.*

Por la naturaleza del enunciado se ve que la diferencia entre el quíntuplo del segundo y el primero es igual á la diferencia entre el triplo del primero y el segundo; de modo que hay una *equidiferencia* entre el quíntuplo del segundo número y el primero, el triplo de este y el segundo; y como *en toda equidiferencia la suma de los estremos es igual á la de los medios* (n.º 201), resulta que el *séstuplo* del segundo número es igual al *cuádruplo* del primero, y asimismo el segundo es igual á los $\frac{4}{6}$ ó á los $\frac{2}{3}$ del primero. Ahora bien, este segundo número aumentado de 21 da el triplo del primero, ó lo que es lo mismo, 21 es igual al triplo del primero disminuido del segundo ó de los $\frac{2}{3}$ del primero, es decir, es igual al producto del primero por $\left(3 - \frac{2}{3}\right)$ ó á los $\frac{7}{3}$ del primero.

Luego finalmente el primero tiene por valor $21 \times \frac{3}{7}$ ó 9.

El segundo, que es los $\frac{2}{3}$ del primero, es igual á $9 \times \frac{2}{3}$ ó á 6.

Efectivamente; 1.º $9 + 21$ da 30, que es exactamente el quíntuplo de 6; y 2.º $6 + 21$ da 27, que es el triplo de 9. Luego 9 y 6 son los números pedidos.

Cuarto problema.—*Se necesitan tres obreros para hacer una obra. El primero puede hacerla solo en 12 dias trabajando 10 horas por dia, el segundo en 15 dias trabajando 6 horas por dia y el tercero en 9 trabajando 8 horas por dia. Se pregunta*: 1.º *en cuánto tiempo podrán hacer la obra los tres obreros juntos*; 2.º *qué podrá hacer cada uno*; y 3.º *cuánto ganará pagando la totalidad de la obra 108 francos*.

Solucion.—Segun el enunciado el primer obrero trabajando solo hará la tarea en 12×10 ó en 120 horas, y por tanto en 1 hora hará $\frac{1}{120}$ de la obra.

El segundo la hará en 15×16 ó en 90 horas, y en 1 hora hará por consiguiente $\frac{1}{90}$ de la obra.

El tercero en 9×8 ó en 72 horas, y en 1 hora hará $\frac{1}{72}$ de la obra.

Estos tres obreros trabajando juntos harán, pues, en una hora

$\frac{1}{120} + \frac{1}{90} + \frac{1}{72}$ ó $\frac{12}{360}$, es decir, $\frac{1}{30}$ de la obra.

Luego si necesitan 1 hora para hacer $\frac{1}{30}$ de la obra, es claro que emplearán 30 horas para hacer la obra toda entera.

Ahora bien, pues que en 1 hora hace el primero $\frac{1}{120}$ de la obra, en 30 horas hará $\frac{1}{120} \times 30$ ó $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. Así tambien el segundo hará en 30 horas $\frac{1}{90} \times 30$ ó $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, y por último el tercero hará en 30 horas $\frac{1}{72} \times 30$ ó $\frac{5}{12}$.

Ya no queda por saber mas que lo que corresponde á cada obrero en razon de su tarea. Para esto basta dividir 108 en partes proporcionales á los tres quebrados $\frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}$, ó mas bien á los tres números 3, 4, 5, lo cual da (n.° 229) 27, 36 y 45 por las tres ganancias pedidas.

Las diversas cuestiones que acabamos de resolver son del género de aquellas que muchos autores resuelven por la regla llamada *de falsa posicion simple ó doble*. Nos ha parecido conveniente pasar en silencio esta regla, pues no ofrece de por sí sentido alguno, y la demostracion rigorosa de sus procedimientos se funda en los principios del Algebra, principios que son harto fáciles de aplicar á la inmediata resolucion de estas mismas cuestiones.

CAPITULO VIII.

Teoría de las Progresiones y de los Logaritmos.

El presente tratado de Aritmética seria harto incompleto si no contuviese por lo menos las primeras nociones de los logaritmos. Este tan bello descubrimiento debido al baron escocés Neper es uno de los mas importantes que se hayan hecho en las Matemáticas, pues que con el auxilio de una tabla de logaritmos se efectuan en muy poco tiempo los cálculos numéricos mas complicados.

Sin embargo, antes de pasar al análisis de los principios de esta teoría es indispensable demos á conocer las propiedades principales de dos series de números, series que pueden considerarse como una continuacion de las equidiferencias y proporciones: estas son las progresiones por diferencia y las progresiones por cociente.

§ I. De las Progresiones.

238. Progresiones por diferencia (antes *progresiones aritméticas*).—Llámase así una serie de números tales que cada uno escede ó es escedido del que le precede en una *cantidad constante* que se llama *razon ó diferencia* de la progresion.

Así sean las dos series

$$\div\ 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26 . 29 \ldots\ldots,$$
$$\div\ 60 . 55 . 50 . 45 . 40 . 35 . 30 . 25 . 20 \ldots\ldots,$$

de las cuales la primera es tal, que cada término escede á su anterior en un número constante 3, pues que se tiene $5 - 2 = 3$; $8 - 5 = 3 \ldots$: 3 es la *razon ó diferencia* de la progresion.

La segunda por el contrario es tal, que cada término es escedido del que le precede en un número constante 5, de modo que $60 - 55 = 5$; $55 - 50 = 5$; $50 - 45 = 5$......: 5 es, pues, la razon de la progresion.

La primera es una progresion *creciente*, porque sus términos van en aumento, y la segunda es *decrecente*, porque sus términos van en diminucion.

Para espresar que varios números forman una progresion por diferencia se les encabeza con el signo $\div$ que quiere decir *como* (n.° 199), y despues de cada término se pone *un punto* que significa *es á*.

Esta notacion está fundada sobre el principio que hemos sentado (n.° 203), á saber, que una progresion por diferencia no es otra cosa mas que una serie de *equidiferencias continuas*.

La progresion se lee de este modo: sea una de las progresiones anteriores:

Como 2 *es á* 5, 5 *es á* 8, 8 *es á* 11, 11 *es á* 14, ó mas simplemente 2 *es á* 5, *es á* 8, *es á* 11, *es á* 14.....

Nota.—Es bien fácil de observar en esta serie de equidiferencias

$$2 . 5 : 5 . 8 : 8 . 11 : 11 . 14 : 14 . 17 : 17 . 20 : 20 . 23 \ldots\ldots$$

que cada término es al mismo tiempo antecedente y consecuente, á escepcion del primer término que no es mas que antecedente, y del último que solo es consecuente.

239. Primera propiedad.—*Determinacion de un término, cualquiera que sea el órden que ocupe, por medio del primer término.*

Resulta de la misma definicion de la progresion por diferencia que en una progresion por cociente

El *segundo* término es igual al primero mas la razon;

El *tercero* al *segundo* mas la razon, ó bien al *primero* mas *dos veces* la razon;

El *cuarto* al *tercero* mas la razon, ó al primero mas *tres veces* la razon.

Y en general *un término de un órden cualquiera es igual al primero, mas tantas veces la razon como términos le anteceden.*

Para presentar esto de un modo mas preciso y exacto consideremos la serie de números

$$\div a . b . c . d . e . f . g \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots i . k . l,$$

que supondremos formen una progresion creciente, y representemos por r la razon de la progresion.

Se tendrá evidentemente segun la naturaleza de toda progresion

$$\begin{aligned} b &= a + r, \\ c &= b + r = a + r + r = a + 2r, \\ d &= c + r = a + 2r + r = a + 3r, \\ e &= d + r = a + 3r + r = a + 4r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Luego si n representa el órden de un término cualquiera l, en cuyo caso $(n - l)$ deberá espresar el número de términos que le preceden, tendremos $l = a + (n - 1)\, r \ldots\ldots (1)$, espresion que traducida al lenguaje vulgar equivale al enunciado de la primera propiedad.

Si la progresion fuese decrecente, se tendria por el contrario

$$\begin{aligned} b &= a - r, \\ c &= b - r = a - r - r = a - 2r, \\ d &= c - r = a - 2r - r = a - 3r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

y por consiguiente, $l = a - (n - 1)\, r \ldots\ldots (2)$.

Las dos fórmulas (1) y (2) sirven para hallar un término cualquiera de la progresion sin necesidad de tener que calcular todos los que le preceden, pues basta conocer el *primer término*, la *razon* y el *número* de términos comprendidos entre el primero y el que se quiere hallar.

Sea, por ejemplo, la progresion $\div 2 . 5 . 8 . 11 \ldots$, cuyo término 20 se quiere hallar.

Como en esta progresion se tiene $a = 2$, $r = 3$ y $n = 20$, resulta que aplicando valores á la fórmula (1) se deberá tener

$$l = 2 + 19 \times 3 = 59.$$

Asimismo se hallará para el término 60

$$l = 2 + 59 \times 3 = 179.$$

Sea además la progresion decrecente $\div 80 . 74 . 68 . 62 \ldots$, cuyo término 12 se quiere hallar.

En este caso aplicando valores á la fórmula (2) se tendrá

$$l = 80 - 11 \times 6 = 14.$$

240. Consecuencia de la propiedad que precede.—Estas mismas fórmulas dan lugar á la resolucion de una cuestion muy importante que tiene por objeto *interpolar entre dos números dados tantos* MEDIOS DIFERENCIALES *como se quiera*, es decir, otros números que formen con los dados una progresion por diferencia.

Propongámonos por primer ejemplo *interpolar entre* 3 *y* 57 OCHO MEDIOS DIFERENCIALES.

Supuesto que la progresion que se quiere formar, inclusos los dos términos dados, debe estar compuesta de $8 + 2$ ó de 10 términos, resulta (n.º 239) que el último término 57 es igual al primero 3 mas 9 veces la razon: luego si de 57 se resta 3, la diferencia 54 será igual á 9 veces la razon, y por tanto la 9.ª parte de 54 ó 6 es necesariamente la razon de la progresion formada.

Esto supuesto y conociendo ya la razon fácilmente se deducirá

$$\div\ 3 \,.\, 9 \,.\, 15 \,.\, 21 \,.\, 27 \,.\, 33 \,.\, 39 \,.\, 45 \,.\, 51 \,.\, 57.$$

Sean en general a y l los dos números entre los cuales se quiere interpolar un número m de medios diferenciales: si se representa por n el número total de los términos, se tendrá $n = m + 2$; de donde $n - 1 = m + 1$; y las dos fórmulas del n.º 239 se reducirán á

$$l = a + (m + 1)\, r, \quad l = a - (m + 1)\, r.$$

Restando a de los dos miembros, se deduce de la primera

$$l - a = (m + 1)\, r, \text{ de donde } r = \frac{l - a}{m + 1}.$$

En cuanto á la segunda, será necesario añadir á ambos miembros $(m + 1)\, r$, y restar l, lo cual da

$$(m + 1)\, r = a - l, \text{ de donde } r = \frac{a - l}{m + 1}.$$

Luego *para interporlar entre dos números dados cuantos medios diferenciales se quiera, es necesario sustraer el número menor del mayor y dividir la diferencia por el número total de términos que se quieren interpolar, mas* UNO.

El resultado que se obtenga espresará la *razon* de la progresion que puede ser *creciente* ó *decrecente*.

Propongámonos por segundo ejemplo *interpolar entre* 2 y 29, 35 medios diferenciales.

En este caso se tiene $a = 2$, $1 = 29$, $m = 35$: luego

$$r = \frac{29 - 2}{36} = \frac{3}{4};$$

y la progresion pedida es

$$\div 2 . 2\frac{3}{4} . 3\frac{1}{2} . 4\frac{1}{4} . 5 . 5\frac{3}{4} \ldots\ldots 29.$$

El término que hace 20 en esta progresion ó el 19.º medio diferencial tiene por valor (n.º 239) $l = 2 + 19 \times \frac{3}{4} = 16\frac{1}{4}$.

El término 37 ó el último es $l = 2 + 36 \times \frac{3}{4} = 29$, que es lo que efectivamente debe ser.

241. Observacion.—*Si entre los términos consecutivos de una progresion por diferencia, considerados dos á dos, se interpola un mismo número de medios diferenciales, todas las progresiones parciales así formadas componen una sola y única progresion.*

En efecto, sea la progresion $\div a . b . c . d . e . f\ldots\ldots\ldots$; y representemos por m el número de medios que se hayan de interpolar entre a y b, entre b y c, entre c y $d\ldots\ldots$: las razones de las progresiones estarán bien espresadas, segun lo que ya hemos dicho, por $\frac{b-a}{m+1}$, $\frac{c-b}{m+1}$, $\frac{d-c}{m+1}\ldots\ldots\ldots$; y siendo estas cantidades iguales, pues que estando a, b, $c\ldots\ldots$ en progresion se tiene $b - a = c - b = d - c\ldots\ldots$, resulta que la razon es la misma para todas las progresiones parciales. Por otra parte se tiene que el *último* término de cada una de ellas es asimismo *primero* de la siguiente; luego ya se podrá inferir que todas estas progresiones parciales constituyen una sola y única progresion.

Aplicacion.—Interpolar 10 medios diferenciales entre dos términos consecutivos cualesquiera de la progresion

$$\div 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . \ldots\ldots\ldots$$

La razon será $\frac{3-1}{11}$, $\frac{5-3}{11}$, $\frac{7-5}{11}$,........... ó bien $\frac{2}{11}$.

Así se tiene

$$\div 1 . 1\frac{2}{91} . 1\frac{4}{11} . 1\frac{6}{11} \ldots 2\frac{9}{11} . 3 . 3\frac{4}{11} \ldots 4\frac{9}{11} . 5 . 5\frac{2}{11}\ldots\ldots,$$

que es evidentemente una progresion.

Mas adelante haremos uso de esta importante observacion.

242. Segunda propiedad.—En toda progresion por diferencia *la suma de dos términos cualesquiera tomados á igual distancia de los dos términos estremos*, es decir, el primero y último, *es igual á la suma de los dos estremos.*

Así en la progresion

$$\div 1 \, . \, 4 \, . \, 7 \, . \, 10 \, . \, 13 \, . \, 16 \, . \, 19 \, . \, 22 \, . \, 25 \, . \, 28 \, . \, 31 \, . \, 34 \, . \, 37$$

se tiene $1 + 37 = 4 + 34 = 7 + 31 = 10 + 28 \ldots.$

Para esplicar esta propiedad de un modo general llamemos a y l á los dos términos estremos, x á un término que ocupe un lugar p, es decir, que tenga antes de él $(p - 1)$ términos, é y á un término que tenga $(p - 1)$ términos despues de él.

Esto supuesto, en virtud de la fórmula del n.° 239 tendremos

$$x = a + (p - 1)\, r.$$

Si ahora no se considera mas que la parte de la progresion comprendida desde el término y inclusive hasta l tambien inclusive, el número total de los términos de esta progresion será p, y se tendrá

$$l = y + (p - 1)\, r.$$

Por lo cual se ve que l escede á y en la misma cantidad que x á a. Luego los cuatro números a, x, y, l forman una *equidiferencia*, y como en toda equidiferencia *la suma de los medios es igual á la suma de los estremos* (n.° 201), tendremos

$$x + y = a + l.$$

Nota.—Cuando la progresion se compone de un número impar de términos, el del medio forma con los dos estremos una *equidiferencia continua*, y por consiguiente (n.° 203) *es igual á la semisuma de los estremos.*

Así en la progresion ya enunciada $\div 1 \, . \, 4 \, . \, 7 \ldots\ldots$ que se compone de 13 términos, el término 7 ó 19 es igual a $\dfrac{1 + 37}{2}$, lo que es en sí mismo evidente.

243. Consecuencia.—Esta propiedad suministra un medio bastante sencillo que sirve para *obtener la espresion de la suma de todos los términos de una progresion por diferencia.*

Sea en efecto la progresion y representemos por S la suma incógnita de todos sus términos, siendo n el número de ellos. Concibamos escrita esta progresion debajo de sí misma, lo cual da. . . . .

$$\ldots a \,.\, b \,.\, c \ldots\ldots\ldots\ldots i \,.\, k \,.\, l;$$
$$\div\, l \,.\, k \,.\, i \ldots\ldots\ldots\ldots c \,.\, b \,.\, a;$$

de donde se tiene evidentemente 2S por la suma de los términos de estas dos progresiones.

Pero comparando *dos á dos* los términos comprendidos en una misma columna vertical, se tiene segun la propiedad precedente $a + l = b + k = c + i \ldots$; luego 2S es igual á la suma parcial $a + l$ tomada tantas veces como términos hay en la primera progresion, y por consiguiente

$$2S = (a + l)\, n;$$

de donde dividiendo por 2. . . . . $S = \dfrac{(a + l)\, n}{2}$,

es decir, que *la suma de los términos de una progresion por diferencia es igual al producto de la suma de los estremos multiplicado por la mitad del número de términos.*

Aplicaciones.—1.ª *Hallar la suma de los* 25 *primeros términos de la progresion.* . . . . $\div\, 2 \,.\, 7 \,.\, 12 \,.\, 17 \ldots\ldots$

Antes de todo es necesario hallar la espresion del término 25, que siendo aquí 5 la razon, se tendrá para él (n.º 239)

$$l = 2 + 24 \times 5 = 122.$$

Luego $S = \dfrac{(2 + 122)\ 25}{2} = \dfrac{124 \times 25}{2} = 1550.$

2.ª *Hallar la suma de los* 100 *primeros términos de la progresion.* . . . . $\div\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \ldots\ldots$

Se tendrá para el término 100

$$l = 1 + 99 \times 2 = 199.$$

Luego $S = \dfrac{(1 + 199)\ 100}{2} = 10000$ ó al cuadrado de 100.

Y en general siendo el n término de esta progresion

$$l = 1 + (n - 1)\, 2 = 2n - 1.$$

Se tendrá por la suma de los n primeros términos

$$S = \frac{(1 + 2n - 1)\, n}{2} = n^2 \text{ ó el } \textit{cuadrado} \text{ de } n.$$

Así pues, la suma de los 15 primeros términos es igual á 15×15 ó 225.

344. PROGRESIONES POR COCIENTE (antes *geométricas*). Llámase así *una serie de términos de los cuales cada uno es igual al que le precede multiplicado por un número constante que es la* RAZON *de la progresion.*

La progresion será *creciente* ó *decrecente* segun que la *razon* ó el número constante que esprese la relacion de un término con el que le precede, sea *mayor* ó *menor* que la unidad.

La progresion por cociente se escribe poniendo al principio de ella el signo $\div\!\!\div$ y escribiendo *dos puntos* despues de cada término; pues que segun la definicion pueden considerarse estos números como formando una serie de *proporciones continuas*.

Por ejemplo, sean las dos series de números

$$\div\!\!\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458 : \ldots,$$

$$\div\!\!\div 12 : 6 : 3 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \frac{3}{8} : \frac{3}{16} \ldots$$

En la primera cada término es igual al que le precede multiplicado por 3, y es por lo tanto una progresion por cociente cuya *razon* es 3.

En la segunda cada término es la mitad del que le antecede, ó bien es igual al que le precede, multiplicado por la fraccion $\frac{1}{2}$, y es por consiguiente una progresion por cociente cuya *razon* es $\frac{1}{2}$.

Estas progresiones se enuncian del mismo modo que las progresiones por diferencia; así se dirá

2 *es á* 6, *es á* 18, *es á* 54, *es á* 162. . . .

y 12 *es á* 6, *es á* 3, *es á* $\frac{3}{2}$, *es á* $\frac{3}{4}$. . . . . .

Si se considera á cada progresion como una serie de proporciones continuas, resulta que cada término de la progresion es á la vez *consecuente* y *antecedente*, á escepcion del *primero* que no es mas que antecedente, y del *último* que solo es consecuente.

Las progresiones por cociente gozan de propiedades análogas á las de las por diferencia.

245. **Primera propiedad.**—*Determinacion de un término de un órden cualquiera en la progresion por cociente.*

Sea la progresion por cociente general

$$\div\!\div\ a : b : c : d : e : f : g : h \ldots.$$

y representemos por q la razon que puede ser $>$ ó $<$ 1.

Se tendrán evidentemente las igualdades que siguen:

$$\begin{aligned}
b &= aq,\\
c &= bq = aq \times q = aq^2,\\
d &= cq = aq^2 \times q = aq^3,\\
e &= dq = aq^3 \times q = aq^4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

de donde se infiere que en general *un término de un órden cualquiera es igual al primer término multiplicado por una potencia de la razon cuyo esponente sea igual al número de términos que preceden al que se quiere hallar.*

Así representando por n el número de términos comprendidos desde el primero hasta el término l se tendrá la fórmula

$$l = a \times q^{n-1},$$

con cuyo auxilio se puede hallar muy fácilmente el valor de un término cualquiera sin tener que formar los que le preceden.

Aplicaciones.—1.ª *Hallar el valor del término* 12 *de la progresion*. .... $\div\!\div\ 2 : 6 : 18 : \ldots\ldots$

La fórmula será $l = 2 + 3^{11}$.

Para hallar la potencia 11.ª de 3 se tendrá: la 4.ª potencia de 3 es $3 \times 3 \times 3 \times 3$ á 81: multiplicando 81 por 81 resulta 6561 por la 8.ª potencia de 3, y por último multiplicando 6561 por 27 (3.ª potencia de 3) se halla 177147 por la 11.ª potencia de 3.

Luego, $l = 2 \times 177147 = 354294$.

2.ª *Hallar el término* 10 *de la progresion*

$$\div\!\div\ 12 : 6 : 3 : \frac{3}{2} : \ldots\ldots\ldots$$

La fórmula en este caso es $l = 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9$.

Ahora bien, el cubo de 2 ès 8, el cubo de 8 es 512; pero el cubo de 2 no es otra cosa mas que la 9.ª potencia de 2; luego

$$l = 12 \times \frac{1}{512} = \frac{3}{128}.$$

Nota. — Si el término es de un órden muy superior, el cálculo será tambien muy complicado; pero no por eso dejará de poderse obtener el término pedido mediante multiplicaciones sucesivas. Por otra parte podremos por medio del primer ejemplo formarnos una idea de la gran rapidez con que aumentan los valores de las potencias cuando el grado de ella es algo considerable, pues ya hemos visto en la progresion $\div\!\div 2 : 6 : 18 : \ldots\ldots$ que por el término 12, que apenas es de un órden medio, se halla la cantidad 354294.

246. Consecuencia de la propiedad precedente. — *Se puede interpolar entre dos números* a *y* b *un número* m *de* medios proporcionales. (Llámanse así otros números que forman con los dados una progresion por cociente.)

Solucion. — Es evidente que para formar la progresion basta obtener la *razon*.

De la fórmula $l = aq^{n-1}$ se deduce dividiendo los dos miembros por a

$$\frac{l}{a} = q^{n-1}; \qquad \text{de donde} \qquad q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}.$$

Y como por otra parte representando n el número total de términos se tiene por precision $n = m + 2$ y por consiguiente $n - 1 = m + 1$, resulta que

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}.$$

De donde se infiere que *para hallar la razon es necesario dividir el segundo número dado por el primero y en seguida estraer del cociente una raiz de un grado igual al número de términos que se quieren interpolar mas* uno.

Conocida ya la razon, es bien fácil obtener los diferentes términos, y para ello basta multiplicar sucesivamente el primer término a por la 1.ª, por la 2.ª, por la 3.ª..... potencia de q ó de $\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$.

Así por ejemplo, el 4.° medio proporcional, que no es mas que el 5.° término de la progresion, deberá tener por valor $a\times\left(\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}\right)^4$; y así de los demás.

NOTA. — Hasta el presente no conocemos procedimiento alguno para estraer una raiz de un grado superior al 3.° Pero esto nada impide á nuestro objeto principal, que es obtener para las progresiones por cociente fórmulas análogas á las que hemos establecido para las progresiones por diferencia. Mas adelante daremos un medio mas pronto y sencillo para efectuar esta clase de operaciones.

247. Asimismo puede demostrarse, como en las progresiones por diferencia, que *si entre los términos de una progresion por cociente considerados dos á dos se interpola un mismo número de medios proporcionales, las progresiones parciales así formadas constituyen una sola y única progresion.*

Sea $\div\!\!\div a : b : c : d : \ldots\ldots$ la progresion propuesta.

La razon para la primera progresion parcial seria $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ y para la segunda $\sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}\ldots\ldots\ldots$

Pero segun hipótesis se tiene $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}\ldots\ldots$;

luego los números $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$, $\sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}\ldots\ldots$ son iguales &c.

248. SEGUNDA PROPIEDAD. — *En toda progresion por cociente el producto de dos términos cualesquiera equidistantes de los dos estremos es igual al producto de los estremos.*

DEMOSTRACION. — Sean en efecto x é y dos términos de los que el uno tenga $(p-1)$ términos antes de sí y el otro $(p-1)$ despues de sí.

El último término l es igual al término y multiplicado por q^{p-1}, y se tiene $l = y \times q^{p-1}$, por lo cual se ve que los términos a, x, y, y l forman una proporcion.... $a : x :: y : l$.

Luego (n.º 205)..... $x \times y = a \times l$.

249. Representemos finalmente por P el producto de los términos de la progresion $\div a : b : c : \ldots . i : k : l$ multiplicados entre sí, de modo que se tenga

$$P = abc \ldots ikl,$$

ó $$P = lki \ldots cba;$$

de donde $$P^2 = abc \ldots ikl \times lki \ldots cba,$$

ó bien invirtiendo el órden de los factores,

$$P^2 = al \times bk \times ci \times \ldots \ldots ic \times kb \times la;$$

pero hemos visto que $al = bk = ci \ldots$; y el número de estos productos parciales es igual á n (número de términos de la progresion propuesta); luego ya es bien fácil inferir que

$$P^2 = (al)^n,$$

y por consiguiente

$$P = \sqrt[2]{(al)^n};$$

lo cual quiere decir que *el producto de todos los términos de una progresion por cociente es igual á la raiz cuadrada de la potencia* n *del producto de los dos estremos.*

Esta fórmula corresponde á la que da la suma de los términos de una progresion por diferencia, que es esta:

$$S = \frac{(a + l)\,n}{2}.$$

Nos abstenemos de dar á conocer el medio de obtener el valor de la *espresion de la suma de los términos de una progresion por cociente*, pues es inútil para el objeto que nos proponemos, y además exige conocimientos mas superiores de Algebra que los que hasta aquí hemos establecido.

250. RELACION QUE HAY ENTRE LAS PROPIEDADES DE DOS CLASES DE

PROGRESIONES. — Recordemos los resultados anteriormente obtenidos.

Progr. por diferencia. . . . . *Prog. por cociente.*

$l = a + (n - 1)r$. . (n.º 239). . . $l = a \times q^{n-1}$. . . . . (n.º 243)

$r = \dfrac{l - a}{m + 1}$. . . . . (n.º 240). . . $q = \sqrt[m+1]{\dfrac{l}{a}}$. . . . . . . (n.º 246)

$S = \dfrac{(a + l)\, n}{2}$. . . . (n.º 243). . . $P = \sqrt{(al)^n}$. . . . . . (n.º 249).

Estas fórmulas nos ponen de manifiesto que las operaciones ejecutadas con los elementos de una progresion por cociente corresponden á operaciones mas sencillas ejecutadas con los elementos de una progresion por diferencia.

Así la *multiplicacion* corresponde á una *adicion*;

La *division* á una *sustraccion*;

La *formacion de potencias* á una simple *multiplicacion*;

Y la *estraccion de raices* á una *division.*

Guiado sin duda por estas consideraciones, el célebre inventor de los *logaritmos* ha llegado á simplificar los cálculos aritméticos (partiendo de la multiplicacion) sustituyendo las operaciones que es necesario efectuar con los términos de una progresion por cociente por otras operaciones efectuadas con los de una progresion por diferencia. Como en un tratado elemental no es dado ocuparse en todos los detalles de tan importante descubrimiento, nos limitaremos á dar á conocer los resultados mas principales.

§ II. De los Logaritmos.

251. Consideremos una progresion cualquiera *por cociente*, cuyo primer término sea igual á 1, y una *por diferencia*, cuyo primer término sea igual á 0.

Sean, por ejemplo, las dos progresiones

∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048

÷ 0 . 3 . 6 . 9 . 12 . 15 . 18 . 21 . 24 . 27 . 30 . 33

∺ 4096 : 8192 : 16384 : 32768 : . . . . (A)

. 36 . 39 . 42 . 45 . . . . (B).

Cada término de la progresion por diferencia es el *logaritmo* del término que ocupa el mismo lugar en la progresion por cociente.

En general *llámanse logaritmos ciertos números en progresion* *por diferencia que corresponden término por término á números en progresion por cociente*, con tal que uno de los términos de la progresion por cociente sea 1 y tenga 0 por término correspondiente en la progresion por diferencia (mas adelante esplicaremos esta circunstancia); y el logaritmo de un número *en particular* es el término de la progresion por diferencia *correspondiente* al lugar que ocupa en la progresion por cociente.

252. **Primera propiedad.** — Sean a y b dos términos cualesquiera tomados de la progresion (A) y propongámonos obtener su producto.

Al efecto consideremos en cuestion el *primer* término 1 de la progresion (A), dos términos a, b y un cuarto término c, de modo que haya tantos términos entre b y c como entre 1 y a, y supongamos además la progresion (A) limitada hasta el término c.

Consideremos asimismo en la progresion (B) los cuatro términos que corresponden á los números 1, a, b, c, es decir, sus *logaritmos*, que designaremos para abreviar el discurso por 0, log. a, log. b, log. c. (La notacion *log.* significa *logaritmo de.*)

Esto supuesto, resulta de la propiedad del n.º 245 que los cuatro números 1, a, b, c forman una proporcion, pues que a y b son dos términos equidistantes de los estremos en una progresion limitada hasta el término c.

Así se tiene $$1 \times c = a \times b, \text{ ó } c = a \times b.$$

Por otra parte los cuatro términos 0, log. a, log. b, log. c forman tambien una equidiferencia (n.º 239), que es

$$0 + \log.\, c = \log.\, a + \log.\, b,$$

ó simplemente $$\log.\, c = \log.\, a + \log.\, b.$$

Luego si se sustituye á c su valor $a \times b$, se tendrá

$$\log.\, (a \times b) = \log.\, a + \log.\, b.$$

Por lo cual se ve que *el logaritmo del producto de dos números de la progresion* (A) *es igual á la suma de los logaritmos de estos dos números.*

De aquí es que para obtener el producto de dos números cualesquiera de la progresion (A) *basta tomar sus logaritmos en la progresion* (B), *sumarlos entre sí y en seguida buscar el número correspondiente á esta suma*, y él será *el producto pedido.*

Así sean los dos números 64 y 256 cuyo producto se quiere obtener.

Tómense sus logaritmos 18 y 24 en la progresion (B) y súmense entre sí, lo cual da 42; y buscando el número correspondiente á 42 se tendrá 16384 por el producto pedido.

Del mismo modo se halla que 12 + 27 ó 39, suma de los logaritmos de 16 y 512, corresponde á 8192, producto de los dos números 16 y 512.

253. Consecuencia. — Sean a, b, c, d... varios números de la progresion (A): resulta de lo que ya hemos dicho que

$$\text{log. } abc = \text{log. } ab + \text{log. } c = \text{log. } a + \text{log. } b + \text{log. } 0;$$
$$\text{log. } abcd = \text{log. } abc + \text{log. } d = \text{log. } a + \text{log. } b + \text{log. } c + \text{log. } c;$$

y así sucesivamente.

Luego en general *el logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores de este producto.*

Así pues, para obtener el producto de varios números de la progresion (A) bastará *sumar sus logarítmos tomados en la progresion* (B), *buscar el número á que corresponde la suma*, y él será el *producto pedido.*

254. Observacion. — Las dos igualdades $c = a \times b$ y log. $c =$ log. $a +$ log. b, de las cuales hemos deducido la propiedad que precede, suponen evidentemente que el primer término de la progresion (A) es igual á 1 y que el primero de la progresion (B) es igual á 0.

Veamos, pues, lo qúe tendria lugar si los primeros términos fuesen números cualesquiera, k para el primero y log. k para el segundo.

Resultaria en virtud de lo que hemos dicho (n.° 252),

1.° Para la progresion (A)............ $k \times c = a \times b$,

de donde.......................... $c = \dfrac{a \times b}{k}$;

2.° Para la progresion (B).... log. $k +$ log. $c =$ log. $a +$ log. b,
de donde.................. log. $c =$ log. $a +$ log. $b -$ log. k;

es decir, que *la suma de los logarîtmos de dos números* a *y* b *de la progresion* (A) *disminuida del primer término de la progresion* (B) *seria igual al logaritmo del cociente de la division del producto de los dos números* a *y* b *por el primer término de la progresion* (A).

Así para aplicar esta propiedad seria necesario, 1.° hacer la suma de los logaritmos; 2.° sustraer de esta suma el primer término de la progresion (B) y buscar á qué número de progresion (A) corresponderia la diferencia; y 3.° multiplicar el número correspondiente por el primer término de la progresion (A): el resultado seria *el producto pedido.*

Seria necesario por lo tanto hacer *una adicion*, *una sustraccion* y *una multiplicacion* para obtener solo el producto.

En la hipótesis de ser los primeros términos iguales á 1 y á 0, le multiplicacion y sustraccion no tienen lugar; esta hipótesis como ya hemos dicho (n.° 251) es absolutamente indispensable, pues que da ella parte todo el cálculo logarítmico.

255. Segunda propiedad. — Supuesto que en la division el dividendo puede ser considerado como un producto cuyos factores son el divisor y el cociente, resulta que el logaritmo del dividendo debe ser igual á la suma de los logaritmos respectivos del divisor y del cociente; de modo que sustrayendo el logaritmo del divisor de el del dividendo se obtenga el logaritmo del cociente.

Luego *el logaritmo del cociente de la division de dos números de la progresion* (A) *es igual al esceso del logaritmo del dividendo sobre el del divisor.*

De aquí es que para efectuar una division con dos números pertenecientes á la progresion (A) *basta tomar en la progresion* (B) *el logaritmo del dividendo y el del divisor, sustraer el segundo del primero, y buscar en la progresion* (A) *el número correspondiente á esta diferencia*; y él será el *cociente pedido.*

Propongámonos dividir 16384 *por* 256.

Tómense en la progresion (B) los logaritmos 42 y 24 de estos dos números, sustraígase 24 de 42, lo cual da 18; y buscando ahora el número correspondiente á la diferencia 18, se tendrá 64 por el cociente de la division de 16384 por 256.

Esta propiedad se enuncia aritmética y algebráicamente de un modo abreviado, y es: $\log. \frac{a}{b} = \log. a - \log. b.$

256. Tercera propiedad. — Siendo la potencia de un grado cualquiera de un número (n.º 108, 7.º) el producto de tantos factores iguales á este número como unidades contiene el *esponente* de la potencia, resulta evidentemente (n.º 253) que *el logaritmo de una potencia de cualquier grado, de un número de la progresion* (A), *es igual al logaritmo del número multiplicado por el esponente de la potencia.*

Así $\log. a^5$, ó $\log. a.a.a.a.a = 5 \log. a$;
$\log. a^7 = 7 \log. a$;
y en general, $\log. a^m = m \times \log. a$.

Luego para obtener el resultado de la formacion de una potencia de un número de la progresion (A) *basta tomar en la progresion* (B) *el logaritmo de este número; multiplicarlo por el esponente de la potencia; buscar el número correspondiente á este producto en la progresion* (A); y él será *la potencia pedida.*

Por ejemplo, para *elevar* 32 *á la* 3.ª *potencia* no habrá mas que tomar su logaritmo 15, y multiplicarlo por 3, lo cual da 45; y buscando á qué número corresponde este producto, se tendrá 32768 por la potencia 5.ª de 32.

257. Cuarta y ultima propiedad. — Se sabe que dos números, tales como a y a^m, estan ligados entre sí de modo que siendo a^m la

potencia m del primero, se tiene por reciprocidad que a es la *raiz* m de a^m.

Pero hemos visto. . . . . $\log. a^m = m \log. a$;

luego dividiendo por m resultará. . . . . . $\log. a = \dfrac{\log. a^m}{m}$;

es decir, que *el logaritmo de una raiz* de un grado cualquiera *de un número es igual al logaritmo de este número dividido por el índice de la raiz que se quiere estraer*; lo cual se espresa así:

$$\log. \sqrt[m]{b} = \frac{\log. b}{m}.$$

Por consiguiente para estraer la raiz m de un número de la progresion (A) *bastará tomar su logaritmo en la progresion* (B), *dividirlo por* m *y buscar el número correspondiente al cociente en la progresion* (A); y él será la *raiz pedida.*

Así pues, *para estraer la raiz* 3.ª de 32768, se tomará su logaritmo 45 y se le dividirá por 3, lo cual da 15; y buscando su número correspondiente, se tendrá 32 por la *raiz pedida.*

Así tambien, *para estraer su raiz* 5.ª tomaremos 45 su logaritmo y le dividiremos por 5, lo cual da 9; y el número correspondiente á 9 en la progresion (A), que es 8, será la raiz 5.ª de 32768.

CONSTRUCCION DE LAS TABLAS DE LOGARITMOS.

258. Las consideraciones que preceden bastan para concebir cuál deberá ser la utilidad *de una tabla de logaritmos*, esto es, de una tabla que por una parte contenga una serie de números en progresion por cociente y por otra sus logaritmos ó números en progresion por diferencia (ambas progresiones debiendo satisfacer la condicion enunciada en el n.º 251).

Como por otra parte hemos visto que todas las operaciones con números de una naturaleza cualquiera se reducen siempre á operaciones efectuadas con números enteros, resulta que para la simplificacion de los cálculos bastaria que la tabla contuviese los logaritmos de los números enteros. He aquí cómo se ha conseguido formar una tabla de esta especie.

Entre todos los sistemas, *en número infinito*, de dos progresiones, una por cociente y otra por diferencia que pudieran tomarse, se ha elejido la progresion décupla

$$\div\!\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 \ldots\ldots,$$

y la serie natural de los números

$$\div 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Esto supuesto, concibamos que entre los números 1 y 10, 10 y 100, 100 y 1000. . . . ., se interpole (n.º 246) cierto número de *medios proporcionales* (que sea el mismo para cada décuplo), pero bastante grande para que podamos estar seguros de que 2, 3, 4... 9 | 11, 12, 13.. 99 | 101, 102... 999 se hallen comprendidos entre estos medios proporcionales, ó al menos que difieran de algunos de ellos en una cantidad tan pequeña que puedan sustituírseles, sin error sensible, á estos medios proporcionales.

Concibamos en seguida que entre los términos 0 y 1, 1 y 2, 2 y 3, 3 y 4... de la progresion por diferencia se interpolen *tantos* medios diferenciales como medios proporcionales se hayan interpolado; y en tal caso es bien claro, segun lo que ya hemos dicho, que los términos de la nueva progresion por diferencia deben ser los logaritmos de los términos de la nueva progresion por cociente.

Supongamos, pues, ahora que del número inmenso de los términos de las dos progresiones no se tomen en cuenta mas que los números enteros 1, 2, 3, 4... 9, 10, 11, 12... que pertenecen á la progresion por cociente, y sus correspondientes logaritmos: de este modo se obtendrá una tabla que contendrá

Por una parte, todos los números enteros consecutivos que ciertamente no formarán una progresion por cociente; mas no dejarán por esto de poder ser considerados como términos de una progresion de esta especie;

Por otra parte, sus logaritmos que si bien no forman una progresion por diferencia, al menos podrán ser considerados como términos de una progresion de esta especie, ocupando respectivamente los mismos lugares que los que ocupan en la progresion por cociente los números de estas dos series.

Así pues, las propiedades relativas á las diversas operaciones aritméticas son aplicables á todos los números de esta tabla y á sus logaritmos.

Nota. — A primera vista parece difícil comprender cómo se ha podido interpolar entre dos números dados, 1 y 10 por ejemplo, un crecido número de medios proporcionales, pues para interpolar solamente *dos* seria necesario (n.º 246), segun la fórmula $q=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$ que da el valor de la razon, estraer con un subido grado de aproximacion la raiz 3.ª de $\frac{10}{1}$ ó de 10 (operacion que sabemos es muy complicada). Y si el cálculo es tan complicado para interpolar solos *dos* medios, ¿qué no será para interpolar 10 000000, como indican los *tratados* de Aritmética? Pero nuestro objeto por ahora solo se reduce á dar á conocer la posibilidad de la existencia de una tabla de logaritmos; y solo en los estudios mas superiores de Matemáticas es donde se hace uso de los procedimientos de determinacion mas espeditivos.

259. He aquí un procedimiento elemental bastante fácil de comprender, puesto que solo se reduce á estracciones sucesivas de raices cuadradas.

Supongamos que se quiera *determinar el logaritmo de* 5.

Como 5 está comprendido entre 1 y 10, interpolaremos *un solo medio proporcional* entre 1 y 10, mas *un medio diferencial* entre 0 y 1.

Se tiene (n.º 207) $\div\!\div\ 1 : x :: x : 10;$

de donde $x = \sqrt{10} = 3{,}16227766\ldots;$

y (n.º 203) $\div\ 0 \,.\, y : y \,.\, 1,$

y de aquí $y = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

Esto supuesto, $\frac{1}{2}$ ó 0,5 será evidentemente el logaritmo de $\sqrt{10}$, resultado que está conforme con la propiedad del n.º 257, puesto que se tiene $\log.\ \sqrt{10} = \frac{1}{2}\log.\ 10 = \frac{1}{2}.$

Ahora, como 5 es mayor que 3,162.... y menor que 10, interpolaremos un *nuevo medio proporcional* entre 3,1622.... y 10, mas un *medio diferencial* entre $\frac{1}{2}$ y 1;

resulta $\div\!\div\ 3{,}16227766\ldots : x :: x : 10;$

de donde $x = \sqrt{31{,}622776\ldots} = 5{,}623\ldots;$

y $\div\ \frac{1}{2} \,.\, y : y \,.\, 1;$

de donde $y = \frac{3}{4} = 0{,}75.$

El nuevo medio diferencial es el logaritmo del nuevo medio proporcional.

Hallando el número 5 comprendido entre 3,162.... y 5,623.... será necesario interpolar un medio proporcional entre 3,162...... y 5623...., mas un medio diferencial entre 0,5 y 0,75.

Y como es evidente que continuando esta serie de interpolaciones de medios proporcionales se llegará á determinar dos que no difieran uno de otro sino en una cantidad tan pequeña como se quiera y que comprenderán en sí al número 5; resulta que se podrá sin cometer error sensible sustituir 5 á uno de los medios proporcionales, y correspondiendo el medio diferencial al proporcional, él será el logaritmo pedido.

Operaciones análogas á la que acabamos de efectuar darán los logaritmos de 2, 3, 7....

Observemos por otra parte que calculando así el logaritmo de cada número entero, basta determinar directamente los logaritmos de los *números primos*, y por lo que respecta á los logaritmos de los números múltiplos se obtendrán por medio de los números primos, haciendo uso de las propiedades de los n.os 252 y 256.

Por ejemplo, se tendria $\log. 15 = \log. (5 \times 3) = \log. 5 + \log. 3$; $\log. 36 = \log. (2^2 \times 3^2) = \log. 2 + 2 \log. 3$; y así sucesivamente.

DISPOSICION Y USO DE LAS TABLAS VULGARES.

260. Llámanse *logaritmos vulgares* aquellos cuya formacion está fundada sobre el sistema de las dos progresiones

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\because} 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 \ldots \\ \div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots\ldots \end{array}\right\},$$

porque son las que frecuentemente se usan. Llámaseles tambien *logaritmos de Briggs* por el nombre del primer autor de una tabla de esta especie.

Resulta de la inspeccion de las dos progresiones,

1.º *Que el logaritmo de la* UNIDAD *es* CERO;

2.º *Que el logaritmo de* 10 *es* 1;

3.º Que los logaritmos de todos los números enteros ó fraccionarios comprendidos entre 1 y 10 son *menores que la unidad*; que aquellos números que estan comprendidos entre 10 y 100 se componen de *una unidad y de cierta fraccion*, y que los comprendidos entre 100 y 1000 se componen de *dos unidades y cierta fraccion*, y así sucesivamente.

En las tablas de Briggs estas fracciones estan valuadas en decimales.

Así los logaritmos de los números de una *sola* cifra estan representados por una *fraccion decimal* propiamente tal; y los de los números de *dos* cifras tienen 1 por *parte entera*, la cual está seguida de una fraccion decimal.

Los logaritmos de los números de *tres* cifras tienen 2 por parte entera.

Y en general *la parte entera* del logaritmo de un número contiene *tantas* unidades menos UNA como cifras tiene el número si es entero, ó su parte entera si es una fraccion.

La parte entera de un logaritmo se llama *característica*, pues que por su sola inspeccion se puede conjeturar cuál es el mayor órden de unidades que se hallan comprendidas en el número correspondiente al logaritmo propuesto.

Así 2,74056.... corresponde á un número de *tres* cifras, es decir, á un número comprendido entre 100 y 1000: del mismo modo 4,05678.... es el logaritmo de un número comprendido entre 10000 y 100000.

261. Conociendo el logaritmo de un número cualquiera es fácil conocer el de un número 10, 100, 1000 veces mayor; para lo cual basta *añadir* 1, 2, 3.... *unidades á la característica.*

Sea en efecto a un número cuyo logaritmo es ya conocido; se tiene (n.º 252)

$$\begin{aligned}\log.(a\times 10) &= \log. a + \log. 10 = \log. a + 1,\\ \log.(a\times 100) &= \log. a + \log. 100 = \log. a + 2,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \log.(a\times 10^n) &= \log. a + \log. 10^n = \log. a + n.\end{aligned}$$

Y *recíprocamente*, conociendo el logaritmo de un número para obtener el de un número 10, 100, 1000... veces menor basta *sustraer de la característica* 1, 2, 3.... *unidades.*

En efecto, se tiene (n.º 255)

$$\log. \frac{a}{1000} = \log. a = \log. 1000 = \log. a - 3, \text{ y así de otros.}$$

De aquí puede inferirse que los logaritmos de los números 4567 | 456,7 | 45,67 | 4,567, por ejemplo, no difieren unos de otros en la parte decimal, y sí solo en la característica, que es 3 para el primer número, 2 para el segundo, 1 para el tercero y 0 para el cuarto.

En general *el logaritmo de un número fraccionario decimal es el mismo* CON LA DIFERENCIA DE LA CARACTERISTICA *que el logaritmo de su numerador ó del número propuesto en el cual deberá hacerse abstraccion de la coma*: en cuanto á la parte decimal no hay diferencia alguna.

Conviene observar que esta propiedad es del todo particular al sistema de logaritmos de Briggs, y por esta razon deberá preferírsele á otro cualquiera, pues que las fracciones decimales son sobre las que con mas frecuencia se opera.

262. Es imposible poner en las tablas otros logaritmos que los de los números enteros, puesto que conteniendo una serie de estos una crecida porcion de números fraccionarios, no hay razon alguna para preferir unos á otros. Además que los cálculos necesarios para la formacion de una tabla serian bastante complicados para que pudiera hacérsela pasar mas allá de un cierto límite, aun siendo este muy corto.

Así hay tablas que no contienen mas logaritmos que hasta 10000, otras hasta 20000 y una de las mas estensas que son las de *Callet* hasta 108000.

Sin embargo, las aplicaciones logarítmicas exigen muchas veces la investigacion del logaritmo de un número que esceda los límites de las tablas, ó de un número fraccionario; y el modo de hallarlo es lo que ahora vamos á esplicar. (Supondremos en todo cuanto sigue que no se tenga á la vista sino las pequeñas tablas de Mr. *Reynaud* ó de *Lalande*).

263. DADO UN NUMERO CUALQUIERA HALLAR SU LOGARITMO.

1.º *Hallar el logaritmo de* 254329.

Teniendo este número *seis* cifras, la característica de su logaritme debe ser 5 (n.º 260), y por consiguiente la cuestion queda reducida á hallar la parte decimal.

Resulta de lo que hemos dicho (n.º 261) que esta parte decimal es la misma que la de log. 2543, 29.

Mediante esta trasformacion, que consiste en *separar hácia la derecha un número suficiente de cifras para que la parte izquierda se halle en la tabla*, se obtiene un número comprendido entre 2545 y 2544; así su logaritmo es igual al de 2543, *mas* una parte de la diferencia que hay entre *log.* 2544 y *log.* 2543.

En la tabla se halla.... *log.* $2543 = 3{,}40535$: resulta igualmente 17 por diferencia entre log. 2544 y log. 2543: esta diferencia 17 espresa unidades del órden de la 5.ª cifra decimal ó de las 100000.as

Esto supuesto, á fin de obtener la parte de esta diferencia que es necesario añadir á log. 2543 para tener el de 2543,29, se establecerá esta proporcion:

Si para una unidad de diferencia entre 2544 y 2543 *se tiene* 17 DIEZMILESIMAS *de diferencia entre sus logaritmos, ¿por* 0,29 *de diferencia entre* 2543,29 y 2543 *qué diferencia se tendrá entre sus logaritmos?*

$$\text{O bien } 1 : 17 :: 0{,}29 : x, \text{ de donde } x = 17 \times 0{,}29 = 4{,}93;$$

y este cuarto término es lo que deberá añadirse al logaritmo 3,40535 para tener el que se ha pedido.

Como no se debe tener en cuenta mas que la parte izquierda de la coma, en este cuarto término se añadirá 4 ó todo lo mas 5 (porque la primera cifra de la derecha de la coma es mayor que 5) á la cifra de las *cienmilésimas* ó á la última cifra de 3,40535; y tendremos

$$\text{log. } 2543{,}29 = 3{,}40540; \text{ luego log. } 254329 = 5{,}40540.$$

En la práctica se dispone el cálculo de este modo:

$$\text{log. } 254329 = \text{log. } 2543{,}29 + 2$$

$$\text{log. } 2543 = 3{,}40535$$

Dif. tabular.... 17

$1 : 17 :: 9{,}29 : x = 4{,}93$.............. = 5

Luego log. 2543,29 = 3,49540,

y por consiguiente............ log. 254329 = 5,40540.

2.° *Hallar el logaritmo de* 1784967.

Se tendrá............. log. 1784967 = log. 1784,967 + 3

$$\text{log. } 1784 = 3{,}25139$$

Dif. tabular.... 25

$1 : 25 :: 0{,}967 : x = 24{,}175$.......... = 24

Luego log. 1784,967 = 3,25163,

y por consiguiente.......... log. 1784967 = 6,25163.

264. Nota.— Para resolver las dos cuestiones precedentes hemos establecido una *proporcion entre las diferencias de los números y las de los logaritmos*. En Algebra se demuestra que esta proporcion nunca es rigorosamente exacta; pero cuanto mayores son los números para que se establece, tanto mas se aproxima al valor exacto, y haciendo uso de las tablas pequeñas, el error cometido no influye sobre la 5.ª cifra decimal siempre que el número pase de 1000; de modo que en este caso la proporcion puede considerarse como del todo exacta; y esta es la razon porque cuando un número escede los límites de las tablas, se le deben separar las menos cifras posibles.

3.° *Hallar el logaritmo de* $37\frac{43}{59}$.

Este número equivale á $\frac{2226}{59}$; luego (n.° 255)

$$\text{log. } 37\frac{43}{59} = \text{log. } 2226 - \text{log. } 59.$$

Haciendo uso de las tablas se halla log. 2226 = 3,34753
log. 59 = 1,77085

y efectuando la sustraccion log. $37\frac{43}{59}$ 1,57668.

En cuanto al logaritmo de un número fraccionario decimal, tal como 479,2564, se ha visto ya (n.° 261) que no hay mas que hallar el logaritmo de 4792564 como acabamos de decir, y sustraer 4 unidades á la característica; ó bien se puede decir:

$$\log. 479{,}2564 = \log. 4792{,}564 - 1$$

log. 4792 = 3,68052
Dif. tabular. 9
1 : 9 :: 0,564 : x = 5,076. . . . . = 5

de donde. . . . . log. 4792,554 = 3,68057.
Luego log. 479,2564 = 2,68057.

Véase al fin de este capítulo (n.° 273) lo que decimos acerca de *los logaritmos de las fracciones propiamente tales.*

265. Dado un logaritmo hallar su numero correspondiente.

Cuando en el cálculo se hace uso de los logaritmos se llega por lo regular á un resultado que espresa el logaritmo *del número pedido*, en cuyo caso es necesario determinar el número á que corresponde.

1.° Consideremos el caso en que la característica es 3, ó mayor que la de las tablas pequeñas.

Hallar el número correspondiente al logaritmo 3,45936.

Búsquese entre los números de cuatro cifras, y se hallará estar comprendido entre 3,45924 y 3,45939, que son los logaritmos de 2879 y 2880: luego el número que se busca es igual á 2879 *mas* cierta fraccion.

Para obtener esta fraccion tómese la diferencia tabular 15 y la diferencia 12 entre el logaritmo dado y el de 2879, y fórmese esta proporcion:

Si para 15 cienmilesimas *de diferencia entre log.* 2880 *y log.* 2879 *se tiene una unidad de diferencia entre estos números, ¿para* 12 cienmilesimas *de diferencia entre el logaritmo dado y el de* 2879 *qué diferencia deberá tenerse entre sus números correspondientes?*

O bien 15 : 1 :: 12 : x; de donde $x = \frac{12}{15} = 0{,}8$.

Añadiendo este 4.° término á 2879 se obtiene 2879,8 por el número pedido.

He aquí la tabla de los cálculos:

Llamando N al número pedido se tiene log. N = 3,45946
Se halla en la tabla. . . . . log. 2879 = 3,45924

Dif. 12
Dif. tabular. 15

15 : 1 :: 12 : x = 0,8

Luego N = 2879,8.

266. NOTA.—El valor obtenido para N en el ejemplo precedente ha sido hallado, antes de la reduccion 1 decimales, igual á $2879+\frac{12}{15}$ suponiendo exacta la proporcion, hipótesis que en este caso puede ser admitida (n.º 264), pues que la sola inspeccion de la tabla de logaritmos basta para reconocer qué incrementos constantes é iguales á 1 hechos sobre los números corresponden (respectivamente á esta parte de la tabla) á incrementos constantes é iguales á 15 unidades (del órden de las CIENMILESIMAS) hechos sobre los logaritmos correspondientes, ó lo que es lo mismo, que *una unidad* (del órden de las *cienmilésimas*) del incremento hecho sobre los logaritmos corresponde á $\frac{1}{15}$ de incremento hecho sobre los números.

En seguida, en lugar de dejar al 4.º término de la proporcion $\left(\text{ó á la fraccion } \frac{12}{15}\right)$ bajo su primitiva forma, la hemos reducido á decimales, que es lo que frecuentemente se practica para mayor sencillez en el cálculo, y hemos hallado 0,8 por el valor exacto de $\frac{12}{15}$. Así pues, conviene observar que si la reduccion no hubiese sido valuada exactamente en *décimas*, no hubiera sido menos necesario limitar la operacion á la *primera* cifra decimal: lo cual vamos á demostrar inmediatamente.

Conteniendo cada 15.ª tantas 100.as como veces contiene 100 á 15, resulta que aun cuando se sepa cuántas 15.as contiene un número (próximamente *una*), no por eso se puede saber cuántas 100.as, 1000.as, 10000.as, contiene este mismo número; cuando por el contrario puede fácilmente deducirse el número de 10.as (próximamente *una*) del de las 15.as pues que $\frac{1}{10}$ siendo mayor que $\frac{1}{15}$, cada 15.ª de incremento no puede hacer crecer á la vez el número de varias 10.as

Generalizado este razonamiento, da lugar á la siguiente regla, que es aplicable á todos los casos en que al buscar un número por medio de su logaritmo es necesario hacer uso de la proporcion para determinarle: *el número de cifras decimales*, que es lícito calcular para el cuarto término, *debe ser siempre inferior*, *al menos en una unidad*, *al número de cifras que componen la diferencia tabular*, *disminuido en una unidad.* Esta regla es general, cualquiera que sea la tabla que usemos: así las tablas de *Callet* dan la cifra de las 100.as siempre que la diferencia tabular pase de 100, y solo la de las 10.as en los casos contrarios: las de *Lalande* no dan con exactitud la cifra de las 10.as siempre que la diferencia es menor que 10. (Por lo demás, si se quieren mas amplios pormenores, véase el Algebra.)

2.° *Hallar el número correspondiente al logaritmo* 1,56834.

Convendria principiar la operacion buscando este logaritmo entre los de los números de dos cifras; pero como es probable no hallarlo, será mejor añadir 2 á la característica, lo cual da 3,56834; y buscando el número correspondiente al nuevo logaritmo se tendrá 3,56834 = log. 3701,2; y como al añadir 2 á la característica se ha multiplicado (n.° 264) el número pedido por 100, será necesario dividir á 3701,2 por 100, lo cual da por último 37,012 por el *número pedido*, próximamente 0,001.

Propongámonos ahora el número correspondiente á 0,86874.

Se tendrá.... 3,86784 = log. 7376,3;
luego........... 0,86784 = log. 7,3763, próximamente 0,0001.

Sea propuesto por último hallar el número correspondiente á 5,47659.

Restando dos unidades á la característica resulta

$$3,47659 = \log.\ 2996,3;$$

y como al quitar 2 unidades á la característica se ha dividido al número por 100, será necesario multiplicar 2996 por 100, y se tendrá 299630 por el *número pedido*, *próximamente una decena*.

Las tablas pequeñas no pueden dar un grado mayor de aproximacion. Si la característica fuese mayor que 5, el grado de aproximacion seria aun mucho menor, y por consiguiente conviene usar tablas bastante estensas, tales como las de *Callet*, cuando el cálculo que se está efectuando exige mucha exactitud.

APLICACIONES DE LA TEORIA DE LOS LOGARITMOS.

Veamos ahora las diversas aplicaciones que pueden hacerse de las tablas de logaritmos á las operaciones de la Aritmética.

267. Regla de tres.—*Hallar por logaritmos el* 4.° *término de la proporcion* $a : b :: c : x$.

Con arreglo á lo establecido en el n.° 206 tendremos $x = \frac{b \times c}{a}$; y tomando los logaritmos y aplicando las propiedades de los n.os 252 y 255,

$$\log.\ x = \log.\ b + \log.\ c - \log.\ a.$$

Hecha la suma de los logaritmos de los dos medios, se restará de *ella el logaritmo del estremo conocido*; *se buscará el número correspondiente á la diferencia*, y él será el *número pedido*.

Sea, por ejemplo, *la proporcion* $37 : 259 :: 497 : x$;

Se tiene

$$\log. x = \log. 259 + \log. 497 - \log. 37.$$

$$\begin{array}{rcl} \log. 259 & = & 2,41330 \\ \log. 497 & = & 2,69636 \\ \hline & & 5,10966 \\ \log. 37 & = & 1,56820 \\ \hline \end{array}$$

Luego $\log. x = 3,54146$,

y por consiguiente $x = 3479,1$, próximamente 0,1.

Segundo ejemplo.—Hallar *por logaritmos* el valor de la espresion

$$x = \frac{37 \times 49 \times 17 \times 175}{29 \times 69 \times 154}.$$

(Esta espresion puede ser considerada como el término incógnito de una *regla de tres compuesta*.)

Tomando los logaritmos de los dos números tendremos

$$l.\, x = l.\, 37 + l.\, 49 + l.\, 17 + l.\, 175 - 129 - l.\, 69 - l.\, 154.$$

Pero

$$\begin{array}{rcl} l.\, 37 & = & 1,56820 \\ l.\, 49 & = & 1,69020 \\ l.\, 17 & = & 1,23045 \\ l.\, 175 & = & 2,24304 \\ \hline & & 6,73189 \\ & & -5,48877 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} l.\, 29 & = & 1,46240 \\ l.\, 69 & = & 1,83885 \\ l.\, 154 & = & 2,18752 \\ \hline & & 5,48877. \end{array}$$

Luego $\log. x = 1,24312$;

de donde $x = 17,503$, próximamente 0,001.

268. Complementos aritméticos.—En el ejemplo anterior ha sido necesario sustraer de varios logaritmos la suma de muchos otros; pero es fácil reemplazar las *dos adiciones* y la *sustraccion* efectuadas para hallar el resultado *por una sola adicion*, empleando los complementos aritméticos.

Llámase *complemento aritmético* de un logaritmo lo que es necesario añadir á este logaritmo para tener 10 unidades, ó en otros términos, *el resultado que se obtiene sustrayendo este logaritmo de* 10.

Así *compl. arit.* $4,50364 = 10 - 4,50364$: para hallar este complemento bastará segun el procedimiento de la sustraccion restar cada cifra de 9, excepto la última cifra significativa de la derecha, que deberá ser restada de 10: operando de este modo se tiene

$$compl.\ arit.\ 4,50364 = 5,49636.$$

Del mismo modo $compl.\ arit.\ 7,32568 = 2,67432.$

Resulta de aquí que la sola inspeccion de los logaritmos basta para hallar sus complementos.

NOTA.—Si la última cifra de la derecha del logaritmo fuese 0, seria necesario restar de 10 la primera cifra significativa de la izquierda de este 0, y de 9 todas las demás cifras tambien de la izquierda.

Así $compl.\ arit.\ 5,32570 = 4,67430.$

Del mismo modo $compl.\ arit.\ 8,62400 = 1,37600.$

Esto supuesto, propongámonos sustraer de la suma de los cuatro logaritmos L, L′, L″, L‴ la suma de estos otros tres l, l′, l″. Representemos por D la diferencia, y se tendrá

$$D \ldots\ldots 6 \ldots\ldots L + L' + L'' + L''' - (l + l' + l'') =$$

$$= L + L' + L'' + L''' + 10 - l + 10 - l' + 10 - l'' - 30,$$

ó lo que es lo mismo,

$$= L + L' + L'' + L''' + comp.\ l + comp.\ l' + comp.\ l'' - 30;$$

de donde se deduce esta regla general:

Tómense los complementos aritméticos de los logaritmos sustractivos, hágase la suma total de estos complementos y la de los logaritmos aditivos, y sustráigase de la característica tantas veces 10 *ó tantas decenas como complementos se hayan tomado*; y el resultado obtenido será *la diferencia pedida.*

Recordemos el último ejemplo del n.º precedente.

Se tiene $l.\ x = l.\ 37 + l.\ 49 + l.\ 17 + l.\ 175 - (l.\ 29 + l.\ 69 + l.\ 154)$;

$$\begin{array}{rrcl}
 & l.\ 37 & = & 1,56820 \\
 & l.\ 49 & = & 1,69020 \\
 & l.\ 17 & = & 1,23045 \\
 & l.\ 175 & = & 2,24304 \\
Comp. & l.\ 29 & = & 8,53760 \\
Comp. & l.\ 69 & = & 8,16115 \\
Comp. & l.\ 154 & = & 7,81248 \\
\hline
 & & & 31,24312.
\end{array}$$

Siendo el resultado de esta adicion 31,24312, restando de él 3 *decenas* se tendrá 1,24312 por la diferencia pedida: este es en efecto el mismo resultado que el obtenido (n.º 267).

El uso de los complementos aritméticos abrevia mucho el cálculo logarítmico.

269. PROGRESIONES POR COCIENTE.—*Interpolar entre dos números dados* a *y* b *un número* m *de medios proporcionales.*

La fórmula $q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ obtenida en el n.º 246 se reduce calculándolo logarítmicamente á esta espresion

$$\log. q = \frac{\log. b - \log. a}{m+1}.$$

Supongamos, por ejemplo, que *se quiera interpolar entre* 3 *y* 4, 25 *medios proporcionales.*

Se tendrá, $a = 3$, $b = 4$, $m = 25$,

y aplicando valores, $\log. q = \frac{\log. 4 - \log. 3}{26}.$

En las tablas se halla ... $\log. 4 = 0{,}60206$
$\log. 3 = 0{,}47712;$

de donde $\log. 4 - \log. 3 = 0{,}12494$

y dividiendo por 26, $\log. q = 0{,}00480.$

Buscando el número correspondiente á este logaritmo resulta $q = 1{,}0111$, próximamente 0,0001.

Si se quisiera *obtener el* 10.º *medio proporcional ó el* 11.º *término de esta progresion,* tendríamos (n.º 246), llamando x á este medio proporcional,

$$x = 3\left(\sqrt[26]{\frac{4}{3}}\right)^{10};$$

de donde calculando por logaritmos,

$$\log. x = \log. 3 + \frac{10\,(\log. 4 - \log. 3)}{26}.$$

Pero ya hemos visto que.. $\log. 4 - \log. 3 = 0{,}12494$
de donde.................. $10\,(\log. 4 - \log. 3) = 1{,}24940$

y........................ $\frac{10}{26}(\log. 4 - \log. 3) = 0{,}04805$;
por otra parte se tiene....... $\log. 3 = 0{,}47712$

luego finalmente............ $\log. x = 0{,}52517$.

Buscando el número correspondiente á este logaritmo se halla 3,3510 por el medio proporcional pedido.

Las reglas de *interés* y de *descuento compuestos* se reducen á la determinacion de un término de un órden cualquiera en una progresion por cociente.

270. Interes compuesto.—*Dada una suma* a *por* n *años ó meses al tanto de* i *p % anual ó mensual, hallar en lo que deberá convertirse esta suma al cabo del tiempo* n, *teniendo en cuenta no solo el capital* a *y los intereses sobre él acumulados, sino tambien los intereses de estos intereses durante este mismo tiempo.*

Analisis.—Puesto que 100 fr. rinden una suma i en un año, es claro (n.os 221 y 222) que a rendirá $\frac{a \times i}{100}$: así el capital a al cabo de un año, incluso él, se convertirá en

$$a + \frac{a \times i}{100},\ \text{ó bien}\ a\left(1 + \frac{i}{100}\right).$$

Esta nueva suma que se compone del capital primitivo y de su interés durante el primer año, puede ser considerado como un nuevo capital puesto á premio en el segundo año, que representándolo por a' se tendrá al cabo de este segundo año, incluso él,

$$a' \quad 1 + \frac{i}{100}\ ,\ \text{ó bien poniendo en vez de } a' \text{ su valor,}$$

$$a\left(1 + \frac{i}{100}\right)\left(1 + \frac{i}{100}\right) = a\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2.$$

Representando por a'' este nuevo capital se tendrá por la suma de este capital y su interés durante el tercer año,

$$a''\left(1+\frac{i}{100}\right),$$ ó bien sustituyendo á a'' por su valor,

$$a\left(1+\frac{i}{100}\right)^2\left(1+\frac{i}{100}\right)=a\left(1+\frac{i}{100}\right)^3.$$

Luego en general representando por n el número de años durante el cual el capital a ha sido dado á premio y por A en lo que se convierte el capital, se tendrá

$$A=a\left(1+\frac{i}{100}\right)^n=a\left(\frac{100+i}{100}\right)^n.$$

Primer ejemplo.—*Hallar en interés compuesto cuál será el valor de* 12000 fr. *dados por* 6 *años al* 5 *p* % *anual.*

En este caso como $a = 12000$, $i = 5$, $n = 6$, se tendrá

$$A = 12000\left(\frac{100+5}{100}\right)^6 = 12000\,(1{,}05)^6.$$

Como esta operacion seria muy complicada efectuándola directamente, aplicaremos á ella los logaritmos, y resultará

$$\log. A = \log. 12000 + 6 \log. 1{,}05$$

Pero segun las tablas se tiene . . . . $\log.\ 1{,}05 = 0{,}02119$;

de donde . . . . $6, \log.\ 1{,}05 = 0{,}12714$;

y por otra parte . . . . $\log.\ 12000 = 4{,}07918$;

luego . . . . $\log.\ A = 4{,}20632$,

y por consiguiente . . . . $A = 16081$ fr.

Las tablas pequeñas no dan mayor grado de aproximacion.

Nota.—En este ejemplo, la suma del capital, de los intereses y de los intereses de los intereses acumulados asciende á 16081 francos; y si por otra parte se busca (n.° 221) *el interés simple* de 12000 fr.

al 5 p % anual, se halla $\frac{3600}{481}$, y restando esta de 16081 resulta una diferencia, que espresa el valor de los intereses de los intereses.

SEGUNDO EJEMPLO. — *¿Cuál es el valor en interés compuesto de* 5628 *francos dados por* 9 ½ *meses al* ¾ *ó* 0, fr. 75 cs. p % mensual?

Principiemos por determinar el valor del capital al cabo de los 9 meses.

Como en este caso se toma el mes por unidad de tiempo, se pondrá en la fórmula general, $a = 5628$, $i = 0{,}75$, $n = 9$, lo cual da

$$A = 5628\left(\frac{100 + 0{,}75}{100}\right)^9 = 5628\,(1{,}0075)^9.$$

de donde aplicando los logaritmos,

$$\log. A = \log. 5628 + 9 \log. 1{,}0075.$$

Se halla en la tabla.............. log. 1,0075 = 0,00324;

y de aquí........................... 9 log. 1,0075 = 0,02916;
pero por otra parte se tiene.......... log. 5628 = 3,75035;

luego............................... log. A = 3,77981
y por consiguiente....... A 6019 fr.

Para hallar inmediatamente el interés de 6019 fr. durante *quince* dias ó $\frac{1}{2}$ mes nos valdremos de la fórmula $\frac{ait}{100}$ (n.º 221), en la cual haremos $a = 6019$, $i = 0{,}75$, $t = \frac{1}{2}$, y por lo tanto resultará

$$\frac{ait}{100} = \frac{6019 \times 0{,}75 \times \frac{1}{2}}{100} = \frac{6019 \times 75}{20000} = 23,$$ próximamente una unidad.

Luego finalmente 6042 fr. espresan el valor del capital 5628 fr. en interés compuesto.

271. DESCUENTO COMPUESTO. — Las dos cantidades A y a que entran en la fórmula $A = a\left(\frac{100 + i}{100}\right)^n$, tienen entre sí una relacion tal, que si a es un capital dado á premio en la actualidad, A es su valor al cabo de cierto tiempo: luego *recíprocamente*, si A es una suma pagadera en n unidades de tiempo, a será *su valor actual*; conside-

rando asimismo los intereses acumulados y los intereses de los intereses del capital a.

Con arreglo á la fórmula arriba citada se tendrá esta otra:

$$a = \frac{A}{\left(\frac{100+i}{100}\right)^n},$$

que puede considerarse como dando *el valor actual* de una letra cuyo total és A pagadera en n años; teniendo en consideracion el interés compuesto de este valor actual.

Ejemplo.—*Hallar el valor actual de una suma de* 30000 fr. *pagadera en* 7 *años, suponiendo*, 1.º *que el descuento sea compuesto*, *y* 2.º *que el tanto de interés sea un* 6 p % *anual.*

Hagamos en este caso $A = 30000,\ n = 7,\ i = 6;$

y la fórmula será $a = \frac{30000}{(1{,}06)^7};$

de donde aplicando los logaritmos,

$$\log.\ a = \log.\ 30000 - 7,\ \log.\ 1{,}06.$$

En las tablas se halla .... log. 30000 = 4,47712;
y por otra parte, log. 1,06 = 0,02531;
de donde .... 7 log. 1,06 = 0,17717 .... — 0,17717;

luego .... log. a = 4,29995,
y por consiguiente a = 19950 fr.

Buscando el *valor actual* de 30000, segun la regla de descuento simple (primer método, véase n.º 227) se hallaria ...... 21126,76, resultado que difiere del anterior en .... 1176,76.

No pasaremos mas adelante sobre las aplicaciones de las tablas de logaritmos, pues lo que precede basta para dar una idea exacta de su utilidad é importancia.

LOGARITMOS DE LOS QUEBRADOS.

272. En las cuestiones anteriores no hemos considerado mas que logaritmos de números enteros ó de números fraccionarios mayores que la unidad. Estos logaritmos hacen parte de la tabla cuya formacion hemos indicado (n.os 258 y 259) ó bien pueden obtenerse fácilmente por

medio de estos, cuando los números correspondientes son enteros y esceden los límites de las tablas, ó cuando son fraccionarios.

Se sabe que en el sistema de Briggs los logaritmos de todos los números de que acabamos de hablar, estan comprendidos entre 0 y 1, 1 y 2, 2 y 3, 3 y 4..., es decir, que *los logaritmos de todos los números comprendidos desde la unidad hasta el infinito lo estan ellos mismos desde* 0 *hasta el infinito*; de modo que no hay número alguno, por pequeño ó grande que sea respecto de la unidad, que no pueda ser considerado como el logaritmo de un número mayor que la unidad.

Parece, pues, ahora muy natural averiguar si los quebrados tienen logaritmos y el modo de espresarlos.

Para esto volvamos de nuevo á la progresion décupla, $\because 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 \ldots$, y observemos que siendo cada término igual al que le precede multiplicado por 10, por *reciprocidad* deberá serlo al que le sigue dividido por 10. Por consiguiente si se continúa esta progresion en sentido contrario, dividiendo sucesivamente 1 por las diversas potencias de 10, es decir, por 10, 100, 1000..., lo cual da los quebrados $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}\ldots$, se tendrá esta nueva progresion $\because \ldots \frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \ldots$ que se puede suponer comience por una fraccion $\frac{1}{10^n}$ tan pequeña como se quiera.

Por otra parte recordemos la progresion por diferencia

$$\div\, 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ldots,$$

y observemos que siendo cada término igual al que le precede aumentado en 1, por *reciprocidad* deberá serlo al que le sigue disminuido en 1. Esto supuesto, continuémosla en sentido contrario, sustrayendo de 0 sucesivamente 1, 2, 3, 4..., lo cual da los resultados — 1, — 2, — 3, — 4; y se tendrá la nueva progresion por diferencia

$$\div \ldots -4. -3. -2. -1.\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots,$$

que puede considerarse como principiando por un término cualquiera $-n$, siendo n un número entero tan grande como se quiera.

De esta manera se obtiene el sistema de las dos progresiones

$$\div\,..\,\frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \ldots,$$

$$\div\,..\,-4.\quad -3.\quad -2.\quad 1.\quad 0.\quad 1.\quad 2.\quad 3.\quad 4 \ldots\ldots,$$

de las que cada una consta de dos partes que principian en los términos 1 y 0.

La primera parte, contando de izquierda á derecha en las dos progresiones, se compone de términos que comprenden *todos los números mayores que la unidad y sus logaritmos*. (Estos logaritmos son como ya hemos dicho todos los números imaginables comprendidos desde 0 hasta el infinito.)

La segunda parte, contando de derecha á izquierda, se compone de términos que comprenden *todos los números menores que la unidad y sus logaritmos*; no siendo estos otra cosa mas que los de la primera parte precedido del signo — que sirve para distinguir los logaritmos de los números menores que la unidad, de los correspondientes á los que son mayores que ellas.

273. En general sea $\frac{a}{b}$ un quebrado propiamente tal, lo que supone $a < b$.

Se deberá tener $\log. \frac{a}{b} = -\log. \frac{b}{a}$.

En efecto, como se tiene evidentemente $\frac{a}{b} = 1 : \frac{b}{a}$,

resulta (n.° 255) $\log. \frac{a}{b} = \log. 1 - \log. \frac{b}{a}$.

Luego en razon de ser $\log. 1 = 0$ (n.° 260),

$$\log. \frac{a}{b} = -\log. \frac{b}{a}.$$

Por lo cual se ve que *el logaritmo de un quebrado es igual al logaritmo del quebrado invertidos sus términos, y tomado con signo contrario.*

Así $\quad \log. \frac{3}{4} = -\log. \frac{4}{3} = -(\log. 4 - \log. 3);$

$$\log. \frac{23}{47} = -\log. \frac{47}{23} = -(\log. 47 - \log. 23);$$

lo cual da lugar á la siguiente regla: *para obtener el logaritmo de un quebrado se sustraerá el logaritmo del numerador de el del denominador y se tomará el resultado con el signo —.*

274. Establecidos ya estos principios, pasemos á hacer sus aplicaciones.

1.° *Hallar* por logaritmos *el valor del producto* $\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}$.

Se tiene (n.° 59) $\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}=\frac{3\times 5\times 11}{7\times 12\times 13}$,

de donde (n.° 273) $\log.\left(\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}\right)=-\log.\frac{7\times 12\times 13}{3\times 5\times 11}=$

$=\log. 3+\log. 5+\log. 11-\log. 7-\log. 12-\log. 13,$

ó aplicando los complementos aritméticos,

$=\log. 3+\log. 5+\log. 11+\text{c. }\log. 7+\text{c. }\log. 12+\text{c. }\log. 13-30.$

Efectuando la operacion indicada se reconoce que

$$\log.\left(\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}\right)=-0,82074.$$

Llamando x al número correspondiente á 0,82074 se tiene (n.° 273)........ $-0,82074=\log.\ \frac{1}{x}$.

La cuestion queda reducida á determinar x.

Pero segun la regla establecida en el n.° 265 se halla

$0,82074=\log. 6,6181$; luego $x=6,6181$:

y por consiguiente $\frac{1}{x}$ ó *el número pedido* tiene por valor

$$\frac{1}{6,6181}=0,1511.$$

Nota. — En este ejemplo no es muy evidente la exactitud de la última cifra decimal del número 6,6181, en virtud de lo que hemos dicho en el n.° 266, pero sí lo es la del número 0,1511 (Véase el n.° 20 del Apéndice puesto al fin de la obra).

Regla general. — Para hallar el número correspondiente á un logaritmo acompañado del signo — *búsquese desde luego el número* *perteneciente al logaritmo*, *haciendo abstraccion del signo*, *y despues divídase la unidad por el número así obtenido*; y el cociente valuado en decimales será el *número pedido*.

Tambien puede usarse del artificio siguiente: *póngase* $-0,82074$ *bajo la forma* $4 - 0,82074 - 4$, lo que equivale *á aumentar y disminuir á la vez el logaritmo propuesto en 4 unidades*: resultará.....
$-0,82074 = 3,17926 - 4$.

Pero segun las tablas se tiene $3,17926 = \log. 1511$,
de donde $3,17926 - 4 = \log. 1511 - \log. 10000$ (n.° 261);

luego $$0,82074 = \log. \frac{1511}{10000} = \log. 0,1511.$$

Este último medio es en general mas sencillo y rigoroso que el primero, porque en la espresion $\frac{1}{x}$ por él obtenido x es un divisor inexacto *, al paso que por la naturaleza del segundo medio no puede reconocerse esta causa de error.

Hallar el número correspondiente al logaritmo $-2,35478$.

Estando comprendido este logaritmo entre -2 y -3, su número correspondiente lo estará entre $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{1000}$. Pero para obtener el valor segun el *segundo medio* se pone el logaritmo bajo la forma $6 - 2,55478 - 6 = 3,64522 - 6$.

Por otra parte se tiene...... $3,64522 = \log. 4417,9$;

luego $6 - 2,35478 - 6$ $6 - 2,35478 = \log. \frac{4417,9}{1000000}$;

ó bien $$-2,35478 = \log. 0,0044179.$$

Estos ejemplos bastan para hacer ver que los números correspondientes á los logaritmos afectados del signo $-$ pueden ser obtenidos con un escesivo grado de aproximacion.

El segundo medio consiste evidentemente *en sustraer del logaritmo propuesto tantas unidades como contiene la característica mas 4; en determinar el número correspondiente al resultado así obtenido; y en dividir este número por la unidad seguida de tantos ceros como unidades ha sido necesario tomar para efectuar la sustraccion.*

2.° *Hallar la* 11.ª *potencia de la fraccion* $\frac{13}{15}$.

. . . .

---

* Véase el n.° 20 del Apéndice al fin de la obra.

Se tiene (n.° 273) log. $\left(\frac{13}{15}\right)^{11} = -\log.\left(\frac{15}{13}\right)^{11} = -\left(11 \log.\frac{15}{13}\right)$.

Pero log. $\frac{15}{13} = 0{,}06215$; de donde $11 \times \log.\frac{15}{13} = 0{,}68365$; y por

consiguiente log. $\left(\frac{13}{15}\right)^{11} = -0{,}68365 = \log.\ 0{,}2072$.

Luego 0,2072 es el número pedido.

3.° *Hallar la raiz 7.ª de* $\frac{2}{3}$.

Se tiene log. $\sqrt[7]{\frac{2}{3}} = -\log.\sqrt[7]{\frac{3}{2}} = -\left(\frac{1}{7}\log.\ \frac{3}{2}\right)$.

Pero log. $\sqrt[7]{\frac{3}{2}} = 0{,}17609$; de donde $\frac{1}{7}\log.\ \frac{3}{2} = 0{,}02515$;

Luego log. $\sqrt[7]{\frac{2}{3}} = -0{,}02515 = \log.\ 0{,}94374$,

y por consiguiente $\sqrt[7]{\frac{3}{2}} = 0{,}94374$.

275. Escolio. — La investigacion de los logaritmos de los quebrados ha dado lugar á una especie particular de números llamados en Algebra *números negativos* en contraposicion á los que se llaman *números positivos ó absolutos*. La consideracion de los números *negativos* en la teoría de los *logarítmos* es tan indispensable como la de los números *positivos*, pues ellos solo pueden servir para espresar los logaritmos de los quebrados. Esto es tan evidente que en la hipótesis (muy admitida) en que se hubiese establecido el sistema de las dos progresiones

$$\begin{array}{l} \div\, 1 : \frac{1}{10} : \frac{1}{100} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{10000} \ldots\ldots\ldots, \\ \div\, 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

en cuyo caso todos los quebrados hubieran tenido logaritmos positivos y tanto mayores cuanto menores fuesen los quebrados, en esta hipótesis, repito, los logaritmos de los números cada vez mayores que la unidad, á saber 1, 10, 100, 1000...., y todos los números comprendidos entre sí estarian necesariamente representados por la serie de los números *negativos* 0, — 1, — 2, — 3...., y de todos los números comprendidos.

OTRO MODO DE CONSIDERAR LOS LOGARITMOS.

276. Euler en sus *Elementos de Algebra* ha establecido entre las diversas operaciones de la Aritmética una aproximacion muy ingeniosa que vamos á esponer por su importancia, pues da lugar á un nuevo modo de considerar los logaritmos.

Representemos por a, b, c tres números cualesquiera y propongámonos esta cuestion general: *Dadas dos de estas tres cantidades, determinar la tercera por una de las operaciones aritméticas efectuada con dichas dos cantidades.*

La operacion mas sencilla es sin disputa *la adicion.*

Así sea propuesto *hallar* c *por la adicion de dos números* a *y* b.

Esta relacion que hay entre dichos tres números estará bien espresada por la igualdad

$$a+b=c\ldots\ldots(1),$$

que dan tambien $a=c-b$ ó $b=c-a$.

Por lo cual se ve que si en lugar de buscar c se pidiese el valor de a ó de b, la misma igualdad (1) daria la cantidad incógnita *por una sustraccion.*

Así pues, *la adicion* y *la sustraccion* estan ligadas entre sí por la misma igualdad $a+b=c$.

Nota. — Si en la igualdad $a=c-b$ se supone $c<b$, el valor de a se reduce evidentemente á un *número negativo.* Esta clase de números provienen de sustracciones imposibles de efectuar.

La adicion de muchos números iguales da lugar á *la multiplicacion.*

Propongámonos *hallar* c *por la multiplicacion de los números* a *y* b.

Esta relacion se indicará así:

$$ab=c\ldots\ldots\ldots(2),$$

de donde

$$a=\frac{c}{b} \text{ ó } b=\frac{c}{a}.$$

Luego si en lugar de buscar c por la igualdad (2) se pide el valor de a ó de b, la division de c por b ó de c por a dará el valor del número incógnito.

Por consiguiente la *multiplicacion* y la *division* estan ligadas entre sí por la misma igualdad. . . . $ab = c$.

Nota. —En la hipótesis de $c < b$ ó de no ser c exactamente divisible por b, la espresion $\frac{c}{b}$ es una *fraccion* ó un *número fraccionario*. Luego las fracciones provienen de divisiones inexactas.

Finalmente la multiplicacion de muchos números iguales da lugar á *la formacion de potencias*.

Supongamos, pues, que *se quiera obtener* c *haciendo el producto de* b *números iguales á* a.

Esta relacion se espresa por igualdad $a^b = c$. . . . . . (3);

de donde se deduce. . . . . $c = \sqrt[b]{c}$;

lo cual prueba que para obtener c, conociendo a y b, es necesario efectuar *una formacion de potencia*, y que para obtener a, conociendo c y b, es necesario efectuar *una estraccion de raiz*.

Pero *conociendo* ahora *á* a *y* c *¿cómo hallaremos á* b *?*

Antes de responder á esto hagamos un resúmen de lo que acabamos de decir.

La igualdad $a + b = c$ comprende las dos operaciones conocidas con el nombre de *adicion* y *sustraccion*; pudiendo dar lugar esta última á *los números negativos*.

La igualdad $ab = c$ abraza *la multiplicacion* y *la division*, que son el orígen de *una fraccion ó un número fraccionario*.

Observemos además que en cada una de estas igualdades $a + b = c$ ó $ab = c$, el número a ó el número b se obtiene por medio de la *misma operacion* efectuada con las dos cantidades conocidas (lo cual equivale á decir que a y b entran de un modo semejante ó simétrico en estas igualdades).

Del mismo modo la igualdad $a^b = c$ reune la *elevacion á potencias* y *la estraccion de raices*, que es de donde provienen *los números inconmensurables*.

Pero hay una diferencia entre esta igualdad y las dos que preceden, y es que para hallar a basta una estraccion de raiz; mas para encontrar b se necesita una operacion particular, y que en cierto modo deberá considerársela como una *sétima operacion* de la Aritmética.

Aplicando á la igualdad. . . . . $a^b = c$

la propiedad del n.º 256, se tiene. . . . . $b. \log. a = \log. c$;

de donde se deduce. . . . . $b = \frac{\log. c}{\log. a}$;

es decir, que el valor de b se obtiene por medio de logaritmos.

277. Hagamos algunas aplicaciones.

Supongamos en la igualdad $a^b = c$, $a = 3$ y $c = 81$, y se tendrá $3^b = 81$; de donde $b = \frac{\log. 81}{\log. 3}$.

Pero $\quad \log. 81 = 1,90849; \ \log. 3 = 0,47712;$

luego $$b = \frac{1,90849}{0,47712} = 4 + \frac{1}{47712}.$$

Despreciando la fraccion $\frac{1}{47712}$ (por su pequeñez) que proviene de la inexactitud de los logaritmos, se halla $b = 4$; y en efecto $3^4 = 81$.

Propongámonos ahora la cuestion siguiente: *La poblacion de un pais aumenta cada año en* $\frac{1}{50}$ *de lo que era en su principio, ¿al cabo de qué número de años habrá duplicado?*

Representemos por a el estado de la poblacion á principios del primer año y por a', a'', a'''..... en lo que se convierte al principio de cada año.

Supuesto que segun hipótesis la poblacion a aumenta al fin del primer año en $\frac{1}{50}$ de lo que era al principio, resulta que al fin de este año ó al principio del segundo se hallará convertida en

$$a + \frac{a}{50} = a\left(1 + \frac{1}{50}\right) = a\left(\frac{51}{50}\right),$$

ó bien a' conforme á las notaciones en que hemos convenido.

Como al fin del segundo año la poblacion a' aumenta tambien en $\frac{1}{50}$ de lo que era al principio de este año, se tendrá

$$a' + \frac{a'}{50} = a'\,1 + \left(\frac{1}{50}\right) = a'\left(\frac{51}{50}\right)$$

ó bien poniendo en lugar de a' su valor, $= a\left(\frac{51}{50}\right)^2 = a''$.

Asímismo se hallará por el estado de la poblacion al fin del tercer año $a''\left(\frac{51}{50}\right) = a\left(\frac{51}{50}\right)^3$, y así sucesivamente

Luego si x designa el número incógnito de años, $a\left(\frac{51}{50}\right)^x$ espresará el estado de la poblacion al fin del tercero, y como por otra parte segun el enunciado este mismo estado está representado por $2a$, se tendrá esta igualdad. . . . $a\left(\frac{51}{50}\right)^x = 2a$;

si se suprime el factor a comun á los dos miembros resulta

$$\left(\frac{51}{50}\right)^x = 2; \text{ de donde } x = \frac{\log. 2}{\log. \left(\frac{51}{50}\right)} = \frac{\log. 2}{\log. 51 - \log. 50}.$$

Buscando en las tablas los logaritmos de 2, de 51 y de 50 se hallan hechas todas las operaciones; $x = 35 + \frac{3}{860}$.

Luego al cabo de unos 35 *años* la poblacion habrá duplicado.

Los logaritmos conducen á una especie particular de operacion indispensable para la resolucion de ciertas cuestiones.

FIN.

APENDICE

SOBRE LAS APROXIMACIONES NUMERICAS.

Este Apéndice está dividido en dos partes: en *la primera* se supone que los números sobre que se han de efectuar operaciones aritméticas sean dados exactamente, y en ella se esponen métodos mas espeditivos que los que hemos dado á conocer en el cuerpo de la obra para hallar el resultado de las operaciones con un grado determinado de aproximacion.

En *la segunda parte* se opera sobre números que no se dan mas que aproximadamente, y se propone asignar el grado de aproximacion que la naturaleza de los números dados y el sistema de operaciones ejecutados con estos números son susceptibles de suministrar para los resultados.

PRIMERA PARTE.

Sucede muy frecuentemente en las cuestiones de Aritmética (Véase el fin del capítulo IV) tener que efectuar operaciones en que figuran un gran número de cifras decimales, aun cuando basta para el objeto propuesto obtener el resultado con un número de cifras decimales mucho menor que el que comprenden los números sobre que se opera. Por consiguiente es útil dar á conocer ciertos métodos con cuyo auxilio se puedan obtener las únicas cifras decimales que se necesitan, sin estar obligado á ejecutar las operaciones por completo.

METODO ABREVIADO DE LA MULTIPLICACION.

1. Principiemos por la multiplicacion y tomemos los dos números 34,253467 y 5,4637, suponiendo que *se quiera obtener el producto valuado en* 0,001 *próximamente.*

El artificio que para esto deberá emplearse consiste en no tener en cuenta en las multiplicaciones por las diversas cifras del multiplicador mas que *milésimas* ó unidades de órdenes superiores, es decir, *centésimas*, *décimas*, *unidades simples* &c. Sin embargo, como bastan 10 *diezmilésimas* para formar 1 *milésima*, es necesario tambien tener en consideracion las *diezmilésimas* que pueden dar los productos parciales.

He aquí cómo se opera conforme á estas observaciones:

```
   3 4,2 5 3 4 6 7
     7 3 6 4 5
  ───────────────
 1 7 1 2 6 7 3      diez milésimas.
   1 3 7 0 1 3
     2 0 5 5 1
       1 0 2 7
         2 3 9
  ───────────────
 1 8 7,1 5 0 3
```

Se principiará por escribir la cifra de las unidades del multiplicador bajo la de las *milésimas* del multiplicando, colocando á continuacion las otras cifras en un órden inverso, de tal modo que la cifra de las *décimas* del multiplicador quede bajo la de las *milésimas* del multiplicando, la de las *centésimas* bajo la de las *centésimas*, y así sucesivamente. Por lo que toca á la cifra de las *decenas*, *centenas* &c. del multiplicador, si las hubiese, deberian estar colocadas bajo las cifras de las *cienmilésimas*, *millonésimas* &c. del multiplicando. En una palabra, cada cifra del multiplicador resulta (mediante esta disposicion) colocada debajo de la cifra del multiplicando, cuyo producto por la del multiplicador da *diezmilésimas*.

Esto supuesto, multiplíquense por la cifra 5 del multiplicador todas las cifras del multiplicando, partiendo de la cifra 4 que corresponde al 5, y despreciando el producto de 67 por 5; á escepcion de las 3 unidades de reserva que da el producto de 6 por 5, y que espresan *diezmilésimas*; puesto que este producto es 30 *cienmilésimas*. De este modo se obtiene 1712673 *diezmilésimas*, que se escribirán debajo de los dos factores despues de subrayados.

Multiplíquese todo el multiplicando por la cifra 4, partiendo de la cifra 3, y despreciando el producto de 467 por 4, á escepcion de la *unidad* de reserva que da el producto de 4 por 4, porque esta unidad da 1 *diezmilésima*: resultarán 137013 *diezmilésimas*, que se colocarán debajo del primer producto, de modo que las últimas cifras se correspondan, como que espresan ambas *diezmilésimas*.

Opérese del mismo modo con las demás cifras del multiplicador, cuidando de *empezar cada multiplicacion parcial por la cifra del multiplicando colocada inmediatamente debajo de la cifra del multiplicador que se considera, y añadir al producto no mas que las reservas suministradas por la cifra siguiente á la del multiplicando por que se comienza la multiplicacion*.

Así se obtienen los tres nuevos productos 20551, 1027 y 239, que se colocan debajo de los precedentes, de modo que se correspondan las últimas cifras de la derecha.

Súmense en seguida todos estos productos y se tendrá 1871503, número del cual deberán separarse *cuatro* cifras decimales, puesto que debe espresar *diezmilésimas*.

Por último *bórrese* la última cifra y se hallará 187,150 próximamente 0,001 por el producto pedido.

Es bien fácil comprobar este resultado efectuando la multiplicacion por completo.

Nota.—Podrá creerse á la inspeccion de este procedimiento que como se han tenido en cuenta todas las *diezmilésimas* contenidas en los productos parciales, la cifra de las *diezmilésimas* debe ser exacta; pero este juicio seria harto errado, pues bien se ve que dicha cifra es por lo regular menor que lo que debiera ser en muchas unidades. Esto, pues, corrobora el que la suma de las unidades de la columna de las *cienmilésimas* pueda dar muchas unidades de reserva. De todos modos el error podrá considerarse como no debiendo influir en la cifra de las *milésimas*, pues para que así fuese, seria necesario que hubiese al menos 10 : ½ ó 20 productos parciales.

Un nuevo ejemplo servirá para aclarar del todo esta doctrina.

Propongámonos hallar el producto de los dos números .... 763,05403678956 *y* 254,4630578 *valuado en* 0,00001 *de aproximacion.*

763,05403678956	
8750364452	
15261080735 7	*millonésimas.*
3815270183 9	
305221614 6	
30522161 4	
4578324 1	
228916 2	
3815 2	
534 1	
61 0	
194169,063462	

Puesto que se exige que las *cinco* primeras cifras decimales sean exactas, será necesario tener en cuenta las *millonésimas* que puedan dar los productos parciales.

Así despues de haber invertido el órden de las cifras del multiplicador, se les colocará debajo del multiplicando, de modo que la última cifra 4 de sus unidades quede debajo de las *millonésimas* del multiplicando: las otras cifras se colocarán en el órden anteriormente prescrito y se efectuarán las multiplicaciones teniendo en consideracion para cada cifra del multiplicador la reserva que da la parte despreciada en el multiplicando por esta cifra.

Sumando en seguida todos los productos obtenidos, separando *seis* cifras decimales y *borrando* la última cifra se obtiene 194169,06346 por el producto pedido, próximamente 0,00001.

2. Puede suceder que el multiplicando no tenga bastantes cifras decimales para que se puedan hacer corresponder las cifras de las unidades, decenas, centenas &c... del multiplicador á aquellas bajo las cuales segun la regla establecida deberán ser colocadas. En este caso se principia por escribir á la derecha del multiplicando un número conveniente de ceros. *Sea propuesto*, por ejemplo, *multiplicar* 1825,4037 *por* 2427,125, y supongamos que se pide un producto exacto hasta las *diezmilésimas* inclusive.

```
1825,403700000
       5217242
--------------
36508074000000  cienmilésimas.
 7301614800000
  365080740000
  127778259000
     18254037
      3650807
       912701
--------------
443048,295535
```

Como es necesario que la cifra de las *unidades* del multiplicador corresponda á las cifras de las *cienmilésimas* del multiplicando, y que las *decenas*, *centenas* &c.... correspondan á las *millonésimas*, *diezmillonésimas* &c., se pondrán *cuatro* ceros á la derecha del multiplicando y se tendrá 1825,40370000. Por lo demás, la operacion se efectúa como anteriormente.

Aconsejamos á los principiantes se ejerciten sobre ejemplos de multiplicacion tratados en los n.os 103 y siguientes.

3. Finalmente, el procedimiento que precede es aplicable á la multiplicacion de dos números enteros compuestos uno y otro de un gran número de cifras y cuyo producto se quiere hallar exacto, próximamente una unidad de cierto órden.

Sean, por ejemplo, *los dos números* 279456 *y* 89764 *cuyo producto se quiere obtener aproximado en* UN MILLON.

```
279456
46798
───────
223564   centenas de millar.
 25150
  1955
   167
    10
───────
250846
```

Para hallar un producto exacto hasta los *millones* inclusive es necesario tener en cuenta las *centenas de millar* que pueden dar los productos parciales. Así se escribirá el multiplicador *en un órden inverso* debajo del multiplicando, de modo que la cifra de *sus unidades* quede debajo de la de las *centenas de millar*, la de las *decenas* bajo la de las *decenas de millar*; y se efectuará la operacion como anteriormente. De este modo se obtendrá 2508 ó mas bien 25085 millones por el producto pedido. (Véase la nota puesta al fin del n.º 102.)

METODO ABREVIADO PARA LA DIVISION.

4. Tambien hay un medio sencillo para obtener aproximadamente el cociente de la division de dos números compuestos de un gran número de cifras.

Consideremos desde luego el caso en que siendo dividendo y divisor dos números enteros, se quiera obtener el cociente aproximado tan solo *en menos de unidad*; despues de lo cual será fácil averiguar el procedimiento para el caso en que los números sean dos fracciones.

El método que vamos á esponer está fundado sobre que la determinacion (Véase el procedimiento ordinario de la division) de cada una de las cifras del cociente no depende la mayor parte de las veces mas que de las dos ó tres primeras cifras del divisor; de donde resulta que se puede obtener la verdadera cifra del cociente sin hacer uso de las últimas cifras del dividendo parcial. Supuesto esto, he aquí en qué consiste este procedimiento abreviado.

Suprímase á la derecha del dividendo tantas cifras MENOS DOS *como hay en el divisor, y divídase en seguida la parte de la izquierda por el divisor.* Si no resulta resto alguno, *se pondrán á continuacion del cociente tantos ceros como cifras se hayan suprimido en el dividendo*; pero si por el contrario se obtiene un resto, que es lo mas general, *se dividirá este resto no por el mismo divisor* (lo cual no es muy verosímil), *sino por el divisor cuya última cifra de la derecha se haya suprimido*. De todos modos en la multiplicacion del nuevo divisor por la cifra obtenida en el cociente *se deberá cuidar de añadir la reserva que da el producto de la cifra suprimida por la del cociente.*

Divídase en seguida el nuevo resto por el divisor precedente cuya última cifra de la derecha deberá haberse suprimido tambien. (La misma observacion anterior deberá tenerse presente para la multiplicacion del nuevo divisor por la cifra del cociente.)

Continúese así la operacion, suprimiendo en cada division una cifra á la derecha del divisor hasta que no quede en él mas que una cifra por borrar. Borrando en seguida la última cifra hallada en el cociente, *se obtendrá por el cociente pedido la parte que está á la izquierda de la cifra borrada.*

Para mayor claridad resolveremos un ejemplo por el procedimiento ordinario de la division y por el que acabamos de enunciar.

Sea propuesto, por ejemplo, *dividir* 430456896 *por* 5683.

<table>
<tr><td>430456896
32646
42318
25379
26476
3744</td><td>5683
――――
75744</td><td>4304568|96
23646
42318
2537
264
37
4</td><td>$5\cancel{6}\cancel{8}\cancel{3}$
――――
757|44$\cancel{6}$</td></tr>
</table>

La division de la izquierda se hace por el procedimiento ordinario que ya conocemos, y por tanto nos ocuparemos tan solo de la segunda.

Conforme á la regla se separan *dos* cifras á la derecha del dividendo, pues que hay *cuatro* en el divisor, y se divide la parte de la izquierda 4304568 por 5683 como ordinariamente, lo cual da por cociente 757 y 2537 por resto.

Despues se suprime la última cifra 3 del divisor y se divide 2537 por 568, y se tendrá 4 por cociente. Se multiplica 568 por 4 añadiendo al producto la *unidad* de reserva que da el producto 12 de la cifra suprimida por 4, y se resta el resultado 2273 de esta multiplicacion, de 2537: el resto es 264.

Suprimiendo la cifra 8 en el último divisor y dividiendo 264 por 6 se obtiene 4 por cociente. Multiplicando en seguida 56 por 4 y añadiendo al producto las 3 *unidades* que provienen de la multiplicacion de la cifra suprimida por 4, se halla 227, que sustraido de 264 da por resto 37.

Dividiendo finalmente 37 por 5 se tiene 7 por cociente, cifra que no conviene, pues entonces habria que restar $5 \times 7 + 4$ ó 39 de 37: ensáyese 6, y *borrando* esta nueva cifra resultará 75744 *próximamente una unidad* por el cociente pedido. (Bien pronto hablaremos de la cifra borrada.)

Comparando ambas operaciones se advertirá que las dos ó tres primeras cifras son las mismas en cada division parcial, y por consecuencia que las cifras del cociente deben ser las mismas en una y otra; pero es necesario cuidar muy particularmente de retener las unidades de reserva procedentes de la multiplicacion de la cifra suprimida por el cociente obtenido, pues de lo contrario resultarian restos muy crecidos, que darian en el cociente cifras mayores que las verdaderas.

Sea propuesto, por segundo ejemplo, *dividir* 540347056789045 *por* 2786459.

```
5403470567|89046     | 2786459
26170115             |---------
   10919846          | 1939|188974
  25604697
     526566
    247921
     25005
      2714
       207
        13
         3
```

Despues de haber separado *cinco* cifras á la derecha del dividendo, es decir, *dos menos* que las que hay en el divisor, se divide la parte de la izquierda por todo el divisor, lo que da por cociente 1939 y 526566 por resto.

Hecho esto se suprime la última cifra 9 del divisor, y se divide 526566 por 278645: resulta 1 por cociente y 247921 por resto, que se divide por 27864: resulta un nuevo cociente 8 y un resto 25005; que se divide por 2786; y así sucesivamente hasta que se llegue al resto 13, que dividido por 2 da 4 por cociente. *Bórrese* la cifra 4 y se tendrá 193918897 por el cociente pedido.

5. Observacion primera.—Si al principiar la operacion, ya suprimidas á la derecha del dividendo las cifras que la regla prescribe, no contiene la parte de la izquierda al divisor, *se suprimirá á la derecha del divisor el número de cifras necesario para que el nuevo divisor esté contenido en dicha parte del dividendo.*

Propongámonos dividir 30564897 *por* 67364.

```
3 0 5 6 4 | 897   | 67364
  3 6 1 9         |-------
    2 5 1         | 4537
      5 0
        4
```

Como separadas las tres últimas cifras de la derecha del dividendo, la parte de la izquierda 30564 no contiene al divisor, se suprimirá la última cifra del divisor y en seguida se dividirá 30564 por 6736, lo cual da 4 por cociente y 3619 por resto, con el cual deberá operarse como anteriormente.

6. Observacion segunda.—Reflexionando sobre el método que precede se reconocerá fácilmente que el *error* cometido en cada operacion parcial proviniendo de las reservas despreciadas no influye por lo general mas que en la última columna de la derecha del cálculo abreviado. (El *límite* de este error puede espresarse por *tantas unidades mas* como operaciones parciales se ejecuten segun el método abreviado, es decir, como cifras contiene el divisor *menos una.*) De aquí resulta que la última cifra obtenida en el cociente puede estar errada (*con esceso*) en algunas unidades, y por consiguiente no podrá servir mas que de prueba para ver si deberá aumentarse á la cifra precedente en *una unidad*, para que el cociente sea exacto ó al menos *aproximado en menos de una unidad.*

Así que en el primer ejemplo en que se habia obtenido 6 por último cociente para asegurarse si se deberá aumentar á la cifra anterior en una unidad, bastará disminuir al dividendo parcial 37 en 3 unidades, pues que se han ejecutado *tres* operaciones. Dividiendo 34 por 5, primera cifra del divisor, se tiene asismismo 6 por cociente y 0 por resto (teniendo en consideracion las 4 unidades de reserva procedentes de la multiplicacion de la segunda cifra del divisor por 6).

Es pues evidente que si se hubiese operado con los dos números propuestos segun el procedimiento ordinario, se hubiera obtenido tambien 6 por este cociente parcial. Así pues, 75745 es el cociente pedido aproximado *en menos de media unidad*, aunque resultante *en esceso.*

En el segundo ejemplo, como el último cociente es 4 y no puede ser muy grande, se deberá inferir que 193918897 es el cociente pedido, aproximado *en menos de media unidad*, pero en *sentido contrario.*

Finalmente en el tercer ejemplo en que se ha hallado 7 por último cociente, si se disminuye al dividendo parcial en 4 unidades (pues que se han ejecutado *cuatro* operaciones), se tiene 46, que dividido por 6 da 6 por cociente (á causa de las reservas). Se ve, pues, que la última cifra 7 puede ser mayor solo en *una unidad* y que 454 es el cociente pedido, aproximado *en menos de media unidad*, aunque resultante *en esceso.*

7. Ya podemos establecer el procedimiento propio para el caso en que siendo los dos números fracciones decimales se pide el cociente valuado en cierto grado de aproximacion, por ejemplo, en menos de *una milésima*, de *una diezmilésima* &c.

Comiéncese por reducir la division á la de los números enteros segun la regla del n.° 90; *escríbase en seguida á la derecha del dividendo tantos ceros como cifras decimales se quieran obtener en el cociente; hágase la division segun la regla* (apénd. n.° 4) *y por último sepárase hácia la derecha del cociente el número de cifras decimales pedido y bórrese la última cifra* (cuidando aumentar, si necesario fuere, á la precedente).

Primer ejemplo.—*Hallar en menos de* 0,001 *próximamente el cociente de* 1234, 569 *por* 27,35894.

```
1234569 | 00000 | 2735894
 140212 |       |--------
   2418         | 451249
    683         |
    136         |
     27         |
      3         |
```

Se escriben *dos* ceros á la derecha del dividendo y se suprime la coma en una y otra parte, lo cual da los dos nuevos números 123456900 y 2735894. En seguida como se piden *tres* cifras decimales en el cociente, se añaden *tres* ceros mas al dividendo, y se tendrá que dividir 123456900000 por 2735894: resulta 45125 por el cociente aproximado en menos de una unidad; pero como escribiendo tres ceros á la derecha del dividendo se le ha hecho 1000 veces mayor, será necesario para que el cociente quede en su justo valor, separar en él 3 cifras decimales á la derecha, con cuya operacion se tendrá finalmente 45,125 por el cociente pedido. Este resultado es *escesivo*; pero no difiere del verdadero mas que en *una media milésima.*

Segundo ejemplo.—*Hallar en menos de* 0,0001 *de aproximacion el cociente de* 229,4703568 *por* 7,3594.

```
22947035 | 680 | 73594
   86883       |------
  132895       | 311|858
   59301       |
     426       |
      59       |
       1       |
```

Como seria necesario en virtud de lo que hemos dicho anteriormente escribir *tres* á la derecha del divisor, mas *cuatro* á la derecha del dividendo, no habrá mas que escribir *uno solo* á la derecha de este y suprimir la coma en una y otra parte: los nuevos factores de la division será 22947035680 y 73594.

Efectuando la division se halla 311806 por primer resultado; luego 31,1806 es el cociente pedido.

METODO ABREVIADO PARA LA ESTRACCION DE LA RAIZ CUADRADA.

8. Siempre que se haya obtenido mas de la mitad del número de cifras que debe contener una raiz cuadrada, se podrán hallar todas las demás por medio de una simple division.

En efecto, representemos por N el número cuya raiz cuadrada se quiere hallar, y supongamos que esta raiz deba contener $(2n+1)$ cifras. Llamemos a el valor relativo de la parte representada por las $(n+1)$ primeras cifras de la izquierda de esta raiz, y b la parte espresada por las n cifras siguientes, parte que se quiere determinar.

Se tendrá la igualdad. . . . . $N=(a+b)^2=a^2+2ab+b2$;
de donde restando a^2 de ambos miembros, $N=a^2=2ab+b^2$
ó dividiendo por $2a$,

$$\frac{N-a^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}.$$

Esto supuesto, ya que por hipótesis b no contiene mas que n, deberá tenerse $b<10^3$, y por consiguiente $b^2<10^{2n}$.

Por otra parte componiéndose el número espresado por a de $(2n+1)$ cifras de las que las n últimas son ceros resulta

$$a\text{, y } \textit{à fortiori}\text{, } 2a>10^{2n}.$$

Luego $\frac{b^2}{2a}$ es un quebrado propiamente tal: así segun la última igualdad el cociente espresado por $\frac{N-a^2}{2a}$ *escede* á b en una cantidad *menor* que la unidad. De aquí la siguiente regla:

Despues de haber obtenido la mitad del número de cifras de la raiz cuadrada, basta para obtener las demás *dividir el resto* $N-a^2$ *hallado por el duplo de la raiz ya hallada*, *considerada con su valor relativo*.

Propongámonos, por primer ejemplo, *estraer la raiz cuadrada de* 4735678956 *aproximada en menos de una unidad*.

Busquemos las tres primeras cifras por el procedimiento ordinario. (Véase el n.º 179.)

4 7 3 5 6 7 8 9 5 6	688	
1 1 3.5		
1 1 1 6.7	12.8	136.8
2 2 3 8 9 5 6	8	8

Se tiene 688 por esta primera parte de la raiz y por resto 2238956, que deberá dividirse por el duplo de 688 considerado con su valor relativo, es decir, por 137600.

2238956	137600
862956	16
37356	

Siendo 16 la parte entera del cociente, resulta que 68816 es la raiz pedida aproximada *en menos de una unidad.*

Efectivamente, pues si se eleva 68816 al cuadrado, se obtiene el producto 4735641856, que sustraido del número propuesto da un resto 37100, menor que el duplo de 68816 aumentado en una unidad. (Véase el n.° 177.)

(Como este resto es menor que la raiz obtenida 68816, se puede afirmar que es exacto *en menos de una unidad próximamente.*

Porque si en la fórmula $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ se hace $b=\frac{1}{2}$,

se tiene
$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 = a^2+a+\frac{1}{4};$$

lo cual demuestra que para que haya lugar á aumentar la raiz en *media unidad*, es necesario y basta que *el resto esceda á la raiz hallada al menos en una unidad*).

El resto 37100 puede obtenerse de un modo mas espedito que la elevacion de 68816 al cuadrado.

En efecto, como restando el cuadrado de 688 del número propuesto se ha obtenido el resto 2238956, bastará *formar el duplo del producto de* 688 *seguido de* DOS CEROS *por* 16, *mas el cuadrado de* 16, *y sustraer la suma de estas dos partes*, *de* 2238956.

9. Supongamos ahora que se quiera *valuar en decimales* la fraccion que debe ser añadida á 68816: en este caso será necesario conforme á lo establecido en el n.° 183 escribir á continuacion del resto 37100 DOS VECES tantos ceros como cifras decimales quieran hallarse, y en seguida efectuar la operacion como ordinariamente. Aquí es donde el método abreviado puede ser susceptible de una gran estension.

En efecto, para obtener *cuatro* cifras decimales (pues que la raiz obtenida tiene *cinco*) basta dividir 37100 seguido de *ocho* ceros por el duplo de 68816 ó 137632 seguido de *cuatro* ceros; ó lo que es lo mismo, 371000000 por 137632; y además como se busca este cociente aproximado en una unidad, resulta que la regla de la division abreviada es aplicable.

37100	0000	~~137632~~
9574		2695~~8~~
1317		
79		
1		
1		

Se obtiene por cociente 2695: así 68816,2695 espresa la raiz cuadrada del número propuesto aproximado en menos de 0,0001.

Una nueva division daria ocho cifras decimales mas; pero para ello seria preciso hallar la *diferencia* que hay entre el número propuesto seguido de *ocho* ceros y el cuadrado de 688162695; y como ya se ha obtenido 37100 por el resto precedente, bastaria *formar el duplo del producto de* 688160000 *por* 2695, *mas el cuadrado de* 2695, *y sustraer la suma de estas dos partes de* 37100 *seguido de* OCHO *ceros*, lo que es mas sencillo que elevar 688162695 al cuadrado.

Esta sustraccion se hace indispensable para la comprobacion del cálculo; pues hemos visto, 1.° que $\frac{N - a^2}{2a}$ da un cociente *por esceso*; y 2.° que el uso del procedimíento abreviado para la division da asimismo un cociente por esceso. Así que por esta doble razon es muy probable que la última cifra hallada en la raiz sea *mayor* en una ó dos unidades, lo que es fácil echar de ver al hacer la sustraccion. Por otra parte ya sabemos cómo se reduce á su justo valor la última cifra cuando se la reconoce muy crecida.

10. Presentaremos por segundo ejemplo la tabla de los cálculos relativos á la *valuacion de* $\sqrt{2}$ *en decimales.*

1.°.... *Aplicacion del procedimiento ordinario.*

2	1,41	
10.0	2 4	281
40.0	4	1
11 9		

2.°... *Determinacion de las dos cifras siguientes por la division*

11900	282
620	42
56	

La raiz aproximada en menos de 0,0001 es 1,4142.

3.°.... *Determinacion del nuevo resto.*

Producto de 28200 por 42 =	1184400
cuadrado de 42 =	1764
suma =	1186164
que se ha de sustraer de	1190000
diferencia...... =	3836

4.º..... *Determinacion de las* CUATRO *cifras siguientes por la division abreviada.*

38360	000	28284
10076		13568
1591		
177		
8		
0		

La raiz aproximada en menos de 0,00000001 es 1,41421356.

5.º..... *Determinacion del nuevo resto.*

Producto de 282840000 por 1356 =	383531040000
cuadrado de 1356 =	1838736
suma =	383532878736
que se ha de restar de	383600000000
diferencia........ =	67121264

6.º..... *Determinacion de las* OCHO *cifras siguientes por la division abreviada.* (Se suprimen *siete* ceros en el dividendo como inútiles.)

671212640	282842712
105527216	
20674403	237309506
875414	
26886	
1431	
17	
1	

La raiz aproximada en menos de 0,0000000000000001 es

1,4142135623730950.

7.º..... *Determinacion del nuevo resto.*

Producto de 2828427120000000	
por 23730950 =	67121262563364000000000
cuadrado 23730950 =	563157987902500
suma =	67121262619679797957902500
que se ha de sustraer de	67121264000000000000000
diferencia.... =	13803202012097500

(Siendo esta diferencia menor que la raiz obtenida se deberá inferir (apénd. n.° 8) que la cifra siguiente es menor que 5, aunque en la division precedente se haya hallado 6 por la cifra *borrada* del cociente.)

8.°..... *Determinacion de las* DIEZ Y SEIS *cifras siguientes por la division abreviada.*

Para obtener estas cifras es necesario (pues que se han suprimido todos los ceros inútiles) dividir

$$13803202012097 50 \text{ por } 28284271247 4619,$$

cuidando segun la primera operacion de borrar sucesivamente cada una de las cifras del divisor, partiendo de la derecha. Por otra parte la incertidumbre que pueden ofrecer las últimas cifras de esta operacion acerca de su exactitud basta para que no tomemos en cuenta mas que las doce primeras cifras, y se tendrá

$$\sqrt{2}=1{,}4142135623730950488016887242,$$

aproximada en menos de una unidad del órden 28.° decimal.

La exactitud de este resultado puede comprobarse por los medios que han sido indicados anteriormente.

(Seria necesario formar el duplo del producto de.............. 141421356237 30950 seguido de *doce* ceros por 488016887242, mas el cuadrado de este último número, y sustraer la suma de estas dos partes del resto precedente seguido de *doce* ceros.)

11. La regla abreviada de la estraccion de la raiz cuadrada puede hacerse estensiva á la estraccion de la raiz *cúbica*.

En efecto, la fórmula. $N=(a+b)^3=a+3a^2b+3ab^2+b^3$,
da.................... $N-a^3=3a^2b+3ab^2+b^3$
ó dividiendo los dos miembros por $3a^2$

$$\frac{N-a^3}{3a^2}=b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}.$$

Pero suponiendo que la raiz cúbica de N deba contener $(2n+1)$ cifras y que a represente el valor relativo de las $(n+1)$ primeras cifras de la derecha de esta raiz, y b el de las n últimas, se tiene necesariamente $b<10^n$ y por consiguiente $b^2<10^{2n}$, $b^3<10^{3n}$.

Por otra parte se tiene $a<10^{2n}$, de donde a^2 y *à fortiori* $3a^2<10^{4n}$.

Se ve, pues, 1.° que $\frac{b^2}{a}$ es una fraccion; 2.° que $\frac{b^3}{3a^2}$ es otra fraccion menor que $\frac{1}{10^n}$ y cuyo valor *no puede influir mucho* en la parte entera del cociente de la division de $N - a^3$ por $3a^2$.

De aquí esta regla: cuando se ha hallado mas de la mitad del número de las cifras de una raiz cúbica, basta para obtener las cifras siguientes *dividir la diferencia entre el número propuesto y el cubo de la raiz ya obtenida, considerada con su valor relativo por el triplo del cuadrado de esta misma raiz.* Sin embargo no insistiremos mas sobre las aplicaciones de esta regla, pues apenas se usa.

SEGUNDA PARTE.

12. Hasta aquí hemos supuesto que los números dados sean exactos y que el resultado pedido deba ser obtenido con un grado de aproximacion determinado de antemano, condicion que siempre podrá llenarse. Por ahora vamos á suponer que los números dados no sean mas que aproximados y en esta hipótesis se trata de determinar *à priori* el máximo del grado de aproximacion que puede obtenerse por el resultado de las operaciones que se han de efectuar.

La resolucion de esta cuestion, tal como la acabamos de esponer, la hace indispensable en muchos casos, por ejemplo, cuando hay que operar con logaritmos que no son exactos (como lo hemos esplicado al tratar de su teoría) mas que hasta un órden de decimales determinado.

Principiemos por la *adicion* y la *sustraccion*.

Para fijar las ideas supongamos que en una operacion análoga á la del ejemplo de la página 321 sea necesario sumar entre sí 25 logaritmos ó *complementos* de logaritmos (n.° 268) y que el resultado de esta operacion dé 6,94268, logaritmo cuyo número correspondiente se trata de determinar.

Y como cada uno de los 25 logaritmos añadidos puede estar errado en una cantidad susceptible de elevarse hasta *media unidad* del último órden, resulta que puede sospecharse haber en la suma total un error susceptible de elevarse hasta 12 ó 13 unidades del último órden. Así no solo no deberá tenerse de modo alguno en cuenta la diferencia que hay entre el logaritmo anterior y el logaritmo inmediatamente inferior de las tablas (consecuencia que tiene lugar aun cuando la diferencia tabular sea mayor que 10, véase la Nota del n.° 266, pág. 358); sino que tambien, como no hay medio para determinar definitivamente cuál deba ser la verdadera cifra de las unidades del 4.° órden del número buscado, deberemos conformarnos con hallar por dicho número 8760000, próximamente *una decena de millar*.

El ejemplo que precede basta para indicar lo que deberá hacerse en todos los casos semejantes, por lo que no hablaremos mas acerca de este punto.

13. Antes de pasar á las demás operaciones de la Aritmética, daremos á conocer sobre la multiplicacion un nuevo principio de que haremos uso en adelante.

Sean en general dos números enteros a y b compuestos uno de ellos de m cifras y el otro de n cifras; llamemos P á su producto y propongámonos determinar el número de cifras de este producto.

Desde luego, pues que se tiene $a < 10^m$ pero $> 10^{m-1}$
y $b < 10^n$ pero $> 10^{n-1}$,
resulta (n.° 112) P, ó $ab < 10^{m+n}$ pero $> 10^{m+n-2}$;

lo cual indica que el número de cifras del producto P es todo lo mas igual á $m+n$ y cuando menos á $m+n-1$.

Trátase ahora de saber en qué caso se deberá tener $m+n$ cifras y en cuál $m+n-1$.

Para averiguar esto consideremos á P como un dividendo y á a como á un divisor, y el número b que por hipótesis contiene n cifras será el cociente. Ahora bien, en la division de P por a pueden ocurrir dos casos: ó las m primeras cifras de la izquierda del próducto P componen un número al menos igual á a, ó bien un número menor a.

En el primer caso, como el primer dividendo parcial contiene m cifras, y cada nueva cifra hallada en el dividendo debe dar una nueva cifra en el cociente compuesta de n cifras, es necesario que el número de cifras del dividendo P sea $m+n-1$.

En el segundo será $m+1+n-1$, ó $m+n$.

Por otra parte, lo que acabamos de decir de a considerado como divisor tendria igualmente lugar respecto de b considerado asimismo como divisor.

De aquí se infiere que toda multiplicacion de dos factores, compuesto uno de m cifras y el otro de n, *el número total de las cifras del producto es* $\mathrm{m}+\mathrm{n}-1$, *segun que cualquiera de los factores esté ó no contenido en la parte izquierda del producto considerada con tantas cifras como contiene el factor que se compara con el producto.*

14. Esto supuesto, pasemos á la multiplicacion; y para mayor sencillez consideremos desde luego el caso en que haya que multiplicar uno por otro dos números compuestos de unidades enteras: de aquí ya será fácil pasar al caso en que son fracciones decimales, pues su multiplicacion se reduce á la de los números enteros mediante una simple trasposicion de la coma.

Para generalizar la cuestion elejiremos dos números enteros compuestos el uno de m cifras y el otro de n cifras (siendo $m > n$) y supuestos ambos errados en media unidad del primer órden (*en mas ó en menos*)*.

---

* Para determinar las cifras exactas del producto podrán *multiplicarse los números propuestos despues de haberlos aumentado y disminuido alternativamente en media unidad del órden de la última*

Segun las reglas ordinarias de la multiplicacion * es claro que el producto total puede estar errado:

1.° En la mitad de todo el multiplicando, y este error está generalmente espresado por un número m de cifras;

2.° En la mitad de todo el multiplicador, error que está representado por un número n de cifras;

3.° En la mitad del producto $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{4}$. (Los dos últimos errores comparados al primero pueden despreciarse, segun la hipótesis $m < n$.)

De donde se infiere que las m últimas cifras de la derecha del producto pueden estar erradas.

Así *en toda multiplicacion de dos números cuya última cifra de la derecha está errada en media unidad, el producto puede tener tantas cifras erradas á la derecha como contiene el número mayor.*

El error cometido es menor que $\frac{10^m}{2}$ si se tiene $m > n$; y el límite de este error es 10^m cuando $m = n$.

15. Cuando de los dos factores dados, el uno es exacto y el otro errado *en media unidad* del primer órden, *el número de cifras equivocadas del producto es igual al número de cifras del factor exacto*, pues que el error cometido se estima por lo regular en la mitad de dicho factor.

16. Hagamos algunas aplicaciones; y sean *por primer ejemplo* los dos números 87564219 y 64327.

El error cometido en esta multiplicacion puede ser valuado del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{lrl} 1.^{\circ} & 87564219 \times \frac{1}{2} = & 43782109\,\frac{1}{2} \\ 2.^{\circ} & 64327 \times \frac{1}{2} = & 32163\,\frac{1}{2} \\ 3.^{\circ} & \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = & \frac{1}{4} \end{array}\right\} = 43814273\,\frac{1}{4}$$

---

cifra de la derecha, y tomar en seguida las cifras comunes á los dos resultados. Pero este modo de operar es muy penoso y complicado, por lo cual le sustituimos otro medio tan seguro como este, y que vamos á esponer.

* Llamando a y b á los dos números dados, $\pm e$, $\pm f$ á los dos errores cometidos, se tiene

$$(a \pm e)(b \pm f) = ab \pm af \pm be \pm ef.$$

número compuesto de *ocho* cifras. Así en el producto total las cifras que siguen á las *centenas de millon* deben ser despreciadas como siendo por lo regular erradas, y entonces la parte de la izquierda indica el producto aproximado en menos de *media centena de millon*.

En este ejemplo es lícito no hacer la multiplicacion por entero, y sí solo limitarse á determinar (apénd. n.º 13) el producto aproximado en cerca de una unidad del órden de *las centenas de millon*.

$$
\begin{array}{r}
87564219 \\
72846 \\
\hline
525385 \\
35025 \\
2626 \\
175 \\
60 \\
\hline
56327
\end{array}
$$

El resultado 56237 considerado como representando millones espresa el valor del producto pedido en menos de *media centena de millon próximamente*, de lo cual se puede estar seguro efectuada la multiplicacion por completo.

Sea *por segundo ejemplo* multiplicar 32,470563 por 8,70345, estando errados cada uno de estos números *al menos en media unidad* del órden de la última cifra decimal.

En virtud de lo que hemos dicho en el n.º 89 se debería hacer abstraccion de la coma y separar en el producto once cifras decimales hácia la derecha. Pero conforme á lo establecido en el n.º 14 de este Apéndice deben considerarse como erradas las *ocho* últimas cifras del producto, y así el resultado no podrá ser exacto, mas que en menos de *media milésima* próximamente. La cuestion, pues, queda reducida á valuar el producto de las dos fracciones decimales en *una milésima* de aproximacion.

$$
\begin{array}{r}
32,470563 \\
54\ 3078 \\
\hline
259\ 7644 \\
22\ 7293 \\
974 \\
129 \\
16 \\
\hline
282\ 6056
\end{array}
$$

El producto es 282,606 próximamente *media milésima*.

Sea propuesto *por tercer ejemplo* multiplicar

0,0001083 por 0,05836.

Desde luego se ve (n.° 89) que el producto debe contener 7 + 5 ó 12 cifras decimales; pero como en virtud del número precedente las *cuatro* últimas cifras decimales son inexactas, resulta que este producto puede ser calculado con *ocho* cifras decimales, y la última cifra de la derecha no será inexacta mas que en *media unidad*, ó todo lo mas en *una* del órden de dicha cifra.

Así por el método abreviado (apénd. n.° 1) se obtiene 0,00000579 por el valor del producto pedido.

17. Observacion.—El principio establecido (apénd. n.° 13) sobre el número total de cifras de un producto da lugar á un nuevo enunciado de la regla relativa á la multiplicacion de dos números aproximados.

Puesto que en un producto de dos factores, compuesto el uno de m cifras y el otro de n cifras, el número total de ellas es $m + n - 1$, ó $m + n$, y que en la hipótesis en que la última cifra de cada factor no es mas que aproximada, el número de cifras del producto que deben ser escluidas, siendo generalmente defectuosas, está (apénd. n.° 14) espresado por m (siendo m al menos igual á n), se sigue necesariamente que *el número de cifras de un producto que se pueden tomar en cuenta, es* (n — 1) *ó* n *segun que cualquiera de los factores esté ó no contenido en la parte izquierda del producto tomada con tantas cifras como tiene el factor que se compara con el producto.*

Cuando de dos factores dados el que contiene m cifras es exacto y el otro está errado en *media unidad* del órden de la última cifra de la derecha, *el número de cifras del producto que se pueden tomar en cuenta es asimismo* (n — 1) *ó* n, *pues que el de las cifras inexacto está* (apénd. n.° 15) *representado por* m.

Este nuevo enunciado no puede por lo general emplearse *à priori* para la multiplicacion, pues para saber si el número de cifras que deban tomarse en cuenta en el producto es $(n - 1)$ ó n, es necesario conocer las primeras cifras de la izquierda de este producto. Mas no por esto dejará de conocerse que nos será de mucha utilidad en la division, cuando tanto el producto como uno de los factores se da *à priori*.

18. *En la division* de los números aproximados tienen lugar tres hipótesis: O *siendo el dividendo aproximado* el divisor es exacto; ó viceversa, *siendo el divisor aproximado* el dividendo es exacto; ó finalmente *dividendo y divisor son aproximados.*

Primera hipotesis.—Consideremos dos números enteros de los que solo uno se suponga inexacto en *media unidad* del órden de las unidades simples, y concibamos que el cociente de su division haya sido desarrollado en un número indefinido de cifras decimales segun el procedimiento ya conocido.

Llamemos m al número de cifras del divisor, n al número de cifras del cociente (partiendo de la primera cifra significativa de la izquierda), con cuya exactitud se puede contar en razon del error que se halla en el dividendo, y p al número total de cifras del dividendo empleadas para la determinacion de las n cifras del cociente. Este número p puede ser descompuesto en dos partes p' y p'', de las que la primera es el número de las cifras del dividendo primitivo, y la segunda el de los ceros que ha sido necesario escribir á la derecha de este dividendo; de modo que se tenga

$$p = p' + p''.$$

Esto supuesto, si del dividendo cuyo número de cifras es p se sustrae la parte correspondiente á la cifra n del cociente (parte que todo lo mas podrá tener m cifras), la diferencia compuesta igualmente de p cifras, será igual al producto de las m cifras del divisor por las n cifras del cociente; y se tendrá en virtud del principio establecido en el n.º 13 del apéndice

$$p + p = m + n - 1, \text{ ó } p' + p'' = m + n,$$

segun que las m cifras del divisor esten ó no contenidas en las m primeras cifras de la izquierda del dividendo.

Ahora bien, como al divisor se le ha supuesto un factor exacto, resulta (n.º 15) que el número total de cifras inexactas del producto del divisor por el cociente está espresado por m. Por otra parte lo estará tambien por $p'' + 1$, pues que por hipótesis la última cifra del dividendo primitivo es inexacta, y las siguientes en número de p'' lo son tambien. Así se tiene $m = p'' + 1$, lo cual da sustituyendo este valor de m en las dos relaciones anteriores

$$p' = 1 + n - 1 = n, \text{ de donde } n = p',$$
ó bien
$$p'' = 1 + n, \text{ de donde } n = p' - 1.$$

Ya podemos inferir que *el número de cifras del cociente que se pueden tomar en cuenta es igual al número de cifras del dividendo propuesto ó á este número* MENOS UNO, *segun que el divisor esté ó no contenido en las* m *primeras cifras del dividendo* (partiendo de la primera cifra significativa del cociente).

19. Espliquemos esta regla prácticamente.

Propongámonos, *en primer lugar*, dividir 3745687 por 5638, siendo exacto el divisor y errada en *media unidad* la última cifra de la derecha del dividendo.

Como el divisor no está contenido en las *cuatro* primeras cifras de la izquierda del dividendo y este contiene *siete* cifras, resulta que en la operacion podrán tenerse en cuenta las *seis* primeras cifras de la izquierda del cociente. Por otro lado es evidente que la parte entera del cociente debe contener *tres* cifras; y por tanto el cociente puede ser calculado en 0,001 próximamente.

3745687	5638
36288	664,364
24607	
20550	
36360	
25320	
2768	

El cociente pedido es 664,364 hallado en menos de *media milésima* de aproximacion.

Se ve efectivamente que siendo inexacta en *media unidad* simple la última cifra del dividendo propuesto y siendo el divisor mayor que 1000, el error cometido debe ser menor que $\frac{0,001}{2}$.

Hay mas: como el duplo de 5638 escede á 10000, se puede hacer estensiva la operacion hasta las 10000.as, y se tendrá el valor del cociente en menos de *media milésima* próximamente. Pero esta circunstancia es puramente accidental, y no deberá contarse mas que con las cifras dadas por la regla anterior.

Propongámonos, *por nuevo ejemplo*, dividir 873 por 3765847.

Puesto que teniendo el dividendo *tres* cifras, y el divisor *siete* está contenido en 8730000, resulta que el número de cifras del cociente que se pueden tener en cuenta es *tres*. Por otra parte, como para principiar la division se debe escribir *cuatro* ceros á la derecha del dividendo, por precision la cifra de las unidades y las tres primeras cifras decimales serán ceros. La última cifra de la derecha espresará *millonésimas*.

Como que el divisor se compone de un crecido número de cifras, se podrá aplicar el método abreviado de la division (apénd. n.º 7).

Así se halla por resultado 0,000232, próximamente *media millonésima*.

Sea propuesto, *por tercer ejemplo*, dividir 37,5 por 0,2983.

Teniendo *tres* cifras el dividendo y estando el divisor (hecha abstraccion de la coma) contenido en las cuatro primeras cifras del dividendo, resulta que se podrán tener *tres* cifras en cuenta en el cociente. Y como por otra parte la division de los dos números propuestos se reduce á la de 375000 por 2983, que da *tres* cifras por la parte entera del cociente, se sigue que el cociente pedido en toda la mayor aproximacion con que puede ser obtenido es en menos de *media unidad* próximamente.

Dividiendo 375000 por 2983 se obtiene 126 por resultado, y la operacion no puede llevarse mas adelante.

Nota.—Como en este ejemplo hemos reducido la division á la de

375000 por 2938 y el divisor es mayor que 1000, podria creerse ser el error cometido en el cociente menor que 0,001. Mas para reducir á este estado la operacion ha sido necesario multiplicar 37,5 por 10000 ó 375 por 1000; luego el error de la última cifra 5 ha sido multiplicado tambien por 1000, y así solo se podrá asegurar que dicho error sea menor que la mitad de 0,001 + 1000 ó que *media unidad* del órden de los enteros.

20. Segunda hipotesis.—Sean A y a dos números enteros que se han de dividir uno por otro, m el número de cifras del divisor a, cuya última de la derecha puede ser inexacta en media unidad (*por esceso ó por defecto*); y propongámonos determinar un límite al error cometido cuando se calcula con cierto número de cifras el cociente q.

Se tiene evidentemente q ó $\frac{A}{a} < \frac{A}{a-\frac{1}{2}}$, pero sí $> \frac{A}{a+\frac{1}{2}}$; de donde representando por e el error cometido cuando se toma $\frac{A}{a-\frac{1}{2}}$, ó bien $\frac{A}{a-\frac{1}{2}}$ por el valor de q,

$$e < \frac{A}{a-\frac{1}{2}} - \frac{A}{a+\frac{1}{2}} < \frac{A}{a^2+\frac{1}{4}},$$

espresion que puede ponerse bajo esta otra forma:

$$e < \frac{\frac{A}{a}}{a-\frac{1}{4a}} \text{ ó } e < \frac{q}{a-\frac{1}{4a}}$$

Este resultado demuestra que el error no influirá siquiera en una unidad en la última cifra del cociente, de modo que se tendrá $q < a$. Pero para que así sea es necesario *en primer lugar* que el cociente buscado no contenga mas que m cifras; y *en segundo* que el mayor número de cifras que se puedan colocar en el cociente de modo que satisfaga á esta condicion sea m ó $(m-1)$, segun que las m primeras cifras de este cociente formen un número menor ó mayor que las m cifras del divisor.

Infiérese de aquí en general, que siempre que el divisor sea aproximado y el dividendo exacto, *el número de cifras del cociente que se* *pueden tomar en cuenta es igual al número de cifras del divisor ó á este número* MENOS UNA, *segun que las* m *cifras obtenidas en el cociente formen un número menor ó mayor que el divisor.*

Hagamos algunas aplicaciones.

Sea propuesto, *por primer ejemplo*, dividir 547 por 8769.

Como la primera cifra de la izquierda del cociente debe ser un 6, resulta necesariamente que las cuatro primeras formarán un número menor que el divisor, y por tanto segun la regla anterior podrá calcularse el cociente con cuatro cifras. Por otra parte la reduccion de este cociente á decimales no da ni *unidades simples* ni *decenas*; luego puede ser hallado con *cinco* cifras decimales, y se tendrá 0,06237, ó mas bien 0,06238 (porque la cifra siguiente seria 8) por el cociente aproximado en menos de *media cienmilésima*.

Propongámonos, *por segundo ejemplo*, dividir 547 por 1548.

Aquí la primera cifra de la izquierda del cociente debe ser un 3, lo cual prueba que las *cuatro* primeras cifras del cociente deben formar un número superior al divisor, y por consiguiente conforme á la regla anterior no se deberán tener en cuenta mas que *tres* cifras; además la parte entera de este cociente reducido á decimales es un 0. Así su valor puede obtenerse aproximado en menos de 0,001; y se halla 0,353 por el resultado pedido.

Consideremos ahora dos quebrados decimales.

Sea propuesto, *por tercer ejemplo*, dividir 23,479 por 534,7896.

Como el divisor tiene *siete* cifras y la primera de la izquierda del cociente debe ser un 4, se sigue que el cociente puede tener *siete* cifras (partiendo de la primera cifra significativa de la izquierda), que pueden tomarse en cuenta; y como por otra parte se necesitan evidentemente *tres* ceros para principiar la division, lo cual prueba que la cifra de las *unidades* y la de las *decenas* son ceros, resulta necesariamente que el cociente deberá tener *ocho* cifras decimales. Así en este ejemplo se puede proponer valuar el cociente en menos de 0,00000001 de aproximacion.

En efecto, si permaneciendo uno mismo el dividendo se toman sucesivamente por divisores los números

534,78955, . . . 534,7896, . . . 534,78965,

y se aplica el método abreviado del n.º 7, se tendrá por los respectivos resultados

0,04440812**8**, . . 0,04440811**9**, . . 0,04440811**5**:

lo cual prueba que 0,04440812 es el valor del cociente hallado en menos de *media cienmillonésima* de aproximacion.

21. TERCERA Y ULTIMA HIPOTESIS.—Finalmente si dividendo y divisor son inexactos por la última cifra de la derecha, *el número de*

cifras del cociente que se puedan tomar en cuenta es igual al menor de los dos números que den las reglas relativas á las dos primeras hipótesis.

Propongámonos, *por primer ejemplo*, dividir 356,3749 por 2,47936.

La regla del n.° 18 daria *siete* cifras, pero la del n.° 10 da *seis* (pues que la primera cifra de la izquierda del cociente es 1); luego el número de las cifras del cociente que deberán tomarse en cuenta es *seis*, y como además la parte entera del cociente debe contener *tres*, resulta que este cociente no puede aproximarse más que en *una milésima* próximamente.

Efectuada la division se obtiene por resultado 143,736.

Sea propuesto, *por segundo ejemplo*, dividir el logaritmo de 15 por el de 7.

Se halla en las tablas

$$\log.\ 15 = 1,17609 \text{ y } \log.\ 7 = 0,84510.$$

(Estos dos logaritmos son exactos en menos de media unidad próximamente del órden de la 5.ª cifra decimal.)

Ahora bien, la aplicacion de cada una de las dos reglas da igualmente *cinco* por el número de cifras del cociente que pueden tomarse en cuenta; y además la parte entera debe tener *una sola* cifra significativa; luego este cociente puede obtenerse aproximado en menos de *una diezmilésima*, y se halla

$$\frac{\log.\ 15}{\log.\ 7} = \frac{117609}{84510} = 1,3916.$$

NOTA.—Esta última cuestión sirve de base en el Algebra para la resolucion de las ecuaciones esponenciales. (Véase además el n.° 277 de la *Aritmética*.)

22. Fáltanos hablar de la estraccion de la raiz cuadrada de los números aproximados.

Consideremos un número entero cualquiera A cuya última cifra de la derecha sea inexacta en *media unidad*, y concibamos que su raiz cuadrada se haya desarrollado en un número indefinido de cifras decimales por el procedimiento que ya conocemos. Llamemos n al número de cifras de esta raiz que pueden tomarse en cuenta, y p al número total de las cifras del cuadrado empleadas en la determinacion de las n cifras de la raiz; en este caso ó el número de cifras de A es *impar* ó *par*.

En el primer caso, como resulta de la misma naturaleza del procedimiento de la raiz cuadrada de un número entero que las n primeras cifras de la izquierda de la raiz forman un número menor que las n primeras cifras del cuadrado, se tiene necesariamente (n.º 13)

$$p = 2n - 1 = n + n - 1,$$

ó representando por p' el número de cifras de A y por p'' el número de ceros escritos á la derecha de A para la determinacion de las n primeras cifras de la raiz,

$$p' + p'' = n + n - 1,$$

Observemos ahora que en la múltiplicacion de la raiz por sí misma (supuesta la última cifra inexacta en *media unidad*), el producto contiene (n.º 14) n cifras inexactas. Por otra parte el número de cifras inexactas de este mismo producto está espresado por $p'' + 1$, pues que la última cifra de A es inexacta y se tiene lo mismo respecto de los p'' ceros escritos á la derecha de A: así se tiene $n = p'' + 1$, y la igualdad precedente se convierte en esta:

$$p' + p'' = p'' + 1 + n - 1; \text{ de donde } n = p'.$$

En el segundo caso, como las n primeras cifras de la izquierda de la raiz forman un número mayor que las n primeras cifras de la izquierda del cuadrado, se tiene entre p y n la relacion

$$p = 2n = n + n,$$

ó poniendo en vez de p, $p' + p''$ y observando que el número de cifras inexactas del cuadrado de la raiz está asimismo espresado por n y por $p'' + 1$,

$$p' + p'' = p'' + 1 + n; \text{ de donde } n = p' - 1.$$

Luego en general: *El número de cifras que se pueden tomar en cuenta en el desarrollo de* $\sqrt{A}$ *en decimales es igual al número de cifras de* A *ó á este número* MENOS UNO, *segun que* A *contenga un número* IMPAR *ó* PAR *de cifras.*

23. NOTA.—La regla que precede es aplicable en todo su sentido cuando el número de cifras de A es *impar*; mas si por el contrario es *par*, puede recibir una modificacion muy importante.

Para conocerla aumentaremos y disminuiremos á A alternativamente en *media unidad* del órden de la última cifra de la derecha, y propongámonos valuar la diferencia Δ que existe entre $\sqrt{A+\frac{1}{2}}$ y $\sqrt{A-\frac{1}{2}}$.

Se tendrá conforme á las reglas algebráicas

$$\Delta = \sqrt{A+\frac{1}{2}} - \sqrt{A-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{A}} + K,$$

siendo K una pequeña fraccion que puede despreciarse respecto de $\frac{1}{2\sqrt{}}$.

Así la diferencia Δ está en la realidad representada por la espresion $\frac{1}{2\sqrt{A}}$.

Esto demuestra que si se redujese $\sqrt{A+\frac{1}{2}}$ y $\sqrt{A-\frac{1}{2}}$ á decimales segun el procedimiento conocido, las dos presiones resultantes tendrian una parte comun tal, que la unidad de la última cifra inmediata á esta parte seria menor que $\frac{1}{2\sqrt{A}}$.

Esto sentado, supongamos A compuesto de un número *impar* de cifras espresado por $2p+1$; lo cual supone $p+1$ periodos de dos cifras (de los que el primero de la izquierda solo contiene una). Despues de haber calculado las $p+1$ primeras de la raiz, se puede segun el procedimiento ordinario determinar las p cifras siguientes, bien por dicho procedimiento, ó por el método abreviado del n.º 8; y el error cometido siendo menor que $\frac{1}{2 \cdot 10^p}$ no influirá siquiera en una unidad en la cifra del órden $2p+1$. Así en este caso se podrán tomar en cuenta $2p+1$ cifras.

Ahora, si A contiene un número *par* de cifras 2 y se tiene $\frac{1}{2\sqrt{A}}$ menor que $\frac{1}{10^p}$, se podrá estar seguro de la exactitud de las p cifras siguientes que da el método abreviado: esto tiene lugar cuando la primera cifra de la izquierda de $\sqrt{A}$ es igual ó superior á 5. Pero esta circunstancia se halla aquí de modo que es fácil reconocerla siempre que el primer periodo de la izquierda del número propuesto es 25 ó mayor que 25.

De aquí se infiere que en el caso en que el número de cifras de A es PAR, *el número de cifras que se pueden tomar en cuenta es igual al número de cifras de* A *ó á este número* MENOS UNO, *segun que el primer periodo de la izquierda sea igual ó superior á* 25 ó bien *menor que* 25.

24. PRIMER EJEMPLO.—Estraer la raiz cuadrada del número 57806.

Como este número tiene *cinco* cifras, resulta que su raiz cuadrada puede calcularse con *cinco* cifras, y pues que la parte entera debe contener *tres*, esta raiz puede obtenerse aproximada *en menos de una centésima.* Así se halla por resultado 240,42, ó mas bien 240,43, porque la cifra siguiente seria un 8.

SEGUNDO EJEMPLO.—Hallar la raiz cuadrada del número 73854986.

Teniendo *ocho* cifras este número de las que las dos primeras de la izquierda esceden á 25, resulta (n.° 23) que se pueden hallar *ocho* cifras en la raiz, y como la parte entera debe contener *cuatro*, la raiz podrá obtenerse aproximada en *menos de una diezmilésima.*

Así se obtiene 8593,8924 por la raiz pedida.

Consideremos ahora la aplicacion de esta regla á los quebrados decimales.

TERCERO Y CUARTO EJEMPLO.—Valuar $\sqrt{8,256479}$ y $\sqrt{23,567846}$.

En virtud de la regla del n.° 186 será necesario hacer abstraccion de la coma, y despues de hallada la raiz dividir cada uno de los dos resultados por 100.

Pero en la investigacion de las raices cuadradas de 8256479 y 23567846 la aplicacion de la regla del n.° 23 da *siete* por el número de cifras que se pueden tomar en cuenta, y además la parte entera de la raiz cuadrada de los números propuestos no debe tener mas que *una sola* cifra; luego las raices pueden obtenerse con *seis cifras* decimales.

Resulta pues, $\sqrt{8,256479} = 2,873409,$

y $\sqrt{23,567846} = 4,854673.$

QUINTO Y SESTO EJEMPLO.—Valuar $\sqrt{6,73543}$ y $\sqrt{4,737596}$.

Conforme á la regla del n.° 186 se hará *par* el número de cifras decimales colocando *un cero* á la derecha de cada uno de estos números, y despues de haber estraido las raices cuadradas de los números 673543 y 4737596 (haciendo abstraccion de la coma) dividir estas raices por 100.

Pero como el primer periodo de la izquierda de 6735430 no tiene mas que *una sola* cifra, será necesario aplicar la primera parte de la regla del n.º 22, no tomando en cuenta la última cifra de la derecha, pues que es inexacta, y en este caso el número de cifras exactas de la raiz será *seis*. Además la parte entera de la raiz no debe tener mas que *una sola* cifra; luego la raiz pedida puede calcularse con *cinco* cifras decimales y se tiene

$$\sqrt{6,73543} = 2,59527.$$

Asimismo como el primer periodo de la izquierda de 4,737566 se compone de *dos* cifras, es necesario aplicar la regla del n.º 23, no contando la última cifra de la derecha por ser inexacta, y el número de cifras decimales que pueden tomarse en cuenta en la raiz es *siete* (pues que el primer periodo de la izquierda escede á 25). Además la parte entera de la raiz del número propuesto no puede tener mas que *una sola* cifra: así esta raiz puede calcularse con *seis* cifras decimales, y se tiene

$$\sqrt{47,37596} = 6,883020.$$

Nota. — Se puede comprobar la exactitud de los resultados obtenidos anteriormente aumentando ó disminuyendo en media unidad la última cifra de cada número, y operando sucesivamente sobre cada uno de los nuevos números.

25. Observacion. — 1.º Del análisis de los cuatro últimos ejemplos resulta una consecuencia muy importante, y es que todas las veces que la parte entera de un número fraccionario decimal cuya raiz cuadrada se pide está compuesta de una ó de dos cifras solamente, *el número total de cifras decimales que pueden tomarse en cuenta en la raiz es* al menos *igual al número de cifras decimales que contiene la fraccion propuesta.*

2.º Cuando la parte entera del número propuesto contiene *mas de dos* cifras, el número de cifras decimales que pueden tomarse en cuenta en la raiz *escede siempre* al de las cifras decimales que contiene el número propuesto.

Sean n el número de periodos de dos cifras que contiene la parte entera del número propuesto (el último periodo de la izquierda pudiendo no tener mas que una sola) y p el número de cifras decimales contenidas en el propuesto: *el número de cifras decimales que se pueden tomar en cuenta está espresado generalmente por* $n - 1 + p$.

(Este número es $n + p$ cuando el primer periodo de la izquierda consta de dos cifras y escede á 25.)

3.º Cuando por el contrario se trata de una fraccion decimal propiamente dicha, el número de cifras decimales que pueden tomarse en cuenta *puede ser menor que el número de cifras decimales de la fraccion propuesta*, y esto tiene lugar cuando las cifras que siguen inmediatamente á la coma son ceros, ó bien cuando siendo *par* el número de cifras decimales, el primer periodo de la izquierda es inferior á 25.

En cualquier otro caso *el número de cifras decimales es el mismo que el del número propuesto.*

26. Sobre esta última observacion se fundan los cálculos relativos á la determinacion de la relacion de la circunferencia al diametro; y para que este Apéndice sea lo mas completo posible concluiremos las aproximaciones numéricas por *el desarrollo de los polígonos regulares isoperímetros.* Este método que se halla en la *Geometría* de M. Vincent reasume en sí mismo en algun modo todos los principios establecidos en la nota anterior.

Sean R y r el radio y apotecma del cuadrado cuyo lado es igual á 1; R' y r' el radio y apotecma del octágono regular isoperímetro con el cuadrado; R'', r'', el radio y apotecma del polígono regular de seis lados isoperímetros con los dos anteriores; y así sucesivamente.

Con arreglo al método anteriormente citado se tienen las fórmulas

$$r'=\frac{R+r}{2},\quad R'=\sqrt{Rr'}.$$

Esto supuesto, pues que 1 es el lado del cuadrado, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\frac{1}{2}$ serán los valores de R y de r. Así se tiene

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{2}=0{,}707106781\ (\sqrt{2}=1{,}414213562,\text{ apénd. n.}^{\text{o}}\ 8).$$

$$r=\frac{1}{2}=0{,}5;$$

lo que da
$$r'=\frac{R+r}{2}=0{,}603553890$$

$$R'=\sqrt{Rr'}=\sqrt{0{,}707106781\times 0{,}603553890}.$$

Para efectuar este último cálculo observemos que cada uno de los dos factores debajo del radical, siendo exactos en menos de media unidad del órden de la última cifra de la derecha, el producto correspondiente puede ser el mismo (n.° 14) valuado en menos de una unidad del órden de esta última cifra segun el método abreviado del n.° 2. Así se obtiene

$$R'=\sqrt{0{,}426776695}.$$

Ahora bien, puesto que el número cuya raiz cuadrada se quiere estraer es una fraccion decimal en que el primer periodo de la izquierda escede á 25, se sigue (apénd. n.º 23) que esta raiz pnede ser obtenida con *nueve* cifras decimales, y aplicando el método ordinario para la determinacion de las *cinco* primeras y además el método abreviado del n.º 8 para las *cuatro* siguientes, se halla

$$R' = 0{,}653281482.$$

Pasemos á la determinacion de R'' y de r''. Se tiene

$$r'' = \frac{R' + r'}{2} = \frac{0{,}603553390 + 0{,}653281480}{2} = 0{,}628417436,$$

$$\text{y } R'' = \sqrt{R'r''} = \sqrt{0{,}653281482 \times 0{,}628417436}$$

y operando sobre esta espresion como sobre la de R' se encuentra

$$R'' = 0{,}640728862.$$

Y así sucesivamente.

He aquí además la tabla de las operaciones hechas estensivas hasta los radios R^{XII} y r^{XIII}:

LADO DEL CUADRADO IGUAL A 1.

$$\left.\begin{array}{lll} R & = \frac{1}{2}\sqrt{2} & = 0{,}707106781 \\ r & = \frac{1}{2} & = 0{,}50000000 \end{array}\right\} 1{,}207106781,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r' & = \dfrac{R+r}{2} & = 0{,}603553390 \\ R' & = \sqrt{R.r'} & = 0{,}653281482 \end{array}\right\} 1{,}266834872,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r'' & = \dfrac{R'+r'}{2} & = 0{,}628417436 \\ R'' & = \sqrt{R'.r''} & = 0{,}640728862 \end{array}\right\} 1{,}269146298,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r''' & = \dfrac{R''+r''}{2} & = 0{,}634573149 \\ R''' & = \sqrt{R''.r'''} & = 0{,}637643577 \end{array}\right\} 1{,}272216726,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\text{IV}} & = \dfrac{R'''+r'''}{2} & = 0{,}636108363 \\ R^{\text{IV}} & = \sqrt{R'''.r^{\text{IV}}} & = 0{,}636875507 \end{array}\right\} 1{,}272983870,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\mathrm{v}} = \dfrac{\mathrm{R}^{\mathrm{iv}} + r^{\mathrm{iv}}}{2} & = 0{,}636491935 \\ \mathrm{R}^{\mathrm{v}} = \sqrt{\mathrm{R}^{\mathrm{iv}} \,.\, r^{\mathrm{v}}} & = 0{,}636683692 \end{array}\right\} 1{,}273175627,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\mathrm{vi}} = \dfrac{\mathrm{R}^{\mathrm{v}} + r^{\mathrm{v}}}{2} & = 0{,}636587813 \\ \mathrm{R}^{\mathrm{vi}} = \sqrt{\mathrm{R}^{\mathrm{v}} \,.\, r^{\mathrm{vi}}} & = 0{,}636635751 \end{array}\right\} 1{,}273223564,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\mathrm{vii}} = \dfrac{\mathrm{R}^{\mathrm{vi}} + r^{\mathrm{vi}}}{2} & = 0{,}636611782 \\ \mathrm{R}^{\mathrm{vii}} = \sqrt{\mathrm{R}^{\mathrm{vi}} \,.\, r^{\mathrm{vii}}} & = 0{,}636623766 \end{array}\right\} 1{,}273235548,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\mathrm{viii}} = \dfrac{\mathrm{R}^{\mathrm{vii}} + r^{\mathrm{vii}}}{2} & = 0{,}636617774 \\ \mathrm{R}^{\mathrm{viii}} = \sqrt{\mathrm{R}^{\mathrm{vii}} \,.\, r^{\mathrm{viii}}} & = 0{,}636620770 \end{array}\right\} 1{,}273238544,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\mathrm{ix}} = \dfrac{\mathrm{R}^{\mathrm{viii}} + r^{\mathrm{viii}}}{2} & = 0{,}636619272 \\ \mathrm{R}^{\mathrm{ix}} = \sqrt{\mathrm{R}^{\mathrm{viii}} \,.\, r^{\mathrm{ix}}} & = 0{,}636620021 \end{array}\right\} 1{,}273239293,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\mathrm{x}} = \dfrac{\mathrm{R}^{\mathrm{ix}} + r^{\mathrm{ix}}}{2} & = 0{,}636619646 \\ \mathrm{R}^{\mathrm{x}} = \sqrt{\mathrm{R}^{\mathrm{ix}} \,.\, r^{\mathrm{x}}} & = 0{,}636619833 \end{array}\right\} 1{,}273239479,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\mathrm{xi}} = \dfrac{\mathrm{R}^{\mathrm{x}} + r^{\mathrm{x}}}{2} & = 0{,}636619739 \\ \mathrm{R}^{\mathrm{xi}} = \sqrt{\mathrm{R}^{\mathrm{x}} \,.\, r^{\mathrm{xi}}} & = 0{,}636619786 \end{array}\right\} 1{,}273239525,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\mathrm{xii}} = \dfrac{\mathrm{R}^{\mathrm{xi}} + r^{\mathrm{xi}}}{2} & = 0{,}636619762 \\ \mathrm{R}^{\mathrm{xii}} = \sqrt{\mathrm{R}^{\mathrm{xi}} \,.\, r^{\mathrm{xii}}} & = 0{,}636619774 \end{array}\right\} 1{,}273239536,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\mathrm{xiii}} = \dfrac{\mathrm{R}^{\mathrm{xii}} + r^{\mathrm{xii}}}{2} & = 0{,}636619768 \\ \mathrm{R}^{\mathrm{xiii}} = \sqrt{\mathrm{R}^{\mathrm{xii}} \,.\, r^{\mathrm{xiii}}} & = 0{,}636619771 \end{array}\right\} 1{,}273239539.$$

Resulta de la inspeccion de los valores de r^{xiii} y $\mathrm{R}^{\mathrm{xiii}}$ que si en cada uno de ellos se desprecia la última cifra de la derecha se tiene 0,63661977 por el valor de cada radio aproximado en menos de media unidad del órden de la última cifra de la derecha.

Dividiendo ahora el perímetro constante 4 por el número aproximado 0,63661977, y aplicando la regla del n.º 20, se halla 6,2831853 por la relacion de la circunferencia al radio en menos de 0,0000001 próximamente, ó bien

$$3{,}1415926$$

por la de la circunferencia al diámetro.

NOTA. — Es de advertir que para hallar esta relacion en menos de una unidad de un órden decimal determinado es necesario, siguiendo la marcha anterior, calcular con dos cifras mas que las que se quieran obtener en el resultado. Se continuan las operaciones hasta que los dos radios no difieran entre sí mas que en una cantidad menor que la mitad de la unidad del órden de la penúltima cifra de la derecha. Se desprecia la última cifra y se divide el perímetro constante por el valor de uno de los radios, haciendo abstraccion de dicha última cifra y aumentando, si necesario fuese, á la penúltima.

FIN DEL APENDICE SOBRE LAS APROXIMACIONES NUMERICAS.

COLECCION

DE PESAS, MEDIDAS Y MONEDAS.

CAPITULO UNICO.

Pesas, medidas y monedas legales de España.— Pesas y medidas no legales que estan en uso en algunas provincias. — Correspondencia del nuevo sistema métrico francés con las medidas, pesas y monedas legales de España, y de estas con aquel.—Correspondencia de las pesas, medidas y monedas estranjeras con las legales de España.

Si el autor de este Tratado creyó oportuno hacer en él una esposicion del nuevo sistema métrico francés, nosotros al traducirle y ofrecerle como testo á la juventud española creemos tambien muy útil y conveniente dar á conocer con toda la estension y claridad que nos sea posible el SISTEMA DE MEDIDAS, PESOS Y MONEDAS españolas; con tanta mas razon cuanto que su disformidad á consecuencia de no estribar sobre una base fija, y por decirlo así, tomada de la misma naturaleza, y el no regir igualmente en toda España, pues le vemos variar en la mayor parte de las provincias y á veces en cada pueblo de ellas, son causas harto poderosas para que no echemos en olvido el tratar de una parte del Comercio tan conexa á la ciencia de los números y cuyo conocimiento es tan necesario á todas las clases de la sociedad y muy especialmente á la mercantil.

Amantes de las ciencias y de sus adelantos y conformes con el parecer de varios escritores respetables por su instruccion, no dudamos un momento en elogiar la sábia conducta del gobierno francés al autorizar por ley de 4 de julio de 1837 promulgada en 8 del mismo mes y año el uso del *sistema métrico decimal* con esclusion de cualquiera otro en la monarquía francesa, sistema que honra en gran manera á sus autores y que es una prueba auténtica de los rápidos progresos de esa feliz y envidiada nacion.

Deploramos asimismo el ningun resultado que desgraciadamente tuvo la asamblea de los diputados de España, Dinamarca, la República Helvética, Bátava, Cisalpina, Romana, Liguriana y del Gobierno provisional del Piamonte habida en París á instancias del Instituto nacional para la adopcion de un sistema uniforme de pesos y medidas comun á estas naciones, y además al emitir nuestra pobre opinion sobre el particular nos atrevemos á decir que la Europa entera daria una prueba manifiesta de civilizacion y cultura, así como de interés por su prosperidad, adoptando en todas sus naciones el sistema métrico decimal francés; pues él solo reasume en sí las circunstancias que imperiosamente exigen los adelantos del siglo, los intereses del comercio y la prosperidad de los pueblos. Tenemos bien presente los innumerables obstáculos y dificultades que seria indispensable superar para llevar adelante el cumplimiento de un paso tan gigantesco, pues conocemos cuán imposible es, ó al menos difícil, desarraigar á los pueblos de sus inveteradas costumbres; y sin embargo atendida la armonía que existe entre los gobiernos de Francia, Inglaterra, España, Bélgica y Portugal, nos parece será de esperar se venzan en algun tanto las dificultades que pueda presentar la adopcion de un sistema uniforme de pesas, medidas y aun monedas.

§ I. Medidas, Pesas y Monedas legales de España.

A fin de proceder con todo el rigor y exactitud posible haremos la esposicion de las *medidas y pesas españolas* conforme á la *ley* V, *tit.* IX, *lib.* IX *de la Novis. Recop.*, y para mayor claridad copiaremos testualmente las últimas instrucciones del gobierno comprendidas en la Pragmática de 20 de febrero de 1801 que ponemos á continuacion.

Por el Excmo. Sr. D. Pedro Cevallos, primer Secretario de Estado y del Despacho, se ha comunicado al Consejo por medio del Escmo. Sr, D. Gregorio de la Cuesta, Gobernador de él, en 26 de enero próximo, la real órden que sigue:

"Informado el Rey de lo muy imperfectos y mal tratados que estan los patrones originales de pesas y medidas, que rigen en la mayor parte de estos reinos, segun resulta del exámen que de ellos ha mandado hacer S. M., é igualmente enterado de la poca atencion que hasta ahora se ha dirigido á un negocio de tan conocida importancia, ha resuelto S. M. poner en ello el órden conveniente y necesario; y al mismo tiempo, conociendo los graves inconvenientes que siempre ha ocasionado la variedad de pesas y medidas, y la justicia y utilidad de que sean unas mismas en todos sus reinos y señoríos, ha determinado S. M. que se lleve á efecto la igualacion de pesas y medidas que ha sido mandada en diferentes tiempos, sin que hasta ahora se haya verificado enteramente, y para que se logre la utilidad real de esta uniformidad con la menor incomodidad posible de los pueblos, ha resuelto S. M. que se tomen por normas las pesas y medidas que estan en uso mas generalmente en estos reinos, prefiriendo el evitar la confusion que de alterarlas resultaria al darles cierto órden y enlace sistemático que se podria desear.

Estas normas son el patron de la vara que se conserva en el archivo de la ciudad de Burgos; el patron de la media fanega que se conserva en el archivo de la ciudad de Avila; los patrones de medidas de líquidos que se custodian en el archivo de la ciudad de Toledo, y el marco de las pesas que existe en el archivo del Consejo.

Las pesas y medidas que deberán, pues, ser de uso general en todos los reinos y señoríos de S. M., y que en lo sucesivo se llamarán pesas y medidas españolas, serán las siguientes.

El *pie* será la raiz de todas las medidas de intervalo ó de longitud, y se dividirá segun se acostumbra en 16 *dedos* y el dedo en mitad, cuarta, ochava y dieziseisava parte: é igualmente se dividirá el pie en 12 *pulgadas* y la pulgada en 12 *líneas*.

La *vara* ó medida usual para el trato y comercio y demás usos en que se emplea se compondrá de tres de dichos pies; y se dividirá, segun se acostumbra, en mitad, cuarta, media cuarta, ú ochava y media ochava, como tambien en *tercias*, medias tercias ó *sesmas* y medias sesmas.

Para que la legua corresponda á lo que en toda España se ha llamado y llama legua, que es el camino que regularmente se anda en una hora, será dicha legua de veinte mil pies, la que se usará en todos los casos en que se trate de ella, sea en caminos reales, en los tribunales y fuera de ellos.

El *estadal* para medir las tierras será de 4 varas ó 12 pies de largo.

La *aranzada* para medir las tierras será un cuadro de 20 estadales de lado, ó tendrá de superficie 400 estadales cuadrados.

La *fanega* de tierra será un cuadrado de 24 estadales de lado, ó tendrá de superficie 576 estadales cuadrados. Esta fanega de tierra se dividirá en 12 *celemines* y cada celemin de tierra en 4 *cuartos* ó *cuartillos*.

Para medir todo género de granos, la sal y demás cosas secas se usará el *cahiz* de 12 fanegas, y la fanega de 12 celemines.

La fanega se dividirá en dos medias fanegas y en 4 *cuartillas*, y el celemin se dividirá en mitades sucesivas segun se acostumbra con los nombres de medio celemin, cuartillo, medio cuartillo, ochavo, medio ochavo y ochavillo.

Para medir todo género de liquidos, á escepcion del aceite, se usará la *cántara* ó *arroba* y sus divisiones por mitades sucesivas, que son media cántara, *cuartilla*, *azumbre*, media azumbre, *cuartillo*, medio cuartillo, y *copa*.

El *moyo* será de 16 cántaras.

Las medidas para el aceite estarán como hasta aquí arregladas al peso, y se usará como hasta ahora de la arroba y sus divisiones, que son media arroba, cuarto, y medio cuarto de arroba, *libra*, media libra, *cuarteron* ó *panilla*, y media panilla.

Para las cosas que se venden y compran al peso se usará la libra de diez y seis *onzas*; la que se dividirá segun se acostumbra en mitades sucesivas con los nombres de media libra, cuarteron, y medio cuarteron. La onza se dividirá tambien en dos medias onzas, en 4 cuartas, en 8 *ochavas* ó *dracmas* y en 16 *adarmes*, y para los usos en que se necesita mayor division se dividirá el adarme en 3 *tomines*; y cada tomin en 12 *granos*. La arroba de peso se compondrá de 25 libras; y el *quintal* será de 4 arrobas.

Los médicos y boticarios continuarán usando de la libra medicinal de 12 onzas iguales á las onzas del marco español para evitar los daños que de alterarla podrian resultar á la salud pública.

Determinadas de esta suerte las medidas y pesos y sus nombres, que han de ser de uso general, ha comisionado S. M. á D. Juan de Peñalver para cuidar de la construccion de los patrones necesarios, de la materia y forma mas convenientes para su exactitud y conservacion; los que hallándose concluidos se ha dignado S. M. examinarlos, han merecido su real aprobacion, y son los siguientes.

Dos patrones de la vara, el uno de platina y el otro de hierro, que son iguales en una temperatura determinada: dos juegos de pesas desde la libra hasta el adarme por mitades sucesivas; el uno de platina y el otro de laton, de forma cilíndrica, con un pomo ó boton liso por arriba; un juego de medidas de áridos desde la media fanega hasta el ochavillo, todas de laton de forma cilíndrica, y cuya altura es próximamente igual al diámetro de la base: un juego de medidas de líquidos, compuesto de cántara, media cántara, cuartilla, azumbre, cuartillo y medio cuartillo, las cuales son de cobre á escepcion de la azumbre, que es de laton, y su forma es la de un cono truncado, siendo su altura próximamente igual al diámetro de la base, y este casi cinco veces mayor que el diámetro de la boca: un juego de medidas para el aceite compuesto de media arroba, cuarto de arroba, libra, media libra, panilla y media panilla, todas de la misma materia y forma que las de los otros líquidos.

Todos los referidos patrones, que se hallan en poder de D. Juan de Peñalver, se tendrán desde ahora en adelante por primarios y originales; y se depositarán y conservarán en el archivo del Consejo, de donde no se estraerán en ningun caso ni se hará de ellos ningun uso, sino en circunstancias muy particulares, y con órden espresa de S. M.

Para fijar en lo sucesivo la estension, cabida ó peso respectivamente de dichos patrones y poder verificarlos en cualquier tiempo, si por acaso ó por algun accidente se sospecha que han padecido alteracion, ha mandado S. M. que se compare el pie con la longitud del péndulo simple que oscila los segundos en Madrid; y la libra con el peso de un pie cúbico de agua pura en determinadas circunstancias; como igualmente que se averigüe y fije, la cabida en libras de agua pura de las medidas de capacidad; cuyos resultados se comunicarán en su tiempo al Consejo.

Pero aunque la forma que se ha dado á los patrones es la mas conducente á su exactitud y conservacion, es no obstante poco acomodada á los usos comunes; y por tanto ha resuelto S. M. que las medidas de granos y demás cosas secas en los usos comunes conserven la misma forma que actualmente se acostumbra darles, ajustándolas á la cabida de sus respectivos patrones por medio de un grano menudo echado con lentitud é igualdad si son de madera, ó por medio del agua si fueren de algun metal; y para evitar las diferencias y fraudes que pueden resultar de la variedad de las formas, tanto midiendo rasado como colmado, tendrán estas medidas ciertas y determinadas dimensiones, de manera que todas las de igual cabida y mismo nombre tengan iguales dimensiones, sean de madera ó de algun metal, no permitiéndose otra forma ni otras dimensiones en las medidas de uso.

La *media fanega* tendrá, pues, la forma que actualmente se la da, y consiste en un fondo de igual ancho, pero menos largo que la boca, sobre el cual se levantan tres lados planos y rectos, siendo el cuarto lado inclinado para la comodidad de llenarla y vaciarla. La boca tendrá de largo 37 $\frac{1}{4}$ dedos y de ancho 16 $\frac{1}{2}$ dedos, incluyéndose en esto el grueso de los bordes. La luz de dicha boca sin el grueso de los bordes será de 35 dedos de largo y 15 dedos de ancho. El fondo tendrá de ancho 15 dedos y de largo 25 $\frac{1}{2}$ dedos; la altura interior de la medida de 12 dedos.

Así en esta medida como en las demás de granos que se siguen no se exigirá que las dimensiones sean rigurosamente las que aquí se señalan, y se tendrán por buenas las medidas cuyas dimensiones no varien la cuarta parte de un dedo en las de media fanega y cuartilla y $\frac{1}{16}$ de dedo en las demás; á escepcion de las dimensiones de las bocas, comprendido el grueso de los bordes, en las cuales no se permitirá mas diferencia que $\frac{1}{8}$ de dedo en la media fanega y cuartilla; $\frac{1}{16}$ de dedo en el celemin y medio celemin, y $\frac{1}{32}$ de dedo en las restantes.

La *cuartilla* tendrá la misma forma que la media fanega. La boca tendrá, incluso el grueso de los bordes, 27 $\frac{1}{8}$ dedos de largo y 14 de ancho. La luz de la boca, sin contar el grueso de los bordes, tendrá 25 dedos de largo y 12 dedos de ancho. El fondo tendrá de ancho 12 dedos, y de largo 18 $\frac{7}{8}$ dedos. La altura interior de la medida será de 10 dedos.

El *celemin ó almud* será de boca cuadrada; y este cuadro, incluso el grueso de los bordes, tendrá 12 $\frac{9}{16}$ dedos de lado. La luz de la boca igual al fondo tendrá de lado 11 dedos. La altura interior será de 7 $\frac{1}{4}$ dedos.

El *medio celemin* será de boca cuadrada; y este cuadro, incluso el grueso de los bordes, tendrá 9 $\frac{15}{16}$ dedos de lado. La luz de la boca igual al fondo será un cuadro de 8 dedos de lado. La altura interior será de 6 $\frac{7}{8}$ dedos.

El *cuartillo* será de boca cuadrada; y este cuadro, incluso el grueso de los bordes, tendrá 7 $\frac{15}{16}$ dedos de lado. La luz de la boca igual al fondo será un cuadro de 6 $\frac{1}{2}$ dedos de lado. La altura interior será de 5 $\frac{3}{16}$ dedos.

El *medio cuartillo* será de boca cuadrada; y este cuadro, incluso el grueso de los bordes, tendrá 6 $\frac{1}{4}$ dedos de lado. La luz de la boca igual al fondo será un cuadro de 5 dedos de lado. La altura interior será de 4 $\frac{3}{8}$ dedos.

El *ochavo* será de boca cuadrada; y este cuadro, incluso el grueso de los bordes, tendrá 5 dedos de lado. La luz de la boca igual al fondo será un cuadro de 4 dedos de lado. La altura interior será de $3 \frac{7}{16}$ dedos.

El *medio ochavo* será de boca cuadrada; y este cuadro, incluso el grueso de los bordes, tendrá $3 \frac{15}{16}$ dedos de lado. La luz de la boca igual al fondo será un cuadro de $3 \frac{1}{8}$ dedos de lado. La altura interior será de $2 \frac{13}{16}$ dedos.

El *ochavillo* será de boca cuadrada; y este cuadro, incluso el grueso de los bordes, tendrá $3 \frac{1}{8}$ dedos de lado. La luz de la boca igual al fondo será un cuadro de $2 \frac{1}{2}$ dedos de lado; la altura interior será de $2 \frac{3}{16}$ dedos.

En cuanto á las medidas de líquidos nada se prescribirá acerca de la forma de ellas, pero en cuanto á los fondos ó suelos, ninguno podrá pasar de 12 dedos de ancho; y las bocas tendrán el ancho siguiente: la de la cántara de 6 á 7 dedos; la de la media cántara de 5 á 6 dedos; la de la cuartilla de 4 á 5 dedos; la de la azumbre y media azumbre de 3 á 4 dedos; la del cuartillo de 2 á 3 dedos y las del medio cuartillo y copa de $1 \frac{1}{2}$ á 2 dedos. Las bocas de las medidas de aceite serán de 5 á 6 dedos la de arroba, de 4 á 5 dedos la de media arroba, de 3 á 4 dedos la de cuarto y medio cuarto de arroba, de 2 á $2 \frac{1}{4}$ dedos la de libra, de 1 y $\frac{1}{2}$ á 2 dedos la de media libra y de 1 y $\frac{1}{2}$ á 1 y $\frac{3}{4}$ dedos las de panilla y media panilla, y no pasará de 1 y $\frac{1}{2}$ dedos en cualquiera otra medida menor, entendiéndose estas dimensiones de la luz de la boca sin incluir el grueso de los bordes. Los fondos ó suelos de las medidas de arroba y media arroba de aceite, si son de cobre, laton ú otro metal no podrán pasar de 14 dedos siendo circulares, ni de 12 si son cuadrados; los de cuarto y medio cuarto de arroba no pasarán de 12 dedos si son circulares, ni de 10 si son cuadrados: los de las demás medidas menores no pasarán de 6 y $\frac{1}{2}$ dedos, siendo dichos suelos de suficiente solidez. En las medidas mayores de líquidos, como la arroba, media, cuarto y medio cuarto de arroba habrá muescas ó ladrones, y estos no estarán enfrente, sino á un lado del asa de la medida.

Para dar principio á la igualacion de pesas y medidas ha resuelto S. M. que todos los pueblos se provean de patrones sacados por los originales nuevamente construidos en la forma siguiente.

Todas las ciudades cabezas de provincia tendrán patrones iguales á los originales mencionados; á saber, un marco de pesas de bronce ó laton de 8 libras con sus divisiones por mitades sucesivas hasta el adarme, y una pesa de media arroba de hierro ó de laton; un juego de medidas de granos, otro de las medidas del vino y demás líquidos, y otro de las medidas del aceite; todas las cuales medidas serán de cobre ó de laton, y de la misma forma que los originales.

Estos patrones se conservarán en el archivo de la ciudad, y no se hará de ellos otro uso que el verificar en ciertos tiempos los patrones que sirvan para el ajuste y arreglo de las medidas y pesas de uso comun, segun se ordenará al debido tiempo cuando establecida la uniformidad, disponga S. M. lo conveniente para la conservacion de ella en lo sucesivo.

Otro igual juego de patrones se entregará á la persona que con el nombre de Fiel Almotacen, Marcador, Afinador, ú otro, tenga á su cargo el cotejar, ajustar y marcar las pesas y medidas que pidan ó presenten otros pueblos ó los particulares.

Todas las ciudades cabezas de partido deberán tener tambien dobles patrones, entregando un juego completo al Marcador ó persona que cuide del abasto y cotejo de estas pesas y medidas; y para evitar gastos bastará que las pesas y medidas que se conserven en el archivo sean una vara y un juego de pesas segun queda dicho; una media fanega, un celemin, un cuartillo y un ochavo; una media cántara, una azumbre y un cuartillo de líquidos; una medida de media arroba de aceite, otra de libra, y otra de panilla ó cuarteron; bien que dichas ciudades podrán, si quieren, tener completos dichos patrones, y así estas como las cabezas de provincia podrán tener tambien mayor número de patrones, si lo tienen por conveniente.

Las dichas ciudades cabezas de provincia y de partido deberán acudir á Madrid para proveerse de los patrones espresados; á cuyo fin resolverá S. M. lo conveniente para que la ejecucion de ellos se haga con brevedad, economía y exactitud.

Las demás ciudades, villas y lugares acudirán á proveerse de patrones á sus cabezas de partido ó de provincia, segun les corresponda y esté establecido, y podrán tenerlos de la materia que mas les acomode, guardando las formas que quedan prescritas para las medidas de capacidad; en la inteligencia de que deberán tener á lo menos un juego completo de cada especie de patrones y que en cuanto á las pesas deberán acudir á Madrid por los patrones todos los pueblos que pasen de quinientos vecinos.

Para evitar todos los gastos que sea posible, podrán enviar las ciudades, villas y lugares, cada cual adonde los corresponde, segun queda espresado, los patrones que actualmente tengan, los que examinados y hallados justos en sus formas y dimensiones, estension, cabida ó peso respectivamente ó correjidos si se pudiese, se marcarán y devolverán, pagando dichas ciudades, villas y lugares los costes que esto ocasionare.

Todas las ciudades cabezas de provincia y de partido deberán acudir á Madrid para proveerse de los patrones espresados en el término de un mes desde que se les haya pasado la órden correspondiente á este efecto.

Luego que dichas ciudades esten provistas de los espresados patrones, deberán acudir á ellas, para el mismo objeto respectivamente y segun les corresponda, todas las demás ciudades, villas y lugares, en el término de quince dias; y por lo que hace á las pesas deberán acudir las que quedan espresadas á Madrid en el término señalado de un mes para proveerse de ellas.

Luego que todos los pueblos esten provistos de dichos patrones, se señalará la época en que debe empezar el uso uniforme de las pesas y medidas españolas en todos los reinos y señoríos de S. M.

Las ciudades, villas ó lugares que usen pesas ó medidas distintas de las que aquí van indicadas, harán el cotejo de ellas con las nuevas; y determinarán y establecerán la correspondencia de unas con otras; ó bien si lo tienen por conveniente enviarán aquí sus patrones para que se haga el cotejo, y se les dé el resultado de él; y de esto se formará una tabla ó manual para el uso é inteligencia de todos; imprimiéndose por cuenta del Ayuntamiento, quien podrá hacerlo así, ó vender ó arrendar esta impresion á fin de que el producto quede para ayuda de los gastos de los nuevos patrones.

Para precaver y cortar las dudas y litigios que con el tiempo se pueden suscitar, se archivarán los patrones antiguos de las pesas y medidas que sean realmente distintas de las que ahora se mandan usar; pero no se ejecutará así con aquellos patrones que tienen su orígen de las pesas y medidas que actualmente se prescriben, ó que estan reputadas igual á estas, aun cuando se encuentre alguna diferencia, pues esto solo probaria que dichos patrones eran poco exactos.

Todos los contratos, censos y obligaciones de cualquiera especie que sean, anteriores á la época en que empiece el uso uniforme de las pesas y medidas españolas, se reducirán, cumplirán y pagarán por las pesas y medidas mandadas ahora usar, uniforme y generalmente; y por las mismas deberán hacerse, cumplirse y pagarse los que se celebren en lo sucesivo, sin lo cual no serán válidos ni de ninguna fuerza.

A estas mismas pesas y medidas deberán arreglarse en todos los casos todos los empleados en la Real Hacienda, Guerra, Marina, reales fábricas, comercio y demás ramos.

Igualmente deberán usarse en los escritos de ciencias y artes, encargando el Consejo á los censores de dichos escritos que no los aprueben sin que esten reducidas las medidas y pesas estranjeras, esceptuándose el caso en que se trate de simple relacion ó proporcion.

Ultimamente ha resuelto S. M. que para dirigir la ejecucion de esta empresa, entender en lo que ocurra sobre estos puntos, se forme una junta temporal presidida por el gobernador del Consejo, y compuesta de cuatro ó cinco ministros de dicho supremo tribunal; y que esta junta en todos los casos necesarios consulte á S. M. por medio del ministerio de mi cargo; como igualmente luego que la uniformidad de pesas y medidas se halle establecida y se forme el reglamento sobre lo que se debe observar y practicar en lo sucesivo para la conservacion de dicha uniformidad, se disuelva la referida junta y pase entonces este negocio al Consejo.

Todo lo que participo á V. E. de real órden á fin de que lo ponga en noticia del Consejo y que se tomen todas las providencias conducentes á su cumplimiento.

Publicada en el Consejo pleno la antecedente real órden, y con inteligencia de lo que espusieron *in voce* los señores fiscales, acordó su cumplimiento y que con su insercion se espidiese la correspondiente en la forma ordinaria á la sala de Alcaldes de la real Casa y Corte, á las Chancillerías y Audiencias reales y á los intendentes para su inteligencia y observancia en lo que les corresponda; y á los corregidores y alcaldes mayores del reino, previniéndoles la comuniquen á las justicias y ayuntamientos de los pueblos de sus respectivos distritos para el propio efecto; en inteligencia de que se avisará por medio de órden circular el mes en que deban acudir á esta corte las ciudades cabezas de provincia y de partido, y los pueblos que pasen de quinientos vecinos á surtirse de las medidas y pesas que se mandan establecer.

Y en su consecuencia lo participo á V. para que haciéndolo presente en el ayuntamiento de esa lo tenga entendido para su cumplimiento, y al mismo fin la comunique á las justicias y ayuntamientos de los pueblos de su partido; y del recibo de esta me dará V. aviso para noticia del consejo.

Dios guarde á V. muchos años. Madrid 20 de febrero de 1801.

D. Bartolomé Muñoz.

Tal es, pues, el sistema de *medidas y pesas españolas* conforme á las últimas instrucciones del gobierno sobre el particular. Sin embargo, la simple esposicion de la anterior Pragmática no llena nuestras miras, ni menos corresponde á la solicitud de algunos de nuestros lectores, por lo cual vamos á dar mas ámplios detalles sobre el objeto que nos ocupa, presentando el sistema de *medidas*, *pesas y monedas* del siguiente modo:

1.º Consideraremos tres clases de medidas, que son: *medidas longitudinales*, *medidas agrarias* y *medidas de capacidad.*

2.º En cuanto á las pesas las miraremos bajo estos tres puntos de vista, á saber: *pesas de uso comun*, *pesas para oro y plata* y *pesas medicinales.*

3.º Finalmente las monedas las dividiremos en cuatro clases, que son: *monedas de oro*, *monedas de plata*, *monedas de cobre* y *monedas imaginarias.*

DE LAS MEDIDAS.

Medidas longitudinales ó lineales.

La base de las medidas *lineales* ó de *longitud* es el *pie*, que se divide en 16 *dedos*, y cada dedo en mitades sucesivas.

Divídese asimismo el pie por mitades en 4 partes iguales, y cada una de estas en 3 partes; lo cual da la division del pie en 12 partes iguales llamadas *pulgadas*; y cada pulgada se subdivide en otras 12 partes iguales tambien llamadas *líneas*; y cada línea en 12 *puntos.*

La *vara* usada por lo regular por los mercaderes se divide en dos mitades ó *codos* de á pie y medio. Esta medida puede dividirse de dos modos con relacion á las distintas divisiones del pie, que es su patron.

Primera division.

Dieziseisavos.						
16	Dedo.					
48	3	Media octava.				
96	6	2	Octava ó coto.			
192	12	4	2	Cuart. ó palm. may.		
384	24	8	4	2	Med. var. ó cod.	
768	48	16	8	4	2	Vara.

Segunda division.

Líneas.					
12	Pulgada.				
36	3	Palm. men.			
72	6	2	Sesma.		
144	2	4	2	Terc. ó pie.	
432	36	2	6	3	Vara.

Doblando la vara se tiene el *estado*, que consta de 6 pies y estatura regular de un hombre, y es igual á la *braza* ó *brazada*, estension de la abertura de los brazos.

Medidas itinerarias.

Las medidas *itinerarias* provienen de las longitudinales, pues que su unidad, que es el *paso doble*, se compone del conjunto de 5 pies. Esta unidad sirve para formar la legua, que por lo tanto no debe compararse con la vara, que solo indirectamente hace parte de ella. El paso doble suele llamarse tambien *paso geométrico* y en las leyes antiguas se le conoce bajo el nombre de *pasada*.

La *legua* es la unidad lineal que sirve para medir las distancias de los caminos. Antes la unidad era la *milla*, que consta de 1000 pasos dobles.

La *legua* legal antigua se componia de 3 *millas* ó 3000 pasos dobles, ó 15000 pies. La legua mas usada, por aproximarse al camino que regularmente se anda en una hora, era de 4 millas, ó 4000 pasos dobles, ó 20000 pies.

En el año 1766 se mandó que la legua de los caminos nuevos se compusiese de 8000 varas, ó 24000 pies, legua que no tenia relacion alguna con la unidad de las medidas itinerarias.

Por real órden de 26 de enero de 1801 se mandó que en todos los escritos de ciencias, artes, caminos reales, en los tribunales &c. se usase de la legua de 4 millas, ó 4000 pasos, ó 20000 pies, la cual se aproxima á la de 20 en grado nonagesimal, puesto que de ellas tiene el grado 19938 leguas, segun el último valor que á él se da.

Division de la legua moderna.

Pie.			
5	Paso (*geométrico*) ó pasada.		
5000	1000	Mígero ó milla.	
20000	4000	4	Legua.

Medidas agrarias.

Las medidas agrarias ó de superficie tienen por base al *estadal*, que es bastante varia. Nosotros adoptaremos el de 12 pies de largo ó de 144 pies cuadrados.

La *fanega* ó *fanegada* es tambien muy varia, pues que se puede referir á distintos estadales.

La *fanega de tierra* es el espacio donde puede sembrarse una fanega de trigo.

Elejiremos la fanega de 576 estadales cuadrados.

La fanega de tierra se divide por lo regular como la de granos, es decir, en 12 celemines ó almudes, y el almud en 4 cuartillos. El *almud* de tierra consta de 48 estadales cuadrados y el cuartillo de 12.

Las medidas agrarias españolas son muchas á causa de variar su base, y se conocen en cada provincia con distintos nombres. La *aranzada* ó *alanzada*, que es el espacio que coge un tiro de lanza, se usa muy particularmente para medir el plantío de viñedos. Es un cuadro de 20 estadales cada lado, ó lo que es lo mismo, consta de 400 estadales cuadrados. Usase tambien de la *yugada*, que es de 50 fanegas de tierra, y de la *caballería*, que se compone de 60 fanegas.

Medidas cuadradas de España.

Líneas cuadradas.					
144	Pulgada cuadrada.				
20736	144	Pie cuadrado *.			
186624	1296	9	Vara cuadrada.		
746488	5184	36	4	Braza cuadrada.	
......	20736	144	16	4	Estadal cuadrado.

La legua cuadrada es = 400000000 pies cuadrados,
ó...................... 2777777,77 estadales cuadrados,
ó...................... 4822,53 fanegas,
ó finalmente.............. 6944,44 aranzadas.

* Consta de 256 dedos cuadrados.

Medidas cúbicas de España.

Línea cúbica.				
1728	Pulgada cúbica.			
2986024	1728	Pie cúbico.		
....	46656	27	Vara cúbica.	
....	373248	216	8	Braza cúbica.

Medidas de capacidad.

Distínguense dos clases, que son medidas de *áridos* ó cosas secas y medidas de *líquidos*.

Medidas de áridos.

La unidad de estas medidas es la fanega.

La *fanega* de áridos se divide en 12 celemines ó almudes: divídese asimismo en 2 medias fanegas y en 4 cuartillos. El celemin se divide en 2 medios celemines y 4 cuartillos: el cuartillo en 4 ochavos y el ochavo en 4 ochavillos.

El *cahiz* consta de 12 fanegas.

Tabla de las medidas de áridos.

Pulgadas cúbicas.			
370	Celemin.		
4440	12	Fanega.	
53280	144	12	Cahiz.

Medidas de líquidos.

Estas son de tres clases, á saber: 1.ª para el vino; 2.ª para la leche, y 3.ª para el aceite. Su division es como se ve en la siguiente

Tabla de las medidas de líquidos.

Copa.				
4	Cuartillo (tiene mitad).			
16	4	Azumbre (id).		
128	32	8	Cántara ó arroba (id.)	
....	512	128	16	Moyo ó modio.

La medida que sirve para la leche es el azumbre, que es igual á 5 cuartillos de la medida del vino.

Las medidas del aceite estan arregladas al peso, y así es que la medida de arroba contiene una arroba de peso de aceite, y se divide en 25 libras, y la libra en 2 medias libras y en 4 cuarterones ó *panillas*.

DE LAS PESAS.

Ya hemos dicho que hay tres clases de pesas, á saber: 1.ª pesas de uso comun; 2.ª pesas para oro y plata, y 3.ª pesas medicinales: así solo advertiremos que la onza es una misma en todas ellas.

Pesas de uso comun.

Adarme.				
16	Onza.			
256	16	Libra.		
6400	400	25	Arroba.	
....	1000	100	4	Quintal.

La onza se divide tambien en media y cuarta, y asimismo la libra y la arroba.

En algunas partes se hace uso del *arrel* ó pesa de 4 libras.

El cahiz de yeso en crudo es de 80 arrobas y el de yeso cocido de 60 arrobas.

La *tonelada* consta de 20 quintales.

Pesas para el oro y plata.

Grano.					
12	Tomin.				
36	3	Adarme.			
72	6	2	Ochava.		
576	48	16	8	Onza.	
4608	384	128	64	8	Marco.

Pesas medicinales.

Granos.						
4	Carácter.					
12	3	Obolo (6 tomin).				
24	6	2	Escrúpulo.			
72	18	6	3	Dracma (ú ochava).		
576	144	48	24	8	Onza.	
6912	1728	576	288	96	12	Libra.

Adviértase que á pesar de la igualacion de pesas decretada por ley de 26 de enero de 1801, la libra medicinal permanece siendo de 12 onzas. Este es un caso escepcional de dicha ley, y así la Pragmática que al principio hemos puesto, dispensa que la libra medicinal permanezca la misma, á fin de evitar todo error que pudiera haber en las dosis suministradas á los enfermos.

DE LAS MONEDAS.

Daremos á conocer sucesivamente las cuatro clases que hay de monedas.

Monedas de oro.

	Rs. vn.	*ms.*
Doblon de oro de á 8 escudos fabricado antes de 1772 = ...	321	6
Doblon de á 4 escudos mitad del de á 8 = ...	160	20
El de oro mitad del de á 4 = ...	80	10
Escudo de oro = ...	40	5
Escudito ó durillo antiguo = ...	21	8 ½

	Rs. vn.	ms.
Doblon de oro de 8 escudos sellado despues de 1771 =	320	0
Doblon de á 4 escudos mitad del de á 8 =	160	»
Doblon de oro efectivo =	80	»
Escudo de oro nuevo =	40	»
Escudito ó durillo nuevo =	20	»

Monedas de plata.

Escudo ó peso fuerte (V. duro) =	20	»
Escudo de vellon ó medio peso (V. medio duro) =	10	»
Peseta mejicana ó columnaria =	5	»
Media peseta mejicana =	2	17
Real mejicano ó columnario =	1	$8\frac{1}{2}$
Peseta española =	4	»
Media =	2	»
Realillo =	1	»

Monedas de cobre.

Pieza de dos cuartos =	»	8
Cuarto =	»	4
Ochavo =	»	2
Maravedí =	»	1

Monedas imaginarias.

Doblon de oro que vale 5 pesos de cambio ó 40 reales plata =	75	10
Doblon de cambio que vale 4 pesos ó 32 reales plata =	60	8
Ducado de plata que vale 11 reales plata vieja =	20	24
Ducado de cambio que vale 11 reales y 1 maravedí =	20	$25\frac{15}{17}$
Peso de cambio ó real de á 8 que vale 8 reales plata vieja =	15	2
Real de plata de cambio ó peseta antigua =	1	30
Maravedí de plata vieja =	»	$1\frac{15}{17}$
Doblon de 4 pesos sencillos =	60	»
Peso sencillo =	15	»
Ducado de vellon =	11	»
Escudo de vellon =	10	»
Ducado de 374 maravedises plata =	20	24

Observacion general.—El codo sirve en los departamentos de Marina para medir las arboladuras y perchas: se divide en 8 palmos, cada uno de los cuales es de 3 pulgadas.

Se dice codo de *ribera* y palmo de *ribera*.

La cuerda tiene 99 palmos de ribera.

La legua antigua que constaba de 15000 pies, la abolió Felipe II por un real decreto en 1658.

La legua geográfica compuesta de 22812 pies se llama así por haberla adoptado los pilotos y cosmógrafos españoles del siglo VI y VII y por haber mandado Felipe V que se arreglasen las cartas geográficas por la *escala* de dicha legua.

En 1769 se mandó por una real órden que en todas las carreteras nuevas se usase de la legua de 24000 pies.

Conforme al Código de comercio publicado en 1829 cada fanega de tierra de Castilla no da mas que 500 estadales.

Cada cántara equivale á una arroba de cabida de 34 libras de agua corriente.

La *tonelada comun* es el volúmen que ocupan 20 quintales de agua corriente.

El *lastre* equivale á 2 toneladas comunes.

La *tonelada legal* que se usa en los buques que van á América es de 70,18945 pies cúbicos.

El *marco*, que antes se dividia en 50 *castellanos* ó 4800 granos, fue reformado por real decreto de 31 de agosto de 1731.

§ II. Medidas y Pesas no legales que estan en uso en Castilla, Valencia, Navarra, Aragon, Cataluña y Mallorca.

Aun cuando las medidas y pesas de estas provincias no obran ya de modo alguno en los actos legales, no obstante como su uso no está todavía desarraigado del todo, nos parece no estará demás el que las demos á conocer.

MEDIDAS Y PESAS DE CASTILLA.

Medidas longitudinales.

Usase de la *toesa* que se divide en 2 varas: la vara en 4 palmos, y el palmo en 12 dedos *.

---

* El dedo de Castilla es $\frac{3}{48}$ de pie.

Tambien se hace uso del pie y se divide en 12 pulgadas; la pulgada en 12 líneas, y la línea en 12 puntos.

Medidas de capacidad.

Para áridos.—El cahiz, que se compone de 12 fanegas.

La fanega se divide en 4 cuartillas: la cuartilla en 3 celemines: el celemin en 4 cuartillos: el cuartillo en 4 ochavos y el ochavo en 4 ochavillos.

Medidas de líquidos.

Para el vino.—El moyo, que es de 16 cántaras. Divídese la cántara en 8 azumbres: el azumbre en 4 cuartillos: el cuartillo en 2 medios, y el medio en 2 copas.

Para el aceite.—La arroba, que consta de 4 cuartillas: la cuartilla de 6 ¼ libras; la libra de 4 panillas, y la panilla de 4 onzas.

DE LAS PESAS.

El quintal 4 arrobas: la arroba 25 libras: la libra 16 onzas: la onza 4 cuartos: el cuarto 4 adarmes, y el adarme 36 granos.

MEDIDAS Y PESAS DE VALENCIA.

Medidas longitudinales.

La vara es de 4 palmos. El palmo tiene 4 cuartos y el cuarto 3 dedos.

Medidas de capacidad.

Para áridos.—Usase del cahiz, que consta de 12 barquillas; la barquilla de 4 celemines, y el celemin de 4 cuarterones.

Medidas de líquidos.

Para el vino.—La carga 15 cántaras, y el cántaro 4 azumbres.

Para el aceite.—La carga 12 arrobas ó cántaras: la arroba 2 medias, y la media 2 cuartas.

DE LAS PESAS.

El peso de Valencia se divide en *peso grueso* y en *peso sutil.*

Peso grueso.—La carga tiene 2 ½ quintales: el quintal 4 arrobas: la arroba 36 libras: la libra 12 onzas: la onza 4 cuartos: el cuarto 4 adarmes, y el adarme 36 granos.

Peso sutil.—La carga es de 3 quintales: el quintal de 4 arrobas: la arroba de 30 libras*: la libra de pescado fresco de 16 onzas, y la de pescado salado de 18 onzas.

MEDIDAS Y PESAS DE NAVARRA.

En Navarra solo discrepan las medidas del modo siguiente: la vara es de 4 palmos. El *robo* es de 19 almudes. El cántaro de 16 *pintes*.

Por lo que respecta al peso, se usa el de Castilla y Aragon que daremos inmediatamente á conocer.

MEDIDAS Y PESAS DE ARAGON.

Medidas longitudinales.

La vara tiene 4 palmos, y el palmo 12 dedós ó 9 pulgadas.

Medidas de capacidad.

Para áridos.—El cahiz tiene 8 fanegas: la fanega 3 *cuartales*, y el cuartal 4 celemines.

Medidas de líquidos.

Para el vino.—El *nietro* ó carga, que tiene 16 cántaros.

Para el aceite.—La arroba de 36 libras: la libra de 16 onzas, y la *arrobeta*, que se compone de 24 libras.

DE LAS PESAS.

La carga tiene 3 quintales: el quintal 4 arrobas: la arroba 36 libras: la libra 12 onzas: la onza 4 cuartos: el cuarto 4 adarmes, y el adarme 32 granos. La libra carnicera es de 36 onzas.

MEDIDAS Y PESAS DE CATALUÑA.

Medidas longitudinales.

La *cana*, que tiene 8 palmos, y el palmo, que consta de 4 cuartos.

Medidas de capacidad.

Para áridos.—La tonelada de 1 $\frac{3}{5}$ carga; la carga 2 $\frac{1}{2}$ *cuarteras*: la cuartera 12 *cuartanes*, y el cuartan 4 *picotines*.

---

* Hay tambien la arroba de harina, que consta de 32 libras.

Medidas de líquidos.

Para el vino. —La *pipa* tiene 4 cargas ó 16 *barrilones*: la carga 4 barrilones, y el barrilon 32 *mitadellas*.

Para el aceite. — La carga es de 2 *barrales* ó 30 cuartanes: el barral de 2 barrilones, y el cuartan de 16 cuartas.

DE LAS PESAS.

La carga tiene 3 quintales: el quintal 4 arrobas: la arroba 26 libras: la libra* 12 onzas: la onza 4 cuartos: el cuarto cuatro adarmes, y el adarme 36 granos.

MEDIDAS Y PESAS DE MALLORCA.

Medidas longitudinales.

La *cana*, que tiene 2 medias ú 8 palmos, y el palmo, que es de 4 cuartos.

Medidas de capacidad.

Para áridos. —La cuartera tiene 12 cuartanes ó 6 *barcellas*, y la barcella 6 almudes.

Medidas de líquidos.

Para el vino. — La carga, que es de 4 *cuartines*, y el cuartin de 6 ½ *cortes*.

Para el aceite. — El pellejo ú *odor*, que tiene 12 cuartanes, y el cuartan, que es de 9 *rótolos*.

DE LAS PESAS.

La carga es de 3 quintales: el quintal de 4 arrobas: la arroba de 26 libras: la libra de 12 onzas. El quintal ó cántaro *barberisco* tiene 100 rótolos: la arroba barberisca 25 libras, y la libra 12 onzas.

Nota. — Parécenos conveniente concluir la esposicion de las medidas y pesas de España por la reduccion de las medidas cuadradas y cúbicas que se hallan en las dos tablas siguientes.

---

* La libra de carne ó pescado fresco es de 36 onzas.

Reduccion de medidas cuadradas.

N.os	Estadales á pies.	Estadales á varas.	Fanegas á estadales.	Fanegas á varas.
1.	144.	16.	576.	9216.
2.	288.	32.	1152.	18432.
3.	432.	48.	1728.	27648.
4.	576.	64.	2304.	36864.
5.	720.	80.	2880.	46080.
6.	864.	96.	3456.	55296.
7.	1008.	112.	4032.	64512.
8.	1152.	128.	4608.	73728.
9.	1296.	144.	5184.	82944.
10.	1440.	160.	5760.	92160.

N.os	Almudes á estadales.	Almudes á varas.	Aranzadas á estadales.	Aranzadas á varas.
1.	48.	768.	400.	6400.
2.	96.	1836.	800.	12800.
3.	144.	2304.	1200.	19200.
4.	192.	3072.	1600.	25600.
5.	240.	3840.	2000.	32000.
6.	288.	4008.	2400.	38400.
7.	336.	5376.	2800.	44800.
8.	384.	6144.	3200.	51200.
9.	432.	6912.	3600.	57600.
10.	480.	7680.	4000.	64000.

Reduccion de medidas cúbicas.

N.os	Brazas á varas.	Varas á pies.	Pies ó pulgadas á pulgadas ó líneas.
1.	8.	27.	1728.
2.	16.	54.	3456.
3.	24.	81.	5184.
4.	32.	108.	6912.
5.	40.	135.	8640.
6.	48.	162.	10368.
7.	56.	189.	12096.
8.	64.	216.	13824.
9.	72.	243.	15552.

§ III. Correspondencia del nuevo Sistema métrico francés con las medidas, pesas y monedas legales de España, y de estas con aquel.

MEDIDAS LONGITUDINALES ITINERARIAS.

Miriametro.... Medida itineraria para las grandes distancias: tiene de longitud diez mil metros y equivale á...... 35889,216 pies ó á 1,7944608 leguas de á veinte mil pies.

Quilometro.... Tiene mil metros; sirve tambien para medir grandes distancias y equivale á 3588,9216 pies ó á 1196,3072 varas.

Hectometro... Medida itineraria cuyo valor es cien metros: equivale á 358,89216 pies ó á 119,63072 varas.

Decametro.... Es una especie de cadena que sirve para medir superficies: su valor es diez metros y equivale á 35,889216 pies ó á 11,963072 varas.

Metro *....... Unidad fundamental del sistema que toma su nombre: equivale á 3 pies 11 $\frac{10}{100}$ líneas del pie de rey de Francia: equivale tambien á 3 pies usuales de Francia, y asimismo á 3,5889216 pies ó á 1,1963072 varas de España.

Decimetro..... Su valor es la décima parte del metro y equivale á 0,35889216 pies ó 4,30670592 pulgadas.

Centimetro.... Es la centésima parte del metro y corresponde en medidas españolas á 0,035889216 pies, ó........ 0,430670592 pulgadas ó 5,168047104 líneas.

Milimetro..... Su valor en el sistema decimal es la milésima parte del metro y corresponde á 0,5168047104 líneas.

MEDIDAS AGRARIAS.

Hectarea..... Su valor es cien áreas ó diez mil metros cuadrados y equivale á 894,46932 estadales cuadrados de 12 pies de lado ó de 144 pies, ó á 1,552898 fanegas de tierra del marco español de 576 estadales cuadrados ó 24 estadales en cuadro, ó final-

* La palabra *metro* que significa medida espresa la longitud de la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.

mente á 2,2361733 aranzadas de 400 estadales cuadrados ó 20 estadales en cuadro.

Area. . . . . Es un cuadrado de diez metros de lado ó cien metros cuadrados que corresponde á 8,3446932 estadales cuadrados de 12 pies de lado, ó á 143,1150917 varas cuadradas.

Centiarea. . . . . Es la centésima parte del área ó del metro cuadrado: equivale á 0,089446932 estadales cuadrados de 12 pies de lado, ó á 1,431150917 varas cuadradas, ó finalmente á 12,880358251 pies cuadrados.

MEDIDAS DE CAPACIDAD PARA ARIDOS Y LIQUIDOS.

	Para áridos.	*Para líquidos.*
Quilolitro.	Tiene la capacidad de un metro cúbico: su valor con relacion al sistema es mil litros y equivale á 17,99087 4 fanegas.	61,970137 cántaras.
Hectolitro *. . .	Consta de cien litros y equivale á 1,79908974 fanegas.	6,1970197 id.
Decalitro.	Reemplaza al *boisseau* para la medida del trigo y de toda clase de granos: su valor es diez litros y equivale á 2,158907688 celemines.	0,61970197 cántaras. ó 4,95761576 azumb.
Litro.	Tiene un decímetro cúbico de capacidad y equivale á 3,4542523 ochavos.	0,495761576 azumb. ó 1,983046304 cuart.
Decilitro.	Es la décima parte del litro y corresponde á. . . . 1,38170092 ochavillos.	0,1983046304 id. ó 0,7932185216 cop.

MEDIDAS DE SOLIDEZ.

Decasterio. . . . Se compone de diez esterios (*stères*) y equivale á 462,2659594256 pies cúbicos ó á 17,12096146 varas cúbicas.

Esterio (*stère*). El metro cubico, que es un cubo (de la forma de un dado de jugar) y que es la unidad de las medidas de solidez recibe este nombre cuando las medidas cúbicas se aplican á las maderas que sirven

* Reemplaza al *setier*.

para la combustion y construccion. Así el *esterio* ó *metro cúbico* equivale á 46,22659394256 pies cúbicos ó á 1,712096146 varas cúbicas *.

DECISTERIO......	Es la décima parte del esterio: equivale á....... 4,622659594256 pies cúbicos ó á 0,1712096146 varas cúbicas.

DE LAS PESAS.

....	Mil quilógramos es el peso del metro cúbico de agua y de la tonelada de mar: equivale á 21,734736 quintales.
....	Cien quilógramos es el quintal métrico que corresponde á 2,1734736 quintales ó á 8,6938944 arrobas.
QUILOGRAMO....	Contiene mil gramos y equivale á 2,7734736 libras.
HECTOGRAMO...	Cien gramos: corresponde á 3,47755776 onzas.
DECAGRAMO....	Diez gramos: equivale á 5,564092416 adarmes ó á 16,692277248 tomines, ó por último á......... 200,307326976 granos.
GRAMO........	Así se ha llamado á la unidad de peso del sistema métrico, que viene á ser el peso de un *centímetro* cúbico de agua destilada en su máximo de densidad: equivale á 20,0307326976 granos.
DECIGRAMO....	Es la décima parte del gramo: corresponde á.. 2,00307326976 granos.
CENTIGRAMOS...	Centésima parte del gramo: equivale á......... 0,200307326976 gramos.
MILIGRAMO.....	Milésima parte del gramo: equivale á.......... 0,0200307326976 granos.

DE LAS MONEDAS.

FRANCO.......	Se ha obtenido pesando *cinco granos* de un riel que contenia 9 *décimas* de plata pura y 1 de amalgama, de donde el valor intrínseco del *franco* resulta hallado en plata al título de 9 décimos de fino: corresponde á 3 reales y 27,2 maravedises ó á 3,8 reales **.

* El *esterio* viene á ser con poca diferencia el *demi-voie* antiguo, y así el *decasterio* vale cerca de cinco *voies* ó cargas (Véase la Prim. part., pág. 132, n.° 96.

** El valor del *franco*, con arreglo á la *Circular de* 18 *de julio de* 1812, que solo lo regula intrínsecamente, es 3 reales y 14 maravedises ó 3,411765 reales: el del *décimo* 11,6 ms.; y el del *céntimo* 1,16 ms.

Decimo.	Décima parte del franco: equivale á 19,92 ms.
Centimo.	Centésima parte del franco: equivale á 1,292 ms.

Correspondencia de las Medidas, Pesas y Monedas legales de España con las del Sistema métrico francés.

MEDIDAS LONGITUDINALES.

Legua de veinte mil pies.	0,5572705 miriámetros. 5,572705 quilómetros. 55,72705 hectómetros. 557,2705 decámetros. 5572,705 metros.
Vara.	0,83590575 metros.
Pie de Burgos.	0,27863525 metros. 2,7863525 decímetros. 27,863525 centímetros. 278,63525 milímetros.
Pulgada.	0,0232196 metros. 0,232196 decímetros. 2,32196 centímetros. 23,2196 milímetros.
Linea.	0,001934967 metros. 0,01934967 decímetros. 0,1934967 centímetros. 1,934967 milímetros.

MEDIDAS AGRARIAS.

Fanega de tierra (*del marco español de* 576 *estadales cuadrados* ó 24 *estadales en cuadro*).	0,6439573 hectáreas. 64,39573 áreas. 6439,573 centiáreas ó metros cuadrados.
Aranzada de tierra (*del marco español*, es decir, *de* 400 *estadales cuadrados* ó 20 *estadales en cuadro*).	0,4471925 hectáreas. 44,71925 áreas. 4471,925 centiáreas ó metros cuadrados.
Estadal cuadrado (*de* 12 *pies de lado* ó 144 *pies cuadrados*).	0,1117981 11,17981
Vara cuadrada.	0,698738 centiáreas ó metros cuadrados.
Pie cuadrado.	0,0776376 centiáreas ó metros cuadrados.

MEDIDAS DE CAPACIDAD PARA LOS LIQUIDOS.

CANTARA ó ARROBA......	0,01613679 quilólitros.
	0,1613679 hectólitros.
	1,613679 decálitros.
	16,13679 litros.
	161,3679 decílitros.
AZUMBRE...............	0,20170986 decálitros.
	2,0170986 litros.
CUARTILLO..............	0,5042747 litros.

MEDIDAS DE CAPACIDAD PARA ARIDOS.

FANEGA DE GRANO.......	0,0555837 quilólitros.
	0,555837 hectólitros.
	5,55837 decálitros.
	55,5837 litros.
	555,837 decílitros.
CELEMIN...............	0,463197 decálitros.
	4,63197 litros.
	46,3197 decílitros.
CUARTILLO..............	1,1579925 litros.

MEDIDAS DE SOLIDEZ.

VARA CUBICA............	0,0584079347 decasterios.
	0,584079347 esterios ó metros cúbicos.
	5,84079347 decisterios.
PIE CUBICO............	0,02163257 esterios ó metros cúbicos.
	0,2163257 decisterios.

DE LAS PESAS.

QUINTAL...............	0,0460093 mil quilógramos ó toneladas de mar.
	0,460093 cien quilógramos ó quintales métricos.
	46,0093 quilógramos.
	460,093 hectógramos.
	4600,93 decágramos.
	46009,3 gramos.
ARROBA................	0,11502325 cien quilógramos ó quintales métricos.
	11,502325 quilógramos.
	115,02325 hectógramos.
	1150,2325 decágramos.
	11502,325 gramos.

Libra	0,46009301 quilógramos. 4,6009301 hectógramos. 46,009301 decágramos. 460,09301 gramos.
Onza	28,755813 gramos.
Adarme	1,797238 gramos. 17,97233 decígramos. 179,7238 centígramos. 1797,238 milígramos.
Tomin	0,5990793 gramos. 5,990793 decígramos. 59,90793 centígramos. 599,0793 milígramos.
Grano	0,0499233 gramos. 0,499233 decígramos. 4,99233 centígramos. 49,9233 milígramos.

DE LAS MONEDAS.

Real	0,293103 francos. 2,93103 décimos. 29,3103 céntimos.	valuado con arreglo á la Circular de 18 de julio de 1812.
	0,2631579 francos. 2,631579 décimos. 26,31579 céntimos.	valuado con arreglo al valor actual.

Tal es, pues, la relacion que entre sí tienen las medidas, pesas y monedas del sistema decimal métrico francés y las legales de España. Deberemos decir en obsequio de la verdad que los resultados que anteceden, los mas exactos sin disputa alguna hasta el dia conocidos, los hemos tomado de la *Esplicacion del sistema decimal ó métrico francés* de D. José Mariano Vallejo, librito cuya lectura no podemos menos de aconsejar á todos aquellos que por su posicion deban conocer exactamente las medidas, pesas y monedas francesas y el modo de reducir á ellas las españolas, y viceversa.

Nota. — En la tabla comparativa que antecede no hemos hablado en cuanto á las monedas mas que del franco y sus submúltiplos, por cuya razon vamos á presentar ahora la reduccion de algunas otras monedas que estan en uso y que son múltiplos del franco.

MONEDAS DE FRANCIA.

ORO.	*Rs. vn.*	*ms.*
Doble Luis de 48 lib. tornesas ó 47 fr., 20 cs. =	179	12
Luis de 24 lib. tornesas ó 23 fr., 55 cs. =	89	17

ORO.	Rs. vn.	ms.
Pieza de 40 fr. =	152	12
Pieza de 20 fr. =	76	»

PLATA.

Pieza de 5 fr. (V. napoleon) =	19	»
Pieza de 2 fr. =	7	20
Pieza de 1 fr. =	3	27
Pieza de ½ fr. ó 50 cs. =	1	30
Pieza de ¼ fr. ó 25 cs. =	»	32
Escudo de 6 lib. tornesas ó 5 fr., 80 cs. =	22	»
Escudo de 3 lib. tornesas ó 2 fr., 75 cs. =	10	15
Pieza de 30 sueldos ó 1 fr., 50 cs. =	5	23
Pieza de 15 sueldos ó 75 cs. =	2	28

COBRE.

Pieza de 2 sueldos ó 10 cs.	»	13
Pieza de 1 sueldo ó 5 cs.	»	6

§ IV. Correspondencia de las Medidas, Pesas y Monedas estranjeras con las legales de España.

MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS DE INGLATERRA.

Medidas longitudinales.

Las medidas longitudinales inglesas tienen asimismo por base el pie llamado *foot*, que se divide en 12 pulgadas ó *inchs*, y la pulgada en 12 líneas: he aquí la tabla comparativa.

Inglaterra.	*España.*
Pie. . . . . equivale	1,0939 pies.
Codo (*cubit*) de 1 ½ *pie*.	1,64085 id.
Yard (3 *pies*).	3,2817 id.
Yard.	1,0939 varas.
Paso (5 *pies*).	5,4695 pies.
Fathom (estado) de 6 *pies*.	6,5634 id.
Pole (pértiga) de 11 *codos*.	18,0493 id.
Id.	1,5041 estadales.
Ell ó vara de 45 pulgadas.	1,3674 varas.
Furlong, ó estadio, 660 pies.	721,974 pies.
Milla de 8 estadios.	1,1552 millas.

La *ana* que se emplea para los tejidos ordinarios (*the english ell*) equivale á 1,3674 varas españolas. La que sirve para los lienzos superfinos (*the flemmish ell*) equivale á 0,82042 de la vara española.

La *milla* equivale á 0,28885 de la legua española.

Medidas agrarias.

Rood ó 40 estadales ingleses cuadrados equivalen	90,48 estad. cuadr.
Acre (legal) ó 4 roods.	361,92 estad. cuadr.

NOTA. — No siempre es el acre de la misma estension, porque el estadal inglés varía de 16 ½ á 28 pies ingleses.

Medidas de capacidad.

Para líquidos.

Gallon — 2 pintas equivale	1,8767 azumbres.
Barrel — 31 ½ gallons.	7,3893 cántaras.
But ó pipa — 2 *Rosgshead* — 4 barrels.	29,5571 id.
Tun — 2 pipas — 3 *punchion*.	59,1142 id.
Gallon de aceite, 7 ½ libras.	7,3917 libras.
Tun para el aceite — 236 gallones.	79,7774 arrobas.
Gallon de cerveza.	2,291 azumbres.

Para áridos.

Gallon — 236 pulg. cúb. — 2 *pottes* — 8 *pintts*, equivale	0,7953 celemines.
Bushel — 4 *pecks* — gallons.	6,3623 id.
Quarter — 2 *combs* — 4 *strikes* — 8 bushels.	4,2416 fanegas.
Last — 2 *wey* — 10 quarters.	3,5346 cahices.
Bushel de harina blanca *.	55,19 libras.

La equivalencia del gallon de cerveza en cuartillos es 9,1626 cuartillos. El de vino y otros líquidos equivale á 7,50589 cuartillos.

El *tenn*, medida que sirve para el carbon de piedra, se divide en 2 keels, ó 16 *chaldrons*.

El chaldron consta de 40273 pulgadas cúbicas, unas 9 fanegas de España.

DE LAS PESAS.

En Inglaterra se distinguen tres clases de pesas, á saber, pesas

* Pesa 56 libras.

para oro, plata, piedras preciosas, pan y granos, pesas medicinales y pesas para el comercio.

PESAS PARA ORO, PLATA, PIEDRAS PRECIOSAS, PAN Y GRANOS.

La base de ellas es el *troy*, pesa de 12 onzas. Hay además el grano, que equivale á 1,29778 granos españoles, y la onza, que se compone de 20 *penny-weight* ó 480 granos, y que es igual á 1,081484 onzas de España.

El troy equivale á 1,0811114 libras españolas.

Pesas medicinales.

La onza que se compone de 8 dracmas ó 24 escrúpulos ó 480 granos, equivale á 1,081484 onzas españolas, y la libra que consta de 12 onzas, es igual á 1,081484 libras medicinales de España.

Pesas para el comercio.

Tienen por base al *avoirdupois*, libra de 16 onzas.

El *pound* ó libra de 16 onzas ó 256 dracmas equivale á 0,985557 libras españolas; el *hundred* ó quintal de 112 libras es igual á 110,3824 libras españolas, y finalmente el *tun* de 20 hundred corresponde á 22,0765 quintales de España.

DE LAS MONEDAS.

Las hay de oro, plata y cobre. He aquí el resultado de la comparacion de las llamadas efectivas con las españolas de plata y cobre.

Monedas efectivas.

		Rs. vn.	*ms.*
De oro.	*Guiney* (guinea) de 21 chelines.	103	10,152
	Moneda de 7 chelines.	34	14,717
De plata.	*Crown* (corona) de 5 chelines.	22	15,893
	Shilling (chelin).	4	16,776
De cobre.	*Penny* (penique).	»	12,731
	Farthing.	»	3,182

La libra esterlina es una moneda imaginaria compuesta de 20 chelines y que corresponde á 98 reales y 12,9 maravedises ó á 89 reales y 29,52 maravedises, segun que el cotejo se hace con monedas de oro ó de plata.

MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS DE PORTUGAL.

Medidas longitudinales itinerarias.

Portugal.	*España.*
Craveiro ó palmo de 8 pulgadas equivale	9,53855 pulgadas.
Côvado ó codo de 3 craveiros.	2,38464 pies.
Vara de 5 craveiros.	1,3248 varas.
Braza de 2 varas.	2,6496 id.
Legua.	1,1111 leguas.

Medidas de capacidad para líquidos y áridos.

Pote de 6 *cavadas* ó 24 cuartillos equivale	4,3132 azumbres.
Almude de 2 potes.	1,0783 cántaras.
Alqueira.	3,033 celemines.
Fanega de 4 alqueiras.	1,011 fanegas.

El tonel se compone de 2 botas ó 50 almudes ó 100 potes. El moyo es de 15 fanegas.

DE LAS PESAS.

Grano.	0,9976895 granos.
Libra — 2 marcos — 16 onzas — 128 ochavas — 9216 granos.	0,9976895 libras.
Rótolo — 12 libras.	11,97227 id.
Arroba — 32 libras.	1,27704 arrobas.

El quintal consta de 4 arrobas.

CORRESPONDENCIA DE LAS MONEDAS PORTUGUESAS EN RS. VN. Y MS. ESPAÑOLES.

Monedas efectivas.

De oro.	*Rs. vn.*	*ms.*
Dobraon de cruz — 24000 reis.	662	28,552
Moneda de retrato de 12800 reis.	353	17,494
Lisbonia — 6400 reis.	176	25,747
Cruzado nuevo — 480 reis.	33	4,825
Cruzado viejo.	11	1,505

De plata.	Rs. vn.	ms.
Cruzado nuevo — 400 reis.	10	30,628
Teston — 100 reis.	2	9,214
Vintem — 20 reis.	0	15,442

La relacion media resultante de la comparacion de nuestro doblon de cambio de oro y plata con el de Portugal de ambos metales es 2436,86 reis.

MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS DE DINAMARCA.

Medidas longitudinales.

El pie de Dinamarca equivale á 1,1263956 pies de España. La ana (*alen*) es igual á 2,25279 pies españoles.

El *faon* equivale á 6,75837 pies españoles.

Medidas agrarias.

El *album*, que corresponde á 40 *faons* cuadrados y á 12,687 estadales cuadrados de España, y el *tonder* de 96 *albums*, que equivale á 1217,952 estadales cuadrados ó á 2,1145 fanegas de tierra.

Medidas de capacidad para líquidos y áridos.

El *pott* equivale á 1,91585 cuartillos españoles.
El *tonder* para cerveza equivale á 8,14238 arrobas.
El *fierdingkar* para granos equivale á 0,9386 del celemin español.
El *tonder* para granos corresponde á 2,5029 fanegas.

DE LAS PESAS.

El *pund* (libra) equivale á 1,02549 libras españolas.
El *schippund* equivale á 3,2816 quintales.
El *last* (lastre) equivale á 53,326 quintales.

Monedas efectivas.

		Rs vn.	ms.
De plata. .	*Reichsthaler*.	20	31,25
	Marco lubs.	6	33,5
	Marco dinamarqués.	3	16,75

MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS DE SUECIA.

El pie equivale á 1,0664 pies españoles.
La libra equivale á 0,92425 de la libra española.

Monedas efectivas.

		Rs. vn.	ms.
De plata.	*Speciesdaler* — 48 chelines.	21	9,75
	Pieza de 10 *oers.*	2	19,5

MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS DE RUSIA.

El pie equivale á 1,27 pies españoles.
La libra equivale á 0,89138 de la libra nuestra.

Monedas efectivas.

		Rs. vn.	ms.
De oro.	Imperial de 10 rublos.	163	33,804
	Ducado de 2 ½ rublos.	36	30,556
De plata.	*Rublo* de 100 *kopecks.*	14	30,856
	Piezade 20 kopecks.	2	23,371

MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS DE ROMA.

Medidas longitudinales.

Roma.	*España.*
Palmo de los arquitectos — 12 onzas.	0,8018 pies.
Pie.	1,069 id.
Cana de los arquitectos — 10 palmos.	8,018 id.
Palmo de ara.	0,4488 id.

Medidas de capacidad para líquidos y áridos.

Bocale.	2,81 cuartillos.
Barile.	2,81 cántaras.
Staro.	4,8076 celemines.
Cuarta.	1,2019 fanegas

PESAS.

La libra consta de 12 onzas y corresponde á 0,7372 de la libra española.

CORRESPONDENCIA DE LAS MONEDAS EFECTIVAS DE ROMA EN RS. Y MS. VN. DE ESPAÑA.

De oro.	*Rs. vn.*	*ms.*
Doppia — 313 *bayocos*.	67	6,152
Sechino — 107 bayocos.	22	24,673
De plata.		
Scudo ó *piastra* — 100 bayocos.	19	26,326
Testono ó *carlino* — 30 bayocos.	5	31,696
Papeto — 20 bayocos.	3	32,465
Paolo ó *julio* — 10 bayocos.	1	33,232
Grosso — 5 bayocos.	0	33,616

El *Scudo di oro stampato*, moneda imaginaria, viene á ser 30 reales próximamente.

MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS DE HOLANDA.

Medidas longitudinales.

Holanda.	*España.*
Pie de Amsterdam.	1,01588 pies.
Id. del Rin ó de Leiden.	1,11887 id.
Roeden ó estadal del Rin.	13,426 pies. 1,1189 estadales.

Medidas agrarias.

Arpent del Rin — 120 roedens cuadrados.	150,228 estadal. cuadr.
Morgent del Rin — 5 arpents.	751,14 id. 1,304 fanegas.

Medidas de capacidad para líquidos y áridos.

Mingle.	2,395 cuartillos.
Stekan = 16 mingles.	1,1975 cántaras.
Anker — stekans.	2,395 id.

Pipa ó bota de aceite — 20 stekans.....	30,7715 arrobas.
Scheppel..........................	5,8284 celemines.
Sack = 2 scheppels..................	1,4571 fanegas.

DE LAS PESAS.

La libra de marco equivale á 1,069547 libras españolas.

La libra de Amberes que sirve para la seda, cochinilla y otras mercancías superiores viene á ser 0,9525 de la libra de marco.

El *schippond* equivale á 299 ½ libras españolas.

El *lastre* consta de 4000 libras de Holanda, que corresponden á 42 quintales, 3 arrobas y 3,188 libras de España.

CORRESPONDENCIA DE LAS MONEDAS EFECTIVAS DE HOLANDA EN RS. Y MS. VN. DE ESPAÑA.

Monedas de oro.

	Rs. vn.	ms.
Ruider — 14 florines................	123	22,541
Ducado — 5 florines y 5 sueldos.......	46	28,652

De plata.

Ducaton — 3 florines y 3 sueldos.......	24	29,33
Rixdal — 2 florines y 10 sueldos.....	19	24,9
Florin — 40 dineros de grueso.........	7	30,36
Escalin — 6 sueldos..................	2	12,508

El ducado de cambio español equivale á 105,21 dineros de *grueso*.

MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS DE ALEMANIA.

Medidas longitudinales.

Alemania.	*España.*
Pie de Viena — 12 pulg. — 144 lín....	1,13466 pies.
Klafter de Viena.....................	6,80796 id.
Id. de Bohemia..................	6,38360 id.
Id. de Silesia..................	6,23269 id.
Id. de Moravia..................	7,19601 id.
Elln (ana) de Viena para tejidos........	2,825 id.
Id. de Bohemia..................	2,161 id.
Id. de Silesia..................	2,105 id.
Id. de Moravia..................	2,877 id.

Alemania.	*España.*
Elln del Austria superior...............	2,910 id.
Id. del Tirol........................	2,944 id.

Medidas de capacidad para líquidos.

Maas de Viena......................	2,80748 cuartillos.
Pinta de Bohemia....................	3,79010 id.
Cuart de Silesia....................	1,39251 id.
Maas de Moravia....................	2,12246 id.
Id. del Tirol........................	1,60869 id.

Medidas de capacidad para áridos.

Metzen de Viena....................	1,107 fanegas.
Strich de Bohemia...................	1,6848 id.
Scheffel de Silesia..................	1,3748 id.
Metzen de Moravia..................	1,2711 id.
Hornstarr del Tirol..................	0,5504 id.

DE LAS PESAS.

Libra de Viena.......................	1,2204 libras.
Centner ó quintal de Viena............	122,0425 id.
Cien libras de Bohemia................	112,09237 id.
Id. id. de Silesia..................	115,46929 id.
Id. id. de Moravia.................	122,03274 id.
Id. id. del Tirol..................	134,51036 id.

CORRESPONDENCIA DE LAS MONEDAS EFECTIVAS DE ALEMANIA EN RS. Y MS. VN. DE ESPAÑA.

De oro.

	Rs. vn.	*ms.*
Soberano.—13 ½ florines..............	143	14,76
Ducado imperial.—4 ½ florines.........	48	13,906

De plata.

Reichsthaler.—2 florines..............	18	27,132
Florin.—60 *kreutzers*................	9	13,566
Zehner.—10 *kreutzers*................	1	19,261

CORRESPONDENCIA DE LAS PESAS DE VARIOS PUEBLOS EN GRANOS DE ESPAÑA.

		GRANOS DE ESPAÑA.
España	Marco — 8 onzas	4608
Amsterdam	Marco — 8 onzas — 5120 as	4925
Bergamo	Libra — 12 onzas — 9216 granos.	6516,6
Berlin	Marco — 16 loths	4690
Berna	Marco — 16 loths — 3808 granos.	4945
Bonn	Marco — 16 loths	4680
Brescia	Libra — 12 onzas — 9216 granos.	6389
Bruselas	Marco — 8 onzas — 5120 as	4925
Colonia	Marco — 16 loths	4684,5
Constantinopla	Chelsi — 100 dracmas — 6400 granos	6388
Copenhague	Marco — 16 loths — 512 hellers.	4722
Dantzitk	Marco — 16 loths	4676,5
Dresde	Marco — 16 loths	4676,5
Estocolmo	Marco — 16 loths	8511,5
Florencia	Libra — 12 onzas — 6912 granos.	6800,5
Freiberg	Marco — 16 loths	4675
Genova	Libra — 12 onzas — 6912 granos.	6351,6
Hamburgo	Marco — 12 loths — 65536 richtpfnnungs theile	4681
Lieja	Marco — 8 onzas — 5120 as	4928
Lisboa	Marco — 8 onzas — 4608 granos.	4594
Livorno	Marco — 12 onzas — 6912 granos.	6800,5
Londres	Libra troy — 12 onzas — 5760 granos	7470
Luca	Marco — 12 onzas — 6912 granos.	6766
Malta	Marco — 12 onzas — 6912 granos.	6342
Manheim	Marco — 16 loths	4684
Milan	Libra — 12 onzas — 6912 granos.	4708
Munich	Marco — 16 loths	4685
Napoles	Libra — 12 onzas — 7200 aunas.	6425
Padua	Libra — 12 onzas — 9216 granos.	6220
Pistoya	Libra — 12 onzas — 6912 granos.	6235
Ratisbona	Marco — 128 coronas	8605
Roma	Libra — 12 onzas — 6912 granos.	6358
Scenne	Libra — 12 onzas — 6912 granos.	6347,5
Stutgard	Marco — 16 loths	4684,25
Treviso	Libra — 12 onzas — 9216 granos.	6377
Turin	Marco — 8 onzas — 4608 granos.	4926,25
Varsovia	Libra	8132,5
Venecia	Libra — 12 onzas — 9216 granos.	6783,6
Viena	Marco — 16 loths — 256 pknning.	5620

MONEDAS EFECTIVAS QUE SE USAN EN LOS PRINCIPALES PUNTOS DE EUROPA.

ARGEL.

Monedas de oro.

	Rs. vn.	mrs.
Zequin	38	26,847
Mahabu	25	10,111

De plata.

Piastra	11	22,371
Demimbucho (media peseta)	1	8,333

SICILIA.

Monedas de oro.

Doble onza	102	1,283
Onza	51	»

De plata.

Escudo de 12 tarines	18	23
Id. de 6 tarines	9	11

GENOVA.

Monedas de oro.

Pieza de 96 *lire*	310	26,555
Id. de 12 *lire*	38	28,819

De plata.

Pieza de 8 *lire*	24	10,296
Id. de 1 *lira*	1	1,287

BREMA.

Oro.

No hay mas moneda de oro que el ducado de 2 thalers y 66 grosos, que equivale á 46 rs. y 6,430 ms.

Monedas de plata.

	Rs. vn.	ms.
Alberto sencillo de 1 ½ thalers........	21	15,398
Schware de 12 grosos...............	2	13,044

MILAN.

El escudo de plata, cuyo valor es 16 rs. y 20,435 ms. y la lira de id., que equivale á 4 rs. y 5,108 ms.

TOSCANA.

Monedas de oro.

Un rasponi....................	134	11
Un sequin.....................	44	22

De plata.

Escudo 10 pauls...............	20	23
Medio escudo..................	10	11
Pieza de 1 libra..............	3	4

PIAMONTE.

Monedas de oro.

Carlin nuevo..................	533	7
Doppio ó pistola nueva........	87	22
Medio doppio..................	43	28

De plata.

Escudo nuevo de 6 libras......	26	7
Medio id. de 3 id.............	13	3

CERDEÑA.

Monedas de oro.

Carlin........................	184	30
Medio id......................	92	15

Monedas de plata.

	Rs. on.	ms.
Escudo	17	12
Medio id.	8	23

NAPOLES.

Monedas de oro.

La única que hay es la pieza de 2 ducados.	34	21,074

De plata.

Escudo de 12 carlini	19	14,947
Ducado de 10 carlini	16	16,789
Carlino ó 10 granos	1	21,043

BELGICA.

Monedas de oro.

Doble soberano	131	23
Soberano	65	28
Leon de oro	98	21

De plata.

Corona	21	4
Media corona	10	19
Leon de plata	23	19
Florin	6	23
Medio florin	3	11
Escalin	1	32
Plaqueta ó medio escalin	0	33

AUSTRIA.

Monedas de oro.

Cuádruplo ducado	176	20
Doble ducado	88	10
Soberano	66	21
Ducado de Hungría	45	2
Ducado del Imperio	44	31

Monedas de plata.

	Rs. vn.	ms.
Rixdal.	19	8
Florin (medio rixdal).	9	21
Medio florin.	4	27
Ganzckopf ó *vinot creutzers*.	3	5
Halbckopf ó *dix creutzers*.	1	19

SAJONIA.

Monedas de plata.

Thaler ó *rixdaler* ó escudo.	19	11,094
Florin ó medio escudo — 16 grosos.	9	22,547

VENECIA.

Monedas de oro.

Orsella — 88 *lire*.	186	4,996
Ducato — 14 *lire*.	29	20,876
Doppia — 10 *lire*.	21	5,197
Zechino — 22 *lire*.	46	18,234

De plata.

Scudo della croce — 12 *lire* y 8 *soldi*.	23	31,525
Giustina ó *ducatone* — 11 *lire*.	21	7,676
Tallaro — 12 *lire*.	19	10,069
Ducato — 8 *lire*.	15	14,855
Orsella — 3 *lire* y 18 *soldi*.	7	17,866

PRUSIA.

Monedas de oro.

Federico sencillo — 5 escudos.	81	31,482
Federico doble — 10 escudos.	163	28,964

De plata.

Escudo de 24 *gros*.	13	20,851
Pieza de 2 *gros*.	1	4,570

TURQUIA.

Monedas de oro.

	Rs. vn.	ms.
Zequin funldulf — 7 *piastras* — 280 *paras.*	36	11,29
Id. de 5 *piastras*.	25	32,35

De plata.

Juspara de 2 ½ *piastras*.	12	11,9
Piastra de 40 paras.	4	31,96

HAMBURGO.

Monedas de oro.

Ducado doble — 15 marc. y 8 sueldos. .	92	12,86
Id. sencillo — 7 marc. y 12 sueldos. . .	46	6,43

De plata.

Escudo de 3 marc. y 12 sueldos.	11	8,5
Marco — 16 sueldos.	5	18,464

ESTADOS UNIDOS DE AMERICA.

Monedas de plata.

Dolar.	20	16,25
Libra esterlina de la Carolina meridional y de la Georgia.	88	8
Id. id. de Neuhamshire, Massachusets, Rode Islande, Conneticut y Virginia. . . .	70	3,75
Id. id. de Pensilvania, New-Jersey, Delaware y Maryland.	54	14
Id. id. de New-York y Carolina setentrional.	50	27,5

BAVIERA.

Monedas de oro.

Doble Maximiliano.	128	10
Maximiliano.	64	5

	Rs. vn.	ms.
Carolin.	97	4
Medio Carolin.	48	19
Ducado.	43	26

De plata.

Escudo de Convencion.	19	8
Florin (medio escudo).	9	21
Pieza de 24 creutzers.	3	2

LUBECK.

El ducado de oro de 7 *marcos* y 12 *escalines* equivale á 46 reales y 2,42 ms.

Monedas de plata.

Escudo de 3 *marcos* y 12 *escalines*.	21	15,398
Id. de 3 marcos.	16	22,334
Marco — 16 escalines.	5	18,778

SUIZA.

Monedas de plata.

Escudo de Basilea — 3 *batzen*.	16	11
Florin de id. — 15 batzen.	8	5,5
Franco de Berna — 10 batzen.	5	20
Escudo de Zuric — 2 florines.	17	19,5
Florin de id. — 4 *chelines*.	8	26,75

ASIA É INDIAS DEL ORIENTE.

Monedas de plata.

Itagona ó *tigogin* — 60 *maas* del Japon.	58	30,8
Nansiogin — 7 ½ *maas* de id.	8	8
Kodama — id.	6	14,75
Larin de Arabia.	3	20,5
Rupia de Arcate.	8	33
Id. de Bombay, Madrás y Persia.	9	2,75
Id. de Pondichery.	9	5,25
Id. de Haidernac.	8	24,25
Id. de Bengala.	9	15,25

Habiendo hablado el autor sobre el cambio, descuento y regla conjunta, nos parece será de alguna utilidad la siguiente tabla que indica la moneda que cada nacion ha elejido para que sirva de unidad en el giro con las demás naciones.

España gira por reales de vellon.
Portugal por reis.
Francia por francos.
Inglaterra por libras esterlinas.
Suiza por ducados ó escudos.
Milan por escudos.
Venecia por ducados ó libras.
Parma (ducado) por ducados.
Nápoles por ducados de 5 tarines ó 10 carlines.
Sicilia por onzas de 30 tarines.
Roma por escudos romanos.
Toscana por libras.
Piamonte por escudos.
Génova por escudos.
Cerdeña por escudos.
Bélgica por florines.
Holanda por florines ó libras de gros.
Austria por florines de 30 creutzers.
Baviera por florines del imperio.
Sajonia (alta) por reischstalers de 24 gates-groschens á 12 pfennings.
Id. (baja) por reischstalers de 36 marien-groschens á 8 pfennigs.
Prusia por reischstalers ó por libras de banco de 30 bons-gros.
Hamburgo por marcos lubs de 16 chilines á 12 pfennings ó por reischstalers-species.
Dinamarca por rigsdalers corrientes de 6 marcos á 16 skillings.
Suecia por rixdales species de 48 chilines.
Rusia por rublos de 10 griwnas ó 100 kopecks.
Turquía por pesos de 40 paras.
Estados Unidos por dollares de 100 cents y por libras, sueldos y dineros esterlines.

FIN DE LA COLECCION DE PESAS, MEDIDAS Y MONEDAS.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN LA OBRA.

SEGUNDA PARTE.

APENDICE

SOBRE LAS APROXIMACIONES NUMERICAS.

PRIMERA PARTE.

SEGUNDA PARTE.

COLECCION

DE PESAS, MEDIDAS Y MONEDAS.

FIN DEL INDICE.

ERRATAS.

Páginas.	*Líneas.*	*Dice.*	*Léase.*
32	12	4 centenas	9 centenas
53	2	157836	137836
74	13	3.er EJEMPLO.	54. 3.er EJEMPLO.
159	27	Además de las	122. Además de las
177	27	$(3+1)(1+1)(2+1)$	$(3+1)(1+1)(1+1)(2+1)$
185	17	*no puede*	*puede*
186	9	LIMITADO	ILIMITADO
283	5	He aquí	232. He aquí
302	5	344	244