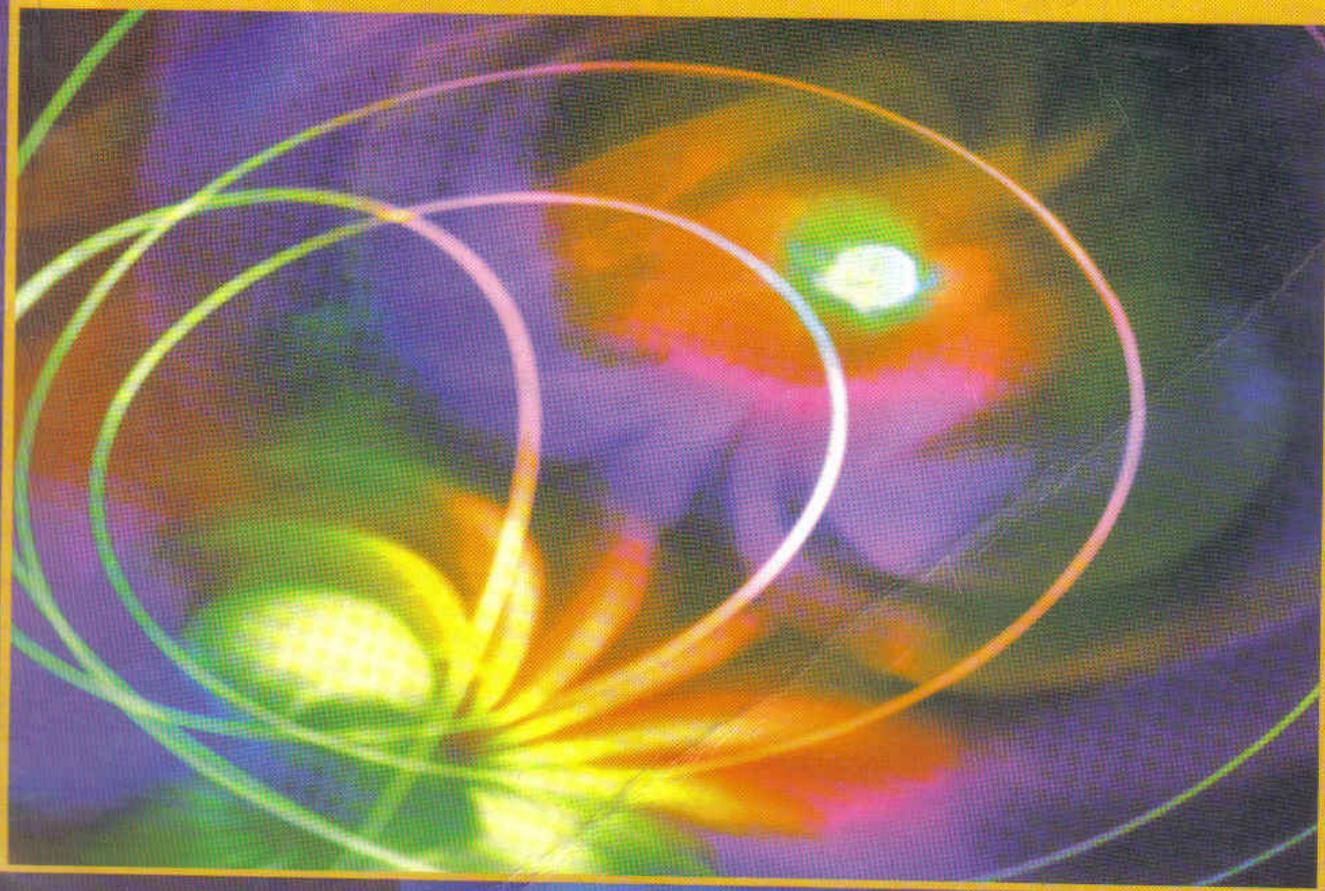


5a. edición

Resnick • Halliday • Krane

# FÍSICA

Volumen 2



<http://librosysolucionarios.net>

VOLUMEN DOS



# FÍSICA



## ALGUNAS PROPIEDADES FÍSICAS

### *Aire (seco, a 20°C y a 1 atm)*

Densidad	1.21 kg/m <sup>3</sup>
Capacidad de calor específico a temperatura constante	1.010 J/kg·K
Razón de capacidades de calor específico	1.40
Velocidad del sonido	343 m/s
Fuerza de ruptura eléctrica	3 × 10 <sup>6</sup> V/m
Masa molar efectiva	0.0289 kg/mol

### *Agua*

Densidad	1.000 kg/m <sup>3</sup>
Velocidad del sonido	1.460 m/s
Capacidad de calor específico a presión constante	4.190 J/kg·K
Calor de fusión (0°C)	333 kJ/kg
Calor de vaporización (100°C)	2.260 kJ/kg
Índice de refracción	1.33
Masa molar	0.0180 kg/mol

### *Tierra*

Masa	5.98 × 10 <sup>24</sup> kg
Radio medio	6.37 × 10 <sup>6</sup> m
Aceleración en caída libre en la superficie terrestre	9.81 m/s <sup>2</sup>
Atmósfera estándar	1.01 × 10 <sup>5</sup> Pa
Período de satélite a 100 km de altitud	86.3 min
Radio de la órbita geosíncrona	42.200 km
Velocidad de escape	11.2 km/s
Momento de dipolo magnético	8.0 × 10 <sup>22</sup> A·m <sup>2</sup>
Campo eléctrico medio en la superficie	150 V/m, hacia abajo

### *Distancia con:*

Luna	3.82 × 10 <sup>8</sup> m
Sol	1.50 × 10 <sup>11</sup> m
Estrella más cercana	4.04 × 10 <sup>16</sup> m
Centro galáctico	2.2 × 10 <sup>20</sup> m
Galaxia de Andrómeda	2.1 × 10 <sup>22</sup> m
Borde del universo observable	~ 10 <sup>26</sup> m



### ALGUNAS CONSTANTES FÍSICAS\*

Velocidad de la luz en el vacío	$c$	$3.00 \times 10^8$ m/s
Constante gravitacional Newtoniana	$G$	$6.67 \times 10^{-11}$ N·m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>
Constante de Avogadro	$N_A$	$6.02 \times 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
Constante de gas molar	$R$	8.31 J/mol·K
Relación masa-energía	$c^2$	$8.99 \times 10^{16}$ J/kg
		931.5 MeV/u
Constante eléctrica (permitividad)	$\epsilon_0$	$8.85 \times 10^{-12}$ F/m
Constante magnética (permeabilidad)	$\mu_0$	$1.26 \times 10^{-6}$ H/m
Constante de Planck	$h$	$6.63 \times 10^{-34}$ J·s
		$4.14 \times 10^{-15}$ eV·s
Constante de Boltzman	$k$	$1.38 \times 10^{-23}$ J/K
		$8.62 \times 10^{-5}$ eV/K
Carga elemental	$e$	$1.60 \times 10^{-19}$ C
Masa del electrón	$m_e$	$9.11 \times 10^{-31}$ kg
Energía del electrón en reposo	$m_e c^2$	511.0 keV
Masa del protón	$m_p$	$1.67 \times 10^{-27}$ kg
Energía del protón en reposo	$m_p c^2$	938.3 MeV
Radio de Bohr	$a_0$	$5.29 \times 10^{-11}$ m
Magnetón de Bohr	$\mu_B$	$9.27 \times 10^{-24}$ J/T
		$5.79 \times 10^{-5}$ eV/T

\* En el apéndice B viene una lista más completa que muestra también los valores experimentales óptimos.

### ALGUNOS FACTORES DE CONVERSIÓN\*

#### Masa

$$1 \text{ kg} = 1,000 \text{ g} = 6.02 \times 10^{26} \text{ u}$$

$$1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

#### Longitud

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 39.4 \text{ in.} = 3.28 \text{ ft}$$

$$1 \text{ mi} = 1.61 \text{ km} = 5,280 \text{ ft}$$

$$1 \text{ in.} = 2.54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ año luz} = 3.26 \text{ parsec} = 9.46 \times 10^{15} \text{ m}$$

$$1 \text{ \AA} = 0.1 \text{ nm} = 100 \text{ pm} = 10^{-10} \text{ m}$$

#### Tiempo

$$1 \text{ d} = 86,400 \text{ s}$$

$$1 \text{ y} = 365 \frac{1}{4} \text{ d} = 3.16 \times 10^7 \text{ s}$$

#### Volumen

$$1 \text{ L} = 1,000 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 = 1.06 \text{ quart}$$

$$1 \text{ gal (U.S.)} = 231 \text{ in.}^3 = 3.79 \text{ L}$$

#### Medida angular

$$1 \text{ rad} = 57.3^\circ = 0.159 \text{ rev}$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ = \frac{1}{2} \text{ rev}$$

#### Velocidad

$$1 \text{ m/s} = 3.28 \text{ ft/s} = 2.24 \text{ mi/h}$$

$$1 \text{ kg/h} = 0.621 \text{ mi/h}$$

#### Fuerza y presión

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dina} = 0.225 \text{ lb}$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 10 \text{ dina/cm}^2 = 1.45 \times 10^{-4} \text{ lb/in.}^2$$

$$1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} = 14.7 \text{ lb/in.}^2 = 76 \text{ cm-Hg}$$

#### Energía y potencia

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} = 0.239 \text{ cal} = 0.738 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

$$1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ cal} = 4.19 \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ caballo de fuerza} = 746 \text{ W} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

#### Electricidad y magnetismo

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 10^4 \text{ gauss}$$

\* Véase en el apéndice G una lista más completa.

VOLUMEN DOS

# FÍSICA

*Quinta edición en inglés  
(Cuarta edición en español)*

**Robert Resnick**

*Profesor de Física  
Rensselaer Polytechnic Institute*

**David Halliday**

*Profesor de Física  
University of Pittsburgh*

**Kenneth S. Krane**

*Profesor de Física  
Oregon State University*

Con la participación de

**Paul Stanley**  
*California Lutheran University*

SÉPTIMA REIMPRESIÓN  
MÉXICO, 2008

GRUPO EDITORIAL PATRIA

<http://librosysolucionarios.net>

Para establecer comunicación  
con nosotros puede hacerlo por:



**correo:**

Renacimiento 180, Col. San Juan  
Tliluaca, Azcapotzalco,  
02400, México, D.F.



**fax pedidos:**

(01 55) 5354 9109 • 5354 9102



**e-mail:**

info@editorialpatria.com.mx



**home page:**

www.editorialpatria.com.mx

Título original de la obra:

*Physics*/Robert Resnick, David Halliday, Kenneth S. Krane, 5th edition

ISBN: 0-471-32057-9

Copyright © 1960, 1962, 1966, 1978, 1992, 2002, John Wiley & Son Inc.

All right reserved

Traducción autorizada de la edición en inglés publicada por John Wiley &  
Son, Inc.

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas

Coordinadora editorial: Elisa Pecina Rosas

Diseño de interiores: Ricardo Pineda

Diseño de portada: Enrique Román Esnaurrizar

Traducción:

Efrén Alatorre Miguel

Lic. en Física, UNAM

Revisión técnica

Físico Antonio Gen Mora

Departamento de Ciencias-Coordinador de Física

Universidad Iberoamericana-Ciudad de México

Ph. D. Raúl Martínez Rosado

Director del Departamento de Ciencias Básicas

ITESM-Campus Estado de México

Físico Ricardo Páez Martínez

Coordinador Académico del Depto. de Física

Universidad Nacional de Colombia

*Física, vol. 2*

Derechos reservados respecto a la edición en español:

© 2002, GRUPO PATRIA CULTURAL, S. A. DE C.V.

© 2007, GRUPO EDITORIAL PATRIA S.A. DE C.V.

Renacimiento 180, Colonia San Juan Tliluaca,

Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana

Registro núm. 43

ISBN 978-970-24-0326-5 (ISBN de 13 dígitos)

ISBN 970-24-0326-X (tercera edición)

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de  
la presente obra en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin el  
consentimiento previo y por escrito del editor.

Impreso en México

Printed in México

**Cuarta edición: 2002**

Sexta reimpresión: 2007

Séptima reimpresión: 2008

## PREFACIO DEL VOLUMEN 2

Ésta es la quinta edición del libro que en 1960 David Halliday y Robert Resnick publicaron por primera vez con el título de *Physics for Students of Science and Engineering*. Desde hace 40 años ha sido la obra clásica en el curso introductorio basado en el cálculo y ha gozado de gran prestigio por su exposición clara y exhaustiva. En esta edición hemos procurado mejorar la accesibilidad, sin sacrificar el nivel ni el rigor de su contenido. Reescribimos gran parte del libro para que el material fluya mejor y para facilitar la introducción a nuevos temas. Hemos tratado de ofrecer ejemplos más prácticos y de proceder de lo particular a lo general cuando se abordan temas nuevos.

En la presente edición se incluyen muchos cambios en la didáctica, lo mismo que en la orden de los capítulos. Quienes estén familiarizados con la cuarta edición encontrarán los mismos temas, aunque en un orden ligeramente revisado. Al realizar las revisiones recurrimos a usuarios de las ediciones anteriores y tuvimos en cuenta los resultados de la investigación dedicada a la enseñanza de la física. A continuación señalamos las innovaciones que ofrece esta edición.

1. Debido a la reordenación que condujo a eliminar dos capítulos del volumen 1, los del volumen 2 fueron numerados comenzando con el 25 (que corresponde al 27 de la cuarta edición).

2. A los alumnos les resulta difícil integrar las distribuciones de carga continua cuando calculan los campos eléctricos, procedimiento que es a la vez conceptualmente abstracto y nada fácil desde el punto de vista del cálculo. A fin de resolver antes los problemas conceptuales, explicamos el procedimiento al tratar de las *fuerzas* eléctricas y no de los *campos* eléctricos; por ejemplo, en el capítulo 25 se explica cómo calcular la fuerza ejercida por una línea de carga sobre una carga puntual. En general, los alumnos intuyen mejor las fuerzas que los campos, de modo que podemos exponer el procedimiento matemático en un contexto más físico. Más adelante repetiremos los cálculos de campos y de potenciales. Por motivos parecidos, abordamos los teoremas de cascarones en el capítulo 25 dentro del contexto de las fuerzas, lo cual corresponde a su introducción en el capítulo 14 del volumen 1 al tratar de la fuerza gravitacional.

3. En ediciones anteriores la dispersión de Rutherford se incluía en el capítulo dedicado a la ley de Gauss; ahora se incorpora en la explicación de los campos eléctricos en el capítulo 26.

4. En el capítulo 27 (Ley de Gauss), hemos ampliado la exposición sobre la relación entre el flujo eléctrico y las líneas de campo; ahora nos ocupamos de las aplicaciones ordinarias de la ley a las distribuciones de carga continua y luego de su aplicación a los conductores.

5. El capítulo 29 (Propiedades eléctricas de los materiales) fue reescrito e incorpora material acerca de los conductores y los dieléctricos que en ediciones anteriores aparecía en los dos capítulos de los capacitores y la corriente. Creemos que se trata de material independiente y que, al exponerlo de esta manera, es más fácil contrastar el comportamiento de los conductores y el de los aislantes en los campos eléctricos.

6. La investigación de la enseñanza de la física revela que los estudiantes tienen serios problemas para entender el comportamiento de los circuitos simples de corriente directa. Por ello hemos ampliado la exposición de este tema, al mismo tiempo que reducimos la de los circuitos multiespiras y la de los instrumentos de medición.

7. En esta edición comenzamos la introducción a las fuentes del campo magnético (Capítulo 33) explicando el campo debido a una sola carga en movimiento y pasando luego al campo debido a un elemento de corriente. Se logra así una mejor correspondencia con la forma en que se abordan los campos magnéticos en el capítulo anterior (se examina la fuerza en una sola carga en movimiento y luego en un elemento de corriente). Ahora se calcula directamente el campo axial de un solenoide usando la ley de Biot-Savart antes de repetir el cálculo mediante la de Ampère.

8. El momento dipolar magnético se pospone hasta el capítulo 35 (Propiedades magnéticas de los materiales). En parte lo hicimos para no sobrecargar a los estudiantes con material nuevo en el primer capítulo dedicado a los campos magnéticos y para ofrecerles una exposición más coherente al iniciar el tratamiento del dipolo magnético en un contexto donde se aplicará muy directamente. Hemos abreviado un poco la explicación del magnetismo atómico y nuclear en este capítulo, optando por posponer una explicación más a fondo en un capítulo posterior, una vez expuestos algunos de los rudimentos de la estructura atómica junto con el espín de los electrones.

9. Se integraron los capítulos 40, 41, 42 y 43 de la edición anterior a los capítulos 38 y 39 de la quinta edición. El capítulo 38 trata ahora de las ecuaciones de Maxwell y de sus aplicaciones a las ondas electromagnéticas, material que figuraba

en los capítulos 40 y 41 de la cuarta edición. En el capítulo 39 se estudian las propiedades de las ondas de luz, incluyéndose además la reflexión y la refracción; se incorpora así material que aparecía antes en los capítulos 41, 42 y 43. La formación de imágenes mediante espejos planos aparece en el siguiente capítulo (40), donde encaja más espontáneamente con la explicación de la formación de imágenes mediante espejos y lentes.

10. En la cuarta edición los temas de la física moderna estaban esparcidos a lo largo del libro, generalmente en secciones marcadas como "opcionales". En esta edición seguimos utilizando ejemplos tomados de ella donde conviene, pero las secciones especiales de la física moderna fueron integradas en los capítulos 45-52 donde se estudian temas de la física cuántica y sus aplicaciones a átomos, sólidos y núcleos. Estamos firmemente convencidos de que la relatividad y la física cuántica son partes esenciales de un curso introductorio de este nivel; pero la mejor forma de hacerles justicia a esos temas es una presentación coherente y unitaria, no una mera colección de exposiciones aisladas. Igual que en la cuarta edición, el capítulo dedicado a la relatividad especial se encuentra entre los capítulos de la mecánica clásica en el volumen I, lo cual refleja nuestra idea de que la relatividad especial debe ubicarse entre los capítulos sobre la cinemática y la mecánica que tratan de la física clásica. Los capítulos 45-48, donde se estudian la física cuántica y sus aplicaciones al átomo, fueron reescritos en gran parte a partir de la cuarta edición. En el capítulo 45 se explican los primeros experimentos tradicionales que revelan las propiedades de la radiación electromagnética a nivel de partículas: la radiación térmica, el efecto fotoeléctrico y la difusión de Compton. Sin embargo, la evidencia inequívoca en favor de la dualidad partícula-onda de la luz proviene sólo de los experimentos de decisión retrasada, que ahora se incluyen en el capítulo 45. En esta edición los rudimentos de la teoría de Schrödinger se estudian ahora en el capítulo 46, con aplicaciones detalladas a los pozos de potencia y al átomo de hidrógeno en el capítulo 47. El capítulo 48, que versa sobre la estructura del átomo, se parece al 52 de la cuarta edición, sólo que se agregó material concerniente al magnetismo atómico.

En esta edición, el material de final de capítulo difiere notablemente del que se incluyó en la anterior. Los conjuntos de problemas (que remitían a las secciones de capítulo) fueron revisados con mucho esmero y repartidos en dos grupos: ejercicios y problemas. Los ejercicios, que remiten a las secciones del libro, suelen ser aplicaciones directas del material expuesto en la sección correspondiente. Su finalidad es ayudarle al alumno a familiarizarse con los conceptos, con fórmulas importantes, con unidades y dimensiones, etc. Los problemas, que no remiten a las secciones del libro, requieren a menudo emplear conceptos de varias secciones e inclusive de capítulos anteriores. En algunos se pide estimar o localizar por su cuenta los datos necesarios para resolverlos. Al corregir y agrupar los ejercicios y los problemas suprimimos algunos problemas de la edición anterior. Un suplemento de problemas contendrá la mayoría de ellos, lo mismo que una

selección de ejercicios y problemas nuevos. Como en la cuarta edición, las respuestas a los ejercicios y problemas impares vienen en el libro y las de los pares vienen en el manual del profesor.

Al material de final de capítulo se agregaron preguntas de opción múltiple y problemas para resolver por computadora. Las preguntas por lo regular son conceptuales y a menudo exigen gran penetración del material. Las respuestas vienen en el manual del profesor. Los problemas pueden requerir estar familiarizados con las técnicas de hojas de cálculo o con las rutinas de manipulación simbólica como Maple o Mathematica.

El material de final de capítulo se preparó con la valiosa ayuda de Paul Stanley de la California Lutheran University. En este proyecto tuvimos la suerte de aprovechar sus excelentes ideas y creatividad.

Hemos procurado elaborar un libro que ofrezca un tratamiento de la física lo más completo y riguroso posible en este nivel. Con todo, conviene señalar lo siguiente: *pocos profesores o ninguno querrán seguir el libro de principio a fin*, sobre todo en un curso de un año. Ofrece muchas alternativas al respecto. El que desee estudiar con mayor profundidad menos temas (el conocido enfoque de "menos y mejor") podrá seleccionar varias de ellos. Algunas secciones o subsecciones están marcadas como "opcionales", lo cual significa que pueden omitirse sin perder la continuidad. Según el programa del curso, lo mismo puede hacerse con otras secciones o incluso con capítulos enteros; también pueden estudiarse con menor profundidad. El manual del profesor, material complementario del texto, contiene sugerencias para abreviar el tratamiento. Con todo, se incluye una exposición completa de los temas, de modo que el estudiante interesado encontrará en el libro los temas omitidos y se hará una idea más amplia del tema. Confiamos que nuestro libro sea visto como una especie de "mapa" de la física: pueden tomarse carreteras panorámicas o directas, sin que se requiera utilizarlas todas en el primer viaje. Al viajero lleno de curiosidad se le estimulará para que regrese al mapa y explore regiones que no visitó en el primer recorrido.

El libro viene en dos volúmenes. En el volumen I se estudian la cinemática, la mecánica y la termodinámica; el volumen II incluye electromagnetismo, óptica, física cuántica y sus aplicaciones. Los suplementos disponibles en inglés son:

Instructor's Solutions Manual	Student Solution Manual
Instructor's Manual	Student Study Guide
Instructor's Resource CD	Physics Simulations
Test Bank	eGrade Homework Management System

Para mayor información sobre estos suplementos, favor de comunicarse con su representante de CECSA.

Al preparar esta edición hemos aprovechado las recomendaciones de un equipo muy profesional de revisores quienes,

en forma individual o colectiva, aportaron comentarios y críticas en casi todas las páginas de la obra:

Richard Bukey, Loyola University  
 Duane Carmony, Purdue University  
 J. Richard Chrisman, U. S. Coast Guard Academy  
 John Dixon, California State University-San Bernardino  
 John Federici, New Jersey Institute of Technology  
 David Gavenda, University of Texas-Austin  
 Stuart Gazes, University of Chicago  
 James Gerhart, University of Washington  
 John Gruber, San Jose State University  
 Martin Hackworth, Idaho State University  
 Jonathan Hall, Pennsylvania State University, Behrend  
 Oshri Karmon, Diablo Valley College  
 Jim Napolitano, Rensselaer Polytechnic Institute  
 Donald Naugle, Texas A&M University  
 Douglas Osheroff, Stanford University  
 Harvey Picker, Trinity College  
 Anthony Pitucco, Prima Community College  
 Robert Scherrer, Ohio State University  
 John Toutonghi, Seattle University

Queremos expresar nuestra profunda gratitud a todas estas personas por su esfuerzo y por las ideas que nos dieron. También queremos agradecer las recomendaciones del Physics Education Group de la Universidad de Washington, especialmente a Paula Heron y a Lillian McDermott.

El personal de John Wiley & Sons nos brindó su constante ayuda en el proyecto, por lo cual le estamos profundamente agradecidos. Un testimonio especial de gratitud a Stuart Johnson por el manejo de él y por su dedicación hasta una feliz culminación. Contribuyeron mucho a la calidad del libro la editora de producción Elizabeth Swain, la editora de fotografías Hilary Newman, la editora de ilustraciones Anna Melhorn y la diseñadora gráfica Karin Kinchloe. Este proyecto no hubiera sido posible sin las habilidades y el trabajo de ellas.

Pese a los esfuerzos de los autores, de los revisores y de los editores, es inevitable que aparezcan errores en el texto; agradeceríamos mucho a los usuarios que nos hicieran llegar sus correcciones y comentarios sobre el contenido o la estructura didáctica de la obra. Nos comprometemos a leer el mayor número posible de ellos, pero sentimos no poder contestarles a todos. No obstante, solicitamos a nuestros lectores enviarnos sus comentarios a la dirección electrónica: [info@patriacultural.com.mx](mailto:info@patriacultural.com.mx)

# CONTENIDO

## CAPÍTULO 25

### CARGA ELÉCTRICA Y LEY DE COULOMB 567

- 25-1 Electromagnetismo: introducción 567
- 25-2 Carga eléctrica 568
- 25-3 Conductores y aislantes 571
- 25-4 Ley de Coulomb 573
- 25-5 Distribuciones continuas de carga 576
- 25-6 Conservación de la carga 580
- Preguntas y problemas 9

## CAPÍTULO 26

### CAMPO ELÉCTRICO 587

- 26-1 ¿Qué es un campo? 587
- 26-2 Campo eléctrico 588
- 26-3 Campo eléctrico de cargas puntuales 590
- 26-4 Campo eléctrico de distribuciones continuas de carga 592
- 26-5 Las líneas del campo eléctrico 595
- 26-6 Una carga puntual en un campo eléctrico 597
- 26-7 Dipolo en un campo eléctrico 600
- 26-8 El modelo nuclear del átomo (opcional) 602
- Preguntas y problemas 605

## CAPÍTULO 27

### LEY DE GAUSS 611

- 27-1 ¿A qué se refiere la ley de Gauss? 611
- 27-2 El flujo de un campo vectorial 612
- 27-3 El flujo de un campo eléctrico 613
- 27-4 Ley de Gauss\* 616
- 27-5 Aplicaciones de la ley de Gauss 617
- 27-6 Ley de Gauss y los conductores 621
- 27-7 Pruebas experimentales de la ley de Gauss y de la de Coulomb 624
- Preguntas y problemas 627

## CAPÍTULO 28

### LA ENERGÍA ELÉCTRICA Y EL POTENCIAL ELÉCTRICO 635

- 28-1 Energía potencial 635

- 28-2 Energía potencial eléctrica 636
- 28-3 El potencial eléctrico 639
- 28-4 Cálculo del potencial a partir del campo 640
- 28-5 Potencial generado por cargas puntuales 641
- 28-6 El potencial eléctrico de las distribuciones de carga continua 644
- 28-7 Cálculo del campo a partir del potencial 646
- 28-8 Superficies equipotenciales 648
- 28-9 El potencial de un conductor cargado 649
- 28-10 El acelerador electrostático (opcional) 651
- Preguntas y problemas 654

## CAPÍTULO 29

### PROPIEDADES ELÉCTRICAS DE LOS MATERIALES 661

- 29-1 Tipos de materiales 661
- 29-2 Un conductor en un campo eléctrico: condiciones estáticas 662
- 29-3 Un conductor en un campo eléctrico: condiciones dinámicas 663
- 29-4 Materiales óhmicos 666
- 29-5 Ley de Ohm: una perspectiva microscópica 668
- 29-6 Un aislante en un campo eléctrico 670
- Preguntas y problemas 674

## CAPÍTULO 30

### CAPACITANCIA 679

- 30-1 Capacitores 679
- 30-2 Capacitancia 679
- 30-3 Cálculo de la capacitancia 681
- 30-4 Capacitores en serie y en paralelo 683
- 30-5 Almacenamiento de energía en un campo eléctrico 685
- 30-6 Capacitor con dieléctrico 687
- Preguntas y problemas 692

## CAPÍTULO 31

### CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA 701

- 31-1 Corriente eléctrica 701
- 31-2 Fuerza electromotriz 703
- 31-3 Análisis de circuitos 704

- 31-4 Campos eléctricos en los circuitos\* 709
- 31-5 Resistores en serie y en paralelo 710
- 31-6 Transferencias de energía en un  
circuito eléctrico 713
- 31-7 Circuitos  $RC$  713
- Preguntas y problemas 717

## CAPÍTULO 32

### EL CAMPO MAGNÉTICO 725

- 32-1 Interacciones y polos magnéticos 725
- 32-2 La fuerza magnética sobre una carga  
en movimiento 727
- 32-3 Cargas circulantes 731
- 32-4 El efecto Hall 734
- 32-5 La fuerza magnética en un alambre  
portador de corriente 736
- 32-6 El par en una espira de corriente 738
- Preguntas y problemas 742

## CAPÍTULO 33

### EL CAMPO MAGNÉTICO DE UNA CORRIENTE 749

- 33-1 El campo magnético producido por una  
carga en movimiento 749
- 33-2 El campo magnético de una corriente 752
- 33-3 Dos corrientes paralelas 756
- 33-4 El campo magnético de un solenoide 758
- 33-5 Ley de Ampère 760
- 33-6 Electromagnetismos y marcos de referencia  
(opcional) 764
- Preguntas y problemas 772

## CAPÍTULO 34

### LA LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY 775

- 34-1 Los experimentos de Faraday 775
- 34-2 La ley de inducción de Faraday 776
- 34-3 Ley de Lenz 777
- 34-4 Fuerza electromotriz de movimiento 780
- 34-5 Generadores y motores 782
- 34-6 Campos eléctricos inducidos 783
- 34-7 La inducción y el movimiento relativo  
(opcional) 786
- Preguntas y problemas 791

## CAPÍTULO 35

### PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LOS MATERIALES 801

- 35-1 El dipolo magnético 801
- 35-2 La fuerza sobre un dipolo en un campo  
no uniforme 804

- 35-3 Magnetismo atómico y nuclear 805
- 35-4 Magnetización 807
- 35-5 Materiales magnéticos 808
- 35-6 El magnetismo de los planetas (opcional) 811
- 35-7 Ley de Gauss aplicada al magnetismo 814
- Preguntas y problemas 817

## CAPÍTULO 36

### INDUCTANCIA 823

- 36-1 Inductancia 823
- 36-2 Cálculo de la inductancia 824
- 36-3 Circuitos  $LR$  826
- 36-4 Almacenamiento de energía en un  
campo magnético 827
- 36-5 Oscilaciones electromagnéticas: cualitativas 830
- 36-6 Oscilaciones electromagnéticas: cuantitativas 832
- 36-7 Oscilaciones amortiguadas y forzadas 833
- Preguntas y problemas 837

## CAPÍTULO 37

### CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA 845

- 37-1 Corrientes alternas 845
- 37-2 Tres elementos separados 846
- 37-3 El circuito  $RLC$  de una malla simple 848
- 37-4 Potencia en los circuitos de corriente alterna 851
- 37-5 El transformador (opcional) 852
- Preguntas y problemas 855

## CAPÍTULO 38

### LAS ECUACIONES DE MAXWELL Y LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS 861

- 38-1 Las ecuaciones básicas del electromagnetismo 861
- 38-2 Campos magnéticos inducidos y la  
corriente de desplazamiento 862
- 38-3 Ecuaciones de Maxwell 864
- 38-4 Generación de una onda electromagnética 866
- 38-5 Ondas viajeras y las ecuaciones de Maxwell 868
- 38-6 Transporte de energía y el vector de Poynting 870
- 38-7 Presión de radiación 872
- Preguntas y problemas 875

## CAPÍTULO 39

### ONDAS DE LUZ 883

- 39-1 El espectro electromagnético 883
- 39-2 La luz visible 886
- 39-3 La velocidad de la luz 887
- 39-4 Reflexión y refracción de las ondas de luz 890
- 39-5 Reflexión interna total 897
- 39-6 El efecto Doppler para la luz 899
- Preguntas y problemas 904

**CAPÍTULO 40**

- ESPEJOS Y LENTES 913**
- 40-1 Formación de imágenes por medio de espejos y lentes 913
  - 40-2 Espejos planos 914
  - 40-3 Espejos esféricos 917
  - 40-4 Superficies esféricas refractantes 921
  - 40-5 Lentes delgadas 923
  - 40-6 Instrumentos ópticos 928  
Preguntas y problemas 932

**CAPÍTULO 41**

- INTERFERENCIA 941**
- 41-1 Interferencia de dos fuentes 941
  - 41-2 Interferencia de rendija doble 942
  - 41-3 Coherencia 944
  - 41-4 Intensidad en la interferencia de rendija doble 946
  - 41-5 Interferencia proveniente de películas delgadas 948
  - 41-6 Interferómetro de Michelson 953  
Preguntas y problemas 957

**CAPÍTULO 42**

- DIFRACCIÓN 963**
- 42-1 La difracción y la teoría ondulatoria de la luz 963
  - 42-2 Difracción de rendija simple 965
  - 42-3 Intensidad en la difracción de rendija simple 967
  - 42-4 Difracción en una abertura circular 970
  - 42-5 Combinación de interferencia y difracción de rendija doble 971  
Preguntas y problemas 976

**CAPÍTULO 43**

- REJILLAS Y ESPECTROS 981**
- 43-1 Rendijas múltiples 981
  - 43-2 Rejillas de difracción 985
  - 43-3 Dispersión y potencia de resolución 986
  - 43-4 Difracción de rayos X 988
  - 43-5 Holografía (opcional) 992  
Preguntas y problemas 994

**CAPÍTULO 44**

- POLARIZACIÓN 999**
- 44-1 Polarización de las ondas electromagnéticas 999
  - 44-2 Hojas de polarización 1001
  - 44-3 Polarización por reflexión 1003
  - 44-4 Refracción doble 1004
  - 44-5 Polarización circular 1006
  - 44-6 Polarización por dispersión 1008  
Preguntas y problemas 1011

**CAPÍTULO 45**

- LA NATURALEZA DE LA LUZ 1015**
- 45-1 Introducción al fotón 1015
  - 45-2 Radiación térmica 1016
  - 45-3 El efecto fotoeléctrico 1019
  - 45-4 El efecto Compton 1021
  - 45-5 Descubrimiento del fotón 1025
  - 45-6 Fotones y ondas 1024
  - 45-7 Reducción de la velocidad de los átomos por bombardeo con fotones 1026  
Preguntas y problemas 1029

**CAPÍTULO 46**

- LA NATURALEZA DE LA MATERIA 1035**
- 46-1 Ondas de materia 1035
  - 46-2 Pruebas de la hipótesis de DeBroglie 1036
  - 46-3 Ondas y partículas 1041
  - 46-4 Principio de incertidumbre de Heisenberg 1042
  - 46-5 La función de onda 1044
  - 46-6 La ecuación de Schrödinger 1045
  - 46-7 El efecto túnel 1046  
Preguntas y problemas 1050

**CAPÍTULO 47**

- ELECTRONES EN POZOS DE POTENCIAL 1055**
- 47-1 Electrones libres y ligados 1055
  - 47-2 Un electrón atrapado en un pozo de potencial 1055
  - 47-3 Un electrón atrapado en un pozo finito 1060
  - 47-4 Un electrón atrapado en un átomo 1062
  - 47-5 El estado base del átomo de hidrógeno 1065
  - 47-6 Momento angular de los electrones en los átomos 1066
  - 47-7 Un estado excitado del átomo de hidrógeno 1069
  - 47-8 Conteo de los estados del hidrógeno 1070  
Preguntas y problemas 1073

**CAPÍTULO 48**

- ESTRUCTURA ATÓMICA 1079**
- 48-1 El espectro de rayos X de los átomos 1079
  - 48-2 Los rayos X y la numeración de los elementos 1081
  - 48-3 Construcción de átomos 1082
  - 48-4 La tabla periódica 1083
  - 48-5 Magnetismo atómico 1086
  - 48-6 El experimento de Stern-Gerlach 1087
  - 48-7 Resonancia magnética nuclear 1089
  - 48-8 Magnetismo y radiaciones atómicas (opcional) 1090
  - 48-9 Láseres y luz láser 1092  
Preguntas y problemas 1097

**CAPÍTULO 49****CONDUCCIÓN ELÉCTRICA  
EN LOS SÓLIDOS 1103**

- 49-1 Teoría cuántica de los sólidos 1103
- 49-2 Electrones de conducción en un metal 1104
- 49-3 Llenado de los estados permitidos 1105
- 49-4 Conducción eléctrica en metales 1108
- 49-5 Bandas y brechas 1109
- 49-6 Conductores, aislantes y semiconductores 1111
- 49-7 Semiconductores dopados 1112
- 49-8 La unión *pn* 1114
- 49-9 Optoelectrónica 1117
- 49-10 El transistor 1119
- 49-11 Superconductores 1120
- Preguntas y problemas 1123

**CAPÍTULO 50****FÍSICA NUCLEAR 1129**

- 50-1 Descubrimiento del núcleo 1129
- 50-2 Algunas propiedades del núcleo 1131
- 50-3 Decaimiento radiactivo 1135
- 50-4 Decaimiento alfa 1136
- 50-5 Decaimiento beta 1138
- 50-6 Medición de la radiación de ionización 1139
- 50-7 Radiactividad natural 1140
- 50-8 Reacciones nucleares 1141
- 50-9 Modelos nucleares (opcional) 1143
- Preguntas y problemas 1146

**CAPÍTULO 51****ENERGÍA PROCEDENTE  
DEL NÚCLEO 1153**

- 51-1 El átomo y el núcleo 1153
- 51-2 Fisión nuclear: el proceso básico 1154
- 51-3 Teoría de la fisión nuclear 1155
- 51-4 Reactores nucleares: los principios básicos 1157

- 51-5 Un reactor natural 1159
- 51-6 Fusión termonuclear: el proceso básico 1161
- 51-7 Fusión termonuclear en las estrellas 1162
- 51-8 Fusión termonuclear controlada 1164
- Preguntas y problemas 1168

**CAPÍTULO 52****FÍSICA DE PARTÍCULAS  
Y COSMOLOGÍA 545**

- 52-1 Interacciones de las partículas 545
- 52-2 Familias de partículas 546
- 52-3 Leyes de conservación 547
- 52-4 El modelo de los quarks 551
- 52-5 La cosmología del Big Bang 551
- 52-6 Nucleosíntesis 555
- 48-7 La edad del universo 557
- Preguntas y problemas 536

**APÉNDICES**

- A. El sistema internacional de unidades (SI) A-1
- B. Constantes físicas fundamentales A-3
- C. Datos astronómicos A-4
- D. Propiedades de los elementos A-6
- E. Tabla periódica de los elementos A-9
- F. Partículas elementales A-10
- G. Factores de conversión A-12
- H. Vectores A-17
- I. Fórmulas matemáticas A-20
- J. Premios Nobel de Física A-22

**RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS  
Y PROBLEMAS IMPARES A-26****CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS P-1****ÍNDICE I-1**

## CARGA ELÉCTRICA Y LEY DE COULOMB

**I**niciamos, en este capítulo, un estudio detallado del electromagnetismo, que abarcará casi toda la parte restante del libro. Las fuerzas electromagnéticas producen la estructura de los átomos y la unión de éstos en moléculas y sólidos. Muchas propiedades de los materiales examinados hasta ahora son de índole electromagnética, entre ellas la elasticidad de los sólidos y la tensión superficial de los líquidos. La fuerza de resorte, la fricción y la fuerza normal provienen de la fuerza electromagnética existente entre los átomos.

Entre los ejemplos del electromagnetismo que vamos estudiar se encuentran la fuerza entre cargas eléctricas, como la que ocurre entre un electrón y el núcleo de un átomo; el movimiento de un cuerpo cargado sujeto a una fuerza eléctrica externa (por ejemplo, un electrón en un haz de osciloscopio); el flujo de cargas eléctricas a través de circuitos y el comportamiento de los elementos de un circuito; la fuerza entre imanes permanentes y las propiedades de los materiales magnéticos; la radiación electromagnética, que finalmente culmina con el estudio de la óptica, la naturaleza y la propagación de la luz.

En este capítulo comenzaremos con la exposición de la carga eléctrica, algunas propiedades de los cuerpos cargados y la fuerza eléctrica fundamental entre dos cuerpos con carga.

### 25-1 ELECTROMAGNETISMO: INTRODUCCIÓN

¿Qué tienen en común las tres situaciones siguientes?

1. Encendemos el apagador del cuarto. El consumo de combustible en una planta eléctrica produce energía electromagnética al hacer que una espira de un alambre conductor gire cerca de un imán. Finalmente parte de esta energía se transfiere a los electrones en el filamento de la lámpara, el cual transforma la energía eléctrica en luz visible.

2. Introducimos una orden en el teclado de la computadora. Se forma un haz de electrones que transmite nuestras instrucciones. En los circuitos del sistema existen miles de trayectorias posibles para los electrones, pero casi todas están bloqueadas por puertas electrónicas. Los electrones pueden desplazarse sólo a través de las que abrió la orden, de modo que el haz de electrones llega a su destino y se ejecuta la misma orden.

3. Oprimimos el botón de selección de canales en el control remoto de nuestro televisor. Las ondas electromagnéticas se dirigen desde la unidad del control hasta un receptor del televisor, el cual entonces lo sintoniza para que acepte otra onda electromagnética proveniente de un satélite situado a gran altura de la Tierra. Las ondas provenientes del satélite dan instrucciones al televisor para que, con las fuerzas eléctrica y magnética, concentre y dirija un haz de electrones que choca contra la superficie del tubo de la imagen y produzca una imagen visible.

El factor común en estos tres fenómenos aparentemente diversos es que se basan en fuerzas *eléctricas* o *magnéticas* que controlan y dirigen el flujo de energía o de partículas. Estas fuerzas constituyen las bases para el estudio del *electromagnetismo*. En este estudio veremos que todos los efectos electromagnéticos pueden explicarse mediante cuatro ecuaciones básicas, conocidas como *ecuaciones de Maxwell*. Éstas representan las leyes individuales del electromagnetismo, al igual que las ecuaciones antes expuestas, que representan

las leyes de la mecánica de Newton o las de la termodinámica.

Vamos a analizar primero los fenómenos eléctricos y luego los magnéticos. Más adelante demostraremos que es imposible separarlos: algunos fenómenos eléctricos producen efectos magnéticos, y algunos fenómenos magnéticos, efectos eléctricos. Esto nos lleva a unificarlos bajo la designación común de electromagnetismo. El descubrimiento de las leyes del electromagnetismo y su unificación fue un gran triunfo de la física del siglo XIX. Su aplicación ha dado origen a muchos aparatos de uso práctico: motores, radios, televisores, radar, hornos de microondas y teléfonos celulares.

El desarrollo de la teoría electromagnética prosiguió en el siglo XX, con tres adelantos de gran trascendencia. En 1905 Albert Einstein demostró que, para un observador en movimiento, los efectos eléctricos aparecen como efectos magnéticos; por tanto, los observadores en movimiento relativo podrían disentir al asignar las mismas medidas a las causas eléctricas o magnéticas. Esta conclusión es la base de la teoría especial de la relatividad, la cual terminaría revolucionando nuestros conceptos de espacio y tiempo. El segundo adelanto fue la formulación de una teoría cuántica del electromagnetismo, denominada *electrodinámica cuántica*, que alcanzó su plenitud hacia 1949 y que permitió calcular las propiedades del átomo con extraordinaria precisión, actualmente con 11 cifras significativas. El tercer avance fue la unificación del electromagnetismo con otra fuerza, la fuerza "débil", la cual causa decaimiento radiactivo y otras interacciones entre las partículas. Del mismo modo que los efectos eléctricos y magnéticos fueron unificados como la interacción electromagnética, también, en la década de 1960, se comprobó que los efectos electromagnéticos y débiles estaban unifi-

cados bajo la interacción *electrodébil*. En nuestro estudio de las fuerzas eléctricas y magnéticas, esta interacción no aporta nada nuevo; conviene más estudiar de manera separada la interacción electromagnética.

La figura 25-1 es una cronología de algunos de los grandes acontecimientos que han permitido el desarrollo de nuestro conocimiento del electromagnetismo.

## 25-2 CARGA ELÉCTRICA

Después de pasar varias veces un peine de plástico por el cabello, encontraremos que el peine ejerce una fuerza sobre los mechones. También observaremos que, una vez atraídos los mechones hacia el peine y una vez que entran en contacto con él, dejan de verse atraídos.

Parece razonable concluir lo siguiente: la atracción entre el peine y el cabello se debe a que una entidad física es transferida desde el peine hacia el cabello cuando se frotan; la misma entidad física vuelve a ser transferida para que neutralice la atracción cuando entran en contacto. Esta entidad física recibe el nombre de *carga eléctrica*; hoy interpretamos la transferencia sobre la base de que los electrones pueden ser extraídos de los átomos de un objeto y fijados a los de otro.

La transferencia de una carga eléctrica mediante fricción es un fenómeno común. Lo conocían los antiguos griegos, quienes observaron que el ámbar al ser frotado con piel, atraía pedazos de heno. Cuando uno camina sobre una alfombra y siente un choque eléctrico al tocar una manija metálica de la puerta o cuando un relámpago llega al suelo desde una nube, son fenómenos que nos permiten observar esta transferencia de carga.

Cuando "cargamos" un objeto (es decir, cuando le transferimos carga), descubrimos que éste ejerce fuerza sobre otro también cargado. Las primeras observaciones de que esta fuerza puede ser atractiva o repulsiva, nos llevan a la conclusión de que existen dos tipos de carga eléctrica: positiva y negativa.\*

Los efectos resultantes de la transferencia de carga son a veces potentes; no obstante, conviene señalar que se originan en la transferencia de una pequeña fracción de la carga eléctrica contenida en los objetos. La materia ordinaria se compone de átomos o moléculas eléctricamente neutros, que contienen cantidades iguales de carga positiva (el núcleo) y negativa (los electrones). Cuando se frotan dos objetos, unos pocos electrones de los átomos de un objeto se transfieren al otro; la mayoría de los electrones permanecen inalterados. Esta ligera perturbación del equilibrio entre las enormes, pero iguales, cantidades de carga positiva y negativa en un objeto, ocasiona

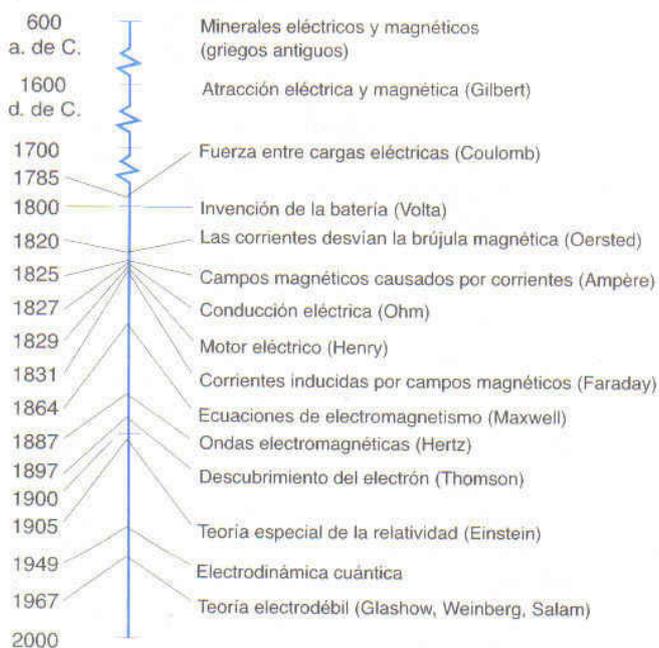
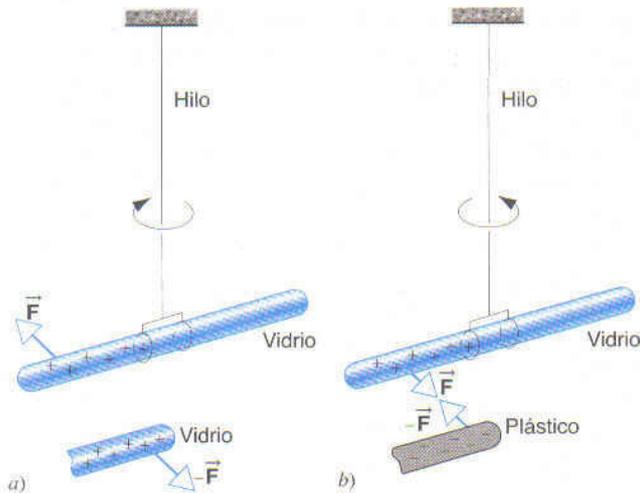


FIGURA 25-1. Cronología de los principales avances en el electromagnetismo.

\* Benjamín Franklin (1706-1790) propuso arbitrariamente la clasificación de la carga eléctrica en positiva y negativa. Era además un científico de fama internacional. De hecho, gracias a su reputación científica obtuvo triunfos diplomáticos en Francia durante la Guerra de Independencia de Estados Unidos.



**FIGURA 25-2.** a) Dos varillas de la misma carga se repelen. b) Dos varillas de carga opuesta se atraen.

na la mayor parte de los efectos eléctricos observados comúnmente.

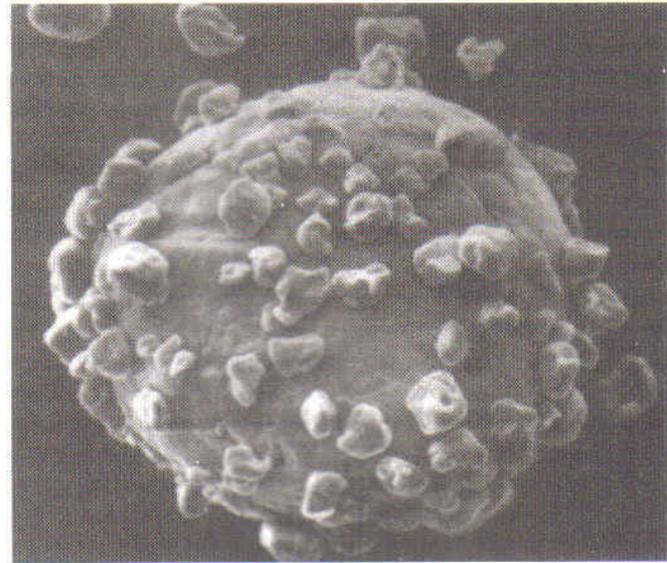
Cuando frotamos con piel una varilla de plástico, se transfieren electrones a ella; como tiene un exceso de electrones (que portan carga negativa), la varilla adquiere carga negativa. La piel presenta ahora una deficiencia de electrones y, en consecuencia, tiene carga positiva. Vemos la atracción que la varilla ejerce sobre las partes de la piel, proveniente de la carga en cada una. De modo parecido, cuando frotamos con seda una varilla de vidrio, observamos que adquiere carga positiva y que se atraen entre sí. En ambos casos, hemos transferido un número relativamente pequeño de electrones y alterado la neutralidad eléctrica de los objetos.

Carguemos ahora una varilla de cristal, frotando un extremo con seda y luego colgándola de un hilo, como en la figura 25-2. Si colocamos cerca otra varilla cargada en forma similar, encontraremos que las dos se repelen entre sí, como en la figura 25-2a. Pero si situamos cerca una varilla de plástico cargada (frotándola con piel), las dos varillas se atraerán una a otra, como en la figura 25-2b.

Explicamos la existencia de esos dos tipos de fuerza en función de dos clases de carga. Cuando frotamos el plástico con piel, se transfieren electrones al plástico, y éste presenta carga negativa. Cuando frotamos vidrio con seda, se transfieren a ella, dejando el vidrio con una deficiencia de electrones y, por tanto, con una carga positiva neta. En la siguiente regla pueden resumirse las fuerzas de la figura 25-2:

*Las cargas del mismo signo se repelen y las de signo contrario se atraen.*

En la sección 25-4 le damos una forma cuantitativa a esta regla designándola como la ley de fuerza de Coulomb. Tenemos en cuenta sólo las cargas que se encuentran en reposo una respecto a otra o que se mueven con mucha lentitud, restricción que define el tema de la *electrostática*.



**FIGURA 25-3.** Partícula portadora de una fotocopiadora Xerox, cubierta con partículas toner que se pegan a ella por atracción electrostática. El diámetro de las partículas mide 0.3 mm aproximadamente.

Las fuerzas eléctricas entre cuerpos cargados se prestan a muchas aplicaciones industriales, entre ellas la pintura por rociado y el revestimiento con polvo, la precipitación de ceniza, impresión de inyección de tinta de no impacto y fotocopiado. La figura 25-3, por ejemplo, muestra una pequeña partícula portadora de una fotocopiadora, cubierta con partículas de polvo negro, llamado *toner*, que se pega al bastidor por medio de fuerzas electrostáticas. Las partículas del toner con carga negativa finalmente son atraídas de sus partículas portadoras a una imagen latente de carga positiva del documento a copiar, la cual se forma en un tambor giratorio. Entonces una hoja cargada de papel atrae las partículas de toner del tambor, tras lo cual se fusionan en su sitio aplicándoles calor para obtener la copia definitiva.

La carga eléctrica neta de un objeto suele representarse con el símbolo  $q$ . Es una cantidad escalar. Puede ser positiva o negativa, dependiendo de si el objeto tiene una carga neta positiva o negativa. La carga eléctrica se mide en coulombs (C). El coulomb es una unidad muy grande de carga; se necesitan unos  $6 \times 10^{18}$  electrones para obtener un coulomb.

El coulomb no puede derivarse de unidades definidas previamente. Por ser la carga eléctrica una magnitud nueva, podemos definir su unidad básica en forma accesible. Una opción es hacerlo en función de la fuerza ejercida entre dos cargas estándar con una separación determinada; por ejemplo, la carga que ejerce una fuerza de un newton sobre otra similar a un metro de distancia. Sin embargo, la fuerza entre cargas estáticas es difícil de medir; así que en la práctica es más útil definir el coulomb a partir de la fuerza magnética entre los alambres portadores de corriente (tema que trataremos en el Cap. 33). Esta fuerza se mide con mayor precisión que la fuerza eléctrica entre cargas estáticas. Conviene, pues, definir

una unidad básica del SI en función de la corriente (rapidez de flujo de la carga eléctrica por unidad de tiempo). En conclusión, el coulomb, como unidad de carga eléctrica, es una unidad derivada, la cual se obtiene de las unidades fundamentales de corriente y tiempo (apéndice A).

### La carga eléctrica está cuantizada

Cuando transferimos carga eléctrica de un objeto a otro, la transferencia no puede efectuarse en unidades arbitrariamente pequeñas. En otras palabras, el flujo de carga como corriente no es continuo, sino que consta de elementos discretos.\* Los experimentos demuestran que la carga eléctrica siempre existe sólo en cantidades que son múltiplos enteros de cierta magnitud elemental de carga  $e$ . Es decir,

$$q = ne \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (25-1)$$

donde (con cuatro cifras significativas)

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C.}$$

La *carga elemental*  $e$  es una de las constantes fundamentales de la naturaleza, cuyo valor experimental se ha calculado con una incertidumbre de alrededor de 4 partes en  $10^8$ .

El electrón y el protón son ejemplos de partículas comunes que portan una unidad fundamental de carga. El electrón tiene una carga de  $-e$ , y el protón una de  $+e$ . Algunas partículas, entre ellas el neutrón, no portan una carga eléctrica neta. Por lo que se sabe, otras partículas elementales transportan cargas que son múltiplos pequeños de  $e$ , generalmente  $\pm 1, \pm 2, \text{ o } \pm 3$ ). Toda partícula tiene una *antipartícula* correspondiente, que posee la misma masa pero la carga opuesta; el antielectrón, que se conoce como *positrón*, tiene una carga de  $+e$ . Las antipartículas no abundan en la naturaleza, pero pueden crearse en el decaimiento y en las reacciones de los núcleos y de las partículas elementales.

La ecuación 25-1 indica que es posible tener, en un objeto, una carga neta de  $+10e$  o de  $-6e$ , pero nunca una de  $3.57e$ . Cuando los valores de una propiedad quedan restringidos a múltiplos discretos de una magnitud básica, decimos que la propiedad está *cuantizada*.

Como la carga elemental es pequeña, en condiciones ordinarias no nos percatamos de la naturaleza discreta de su flujo. Por ejemplo, en un alambre de un circuito electrónico, donde suele haber corrientes pequeñas de un miliampere, cada segundo pasan  $6 \times 10^{15}$  electrones en cualquier sección transversal del alambre.

Los átomos comunes son neutros desde el punto de vista eléctrico, o sea que contienen cantidades iguales de carga positiva y negativa. Su núcleo contiene  $Z$  protones (donde  $Z$  se conoce como *número atómico* del átomo) y, por tanto, una

carga de  $+Ze$ . En un átomo neutro, los electrones con carga negativa  $Z$  circulan alrededor del núcleo. A menudo es posible extraer uno o más electrones de un átomo, creando así un ión que presenta un exceso de carga positiva de  $+e, +2e, \dots$ . Por ejemplo, si pudiéramos extraer todos los electrones de un átomo de uranio ( $Z = 92$ ), obtendríamos una partícula con una carga de  $+92e$ . En ciertas circunstancias hasta podemos unir un electrón adicional a un átomo neutro, creando un ion de carga negativa.

Aunque creemos que los electrones son partículas fundamentales sin subestructura, los protones no son partículas fundamentales. Constan de entidades más elementales denominadas *quarks*. A los *quarks* se les asignan cargas eléctricas fraccionales de  $-\frac{1}{3}e$  y  $+\frac{2}{3}e$ . El protón se compone de tres quarks: dos con cargas de  $+\frac{2}{3}e$  y uno con carga de  $-\frac{1}{3}e$ , que al ser sumadas nos dan una carga neta de  $+e$ . La evidencia experimental en favor de la existencia de quarks dentro del protón es sumamente sólida (por ejemplo, podemos hacer que los protones de mucha energía se dispersen de los quarks con carga fraccional dentro del protón); sin embargo, aunque hagamos chocar los protones con gran violencia, no se ha obtenido un solo quark libre. De ahí que nunca se haya observado una partícula libre con una carga fraccional. Este hecho se explica si la fuerza de atracción que un quark ejerce sobre otro *aumenta* con su separación. Ello contrasta con las fuerzas electromagnéticas y gravitacionales, que *disminuyen* conforme va creciendo la distancia entre un par de cuerpos en interacción.

**PROBLEMA RESUELTO 25-1.** Un centavo de dólar, por ser eléctricamente neutro, contiene la misma cantidad de carga positiva y negativa. ¿Qué magnitud tienen estas cargas iguales?

**Solución** La carga  $q$  está dada por  $NZe$ , donde  $N$  es el número de átomos de un centavo, y  $Ze$  la magnitud de las cargas positivas y negativas transportadas por cada átomo.

El número  $N$  de átomos en un centavo, que para simplificar el problema suponemos que está hecho de cobre, es  $N_A m/M$ , donde  $N_A$  es la constante de Avogadro. La masa  $m$  de la moneda es 3.11 g y la masa  $M$  de 1 mol de cobre (su *masa molar*) es 63.5 g. Encontramos

$$N = \frac{N_A m}{M} = \frac{(6.02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol})(3.11 \text{ g})}{63.5 \text{ g/mol}} \\ = 2.95 \times 10^{22} \text{ átomos.}$$

Todo átomo neutro tiene una carga negativa de magnitud  $Ze$  asociada a sus electrones y una carga positiva de la misma magnitud asociada a su núcleo. Aquí,  $e$  es la carga elemental,  $1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ , y  $Z$  el número atómico del elemento en cuestión. En el cobre,  $Z$  es 29. Por tanto, la magnitud de la carga negativa o positiva total en un centavo de dólar es

$$q = NZe = (2.95 \times 10^{22})(29)(1.60 \times 10^{-19} \text{ C}) \\ = 1.37 \times 10^5 \text{ C.}$$

Es una carga enorme. En comparación con ella, la que podría obtenerse frotando una varilla de plástico es quizá  $10^{-9} \text{ C}$ , más pequeña en un factor aproximado de  $10^{14}$ . He aquí otra comparación: una carga de  $1.37 \times 10^5 \text{ C}$  tardaría de 1 a 2 días en fluir por el filamento de una lámpara común. La materia ordinaria tiene una gran carga eléctrica.

\* En la época de Franklin se pensaba que la carga eléctrica era una sustancia y que fluía como fluido continuo. Hoy sabemos que los fluidos están constituidos por átomos y moléculas individuales: la materia es discreta. Asimismo, el "fluido eléctrico" no es continuo sino discreto.

## 25-3 CONDUCTORES Y AISLANTES

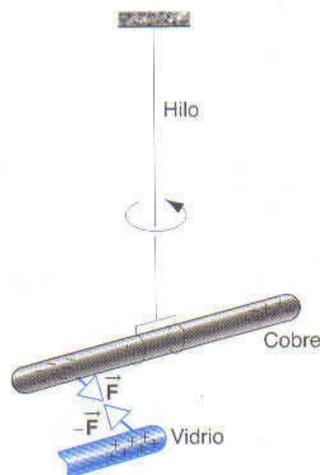
Los materiales se clasifican generalmente atendiendo la capacidad de los electrones para fluir por ellos. En algunos, como los metales, los electrones pueden desplazarse con relativa libertad. Estos materiales reciben el nombre de *conductores*. Los electrones depositados en un lugar del material se mueven a través de él. Otros ejemplos de conductores son la llave de agua y el cuerpo humano.

En otros materiales los electrones apenas si pueden fluir. Los que se depositan en un lugar permanecerán allí. Se les conoce como *aislantes*. He aquí algunos ejemplos: vidrio, plástico y muchos materiales cristalinos, como el NaCl.

Si usted intenta cargar una varilla de cobre sosteniéndola en la mano y frotándola con piel, no lo logrará. Tal vez se transfieran los electrones de la varilla a la piel a causa de la fricción, pero otros fluirán fácilmente del cuerpo por la mano hasta la varilla para reemplazar los electrones que fueron extraídos. En consecuencia, con la fricción no se acumula una carga neta en la varilla. Podemos suponer que la Tierra posee un suministro infinito de electrones, algunos de los cuales entran en el cuerpo para sustituir los que pasaron a la varilla. Se dice que un objeto está *aterrizado* eléctricamente cuando existe un camino por donde los electrones pueden fluir entre un objeto y la Tierra.

Si, por el contrario, le ponemos una manija de plástico a la varilla de cobre, veremos que podemos crear una carga frotándola. La manija aislante bloquea el flujo de electrones entre la varilla y nuestro cuerpo.

Los átomos aislados de un material conductor, como el cobre, generalmente contienen electrones no ligados firmemente que podemos desprender con facilidad, dejando un ion



**FIGURA 25-4.** Una varilla cargada de signo positivo o negativo atrae ambos extremos de una varilla de cobre aislada y sin carga. En este caso los electrones de conducción de la varilla de cobre son atraídos hacia el extremo cercano a ella, dejando el extremo lejano con una carga positiva neta.

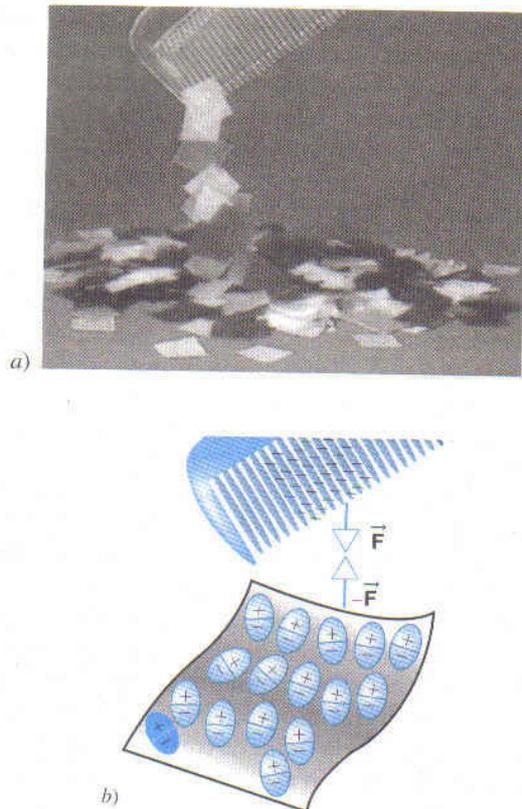
con carga positiva. Cuando los átomos de cobre se combinan para formar cobre sólido, esos electrones no permanecen adheridos a los átomos individuales, sino que pueden vagar libremente por el material. Se les conoce como *electrones de conducción*; en el cobre, un conductor típico, hay unos  $10^{23}$  electrones de conducción por  $\text{cm}^3$ . Los iones con carga positiva no pueden desplazarse libremente y permanecen fijos dentro de la sólida estructura de la red del cobre.

El experimento de la figura 25-4 demuestra la movilidad de la carga en un conductor. Una varilla de cobre, sin carga, se cuelga de un hilo aislante. Cuando acercamos una varilla de vidrio con carga positiva a un extremo de la de cobre, los electrones móviles de conducción de este material son atraídos por las cargas positivas en la varilla de vidrio. El flujo de electrones hacia un extremo de la varilla de cobre deja al otro con una deficiencia de electrones y con una carga positiva neta. El extremo con carga negativa de la varilla de cobre y la de vidrio de carga positiva ejercen fuerzas recíprocas de atracción. Nótese que esta situación es muy distinta a la de la figura 25-2; en la figura 25-4 la varilla de vidrio atrae a la varilla de cobre que no lleva carga neta. (Como veremos en la siguiente sección, la fuerza eléctrica depende inversamente de la separación entre las cargas; por tanto, la fuerza de atracción entre la varilla de vidrio y el extremo negativo de la varilla de cobre es mucho más fuerte que la fuerza de repulsión existente entre la varilla de vidrio y el extremo positivo de la varilla de cobre.)

Si, en vez de la varilla de vidrio con carga positiva de la figura 25-4, usáramos una varilla de plástico con carga negativa, el efecto sería el mismo: una fuerza de atracción entre el plástico y el cobre. En este caso el plástico de carga negativa repelería los electrones de conducción del cobre, dejando un extremo del material con una carga positiva. Habría entonces una fuerza de atracción entre el plástico de carga negativa y el extremo con carga positiva de la varilla de cobre.

También es posible tener una fuerza de atracción entre un cuerpo cargado y un aislante no cargado. La figura 25-5a muestra un peine cargado que atrae trozos no cargados de papel. La explicación de la atracción es distinta de la explicación de la atracción entre la varilla de vidrio y la de cobre. En este caso, el papel es un aislante y no es posible que los electrones se acumulen en un extremo de él (como sucedió con el conductor en la Fig. 25-4). Por el contrario, los electrones de las moléculas individuales de los trozos de papel son repelidos por el peine de carga negativa; de ahí que, los electrones se sitúen preferentemente al lado de las moléculas alejadas del peine. En ellas, el extremo positivo (en el que faltan electrones) está más cerca del peine y experimenta una fuerza mayor de atracción hacia él. Es la causa de la fuerza neta de atracción entre los dos objetos (Fig. 25-5b). La misma fuerza de atracción habría tenido lugar si el peine tuviera carga positiva.

Se da el nombre de *polarización* a la separación de la carga positiva y negativa en un objeto aislado bajo la influencia de un objeto cargado cercano. La polarización puede ocurrir a nivel macroscópico, como en la varilla de cobre de la figura 25-4, o a nivel molecular, como en la figura 25-5.

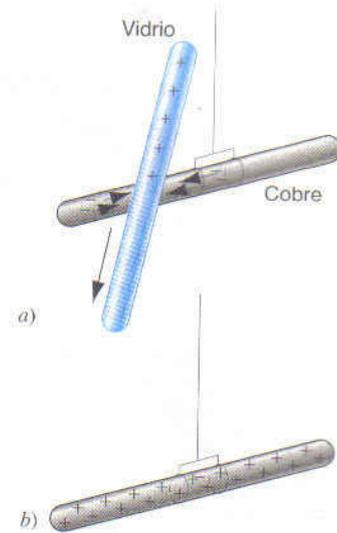


**FIGURA 25-5.** *a)* Un peine cargado atrae pedazos no cargados de papel. *b)* El peine de carga negativa polariza las cargas de las moléculas, produciendo una fuerza de atracción entre el peine y el papel.

### Carga por contacto y por inducción

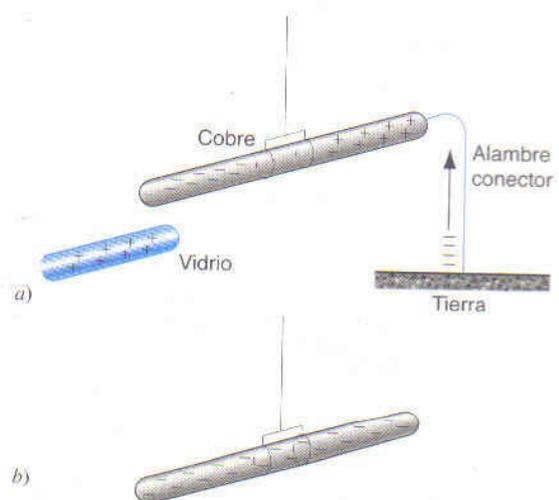
Supóngase que ahora tocamos con una varilla de vidrio de carga positiva una varilla de cobre sin carga, como en la figura 25-6. Los electrones fluirán del cobre para neutralizar la carga positiva del vidrio. Sin embargo, debido a que los electrones no fluyen por el vidrio, pueden neutralizar sólo las cargas positivas situadas en el punto de contacto con el cobre. Si queremos eliminar los electrones adicionales en el cobre, podemos limpiar frotando la varilla de vidrio a lo largo de la de cobre; transferiremos así los electrones a las áreas no neutralizadas del vidrio que entran en contacto con el cobre (Fig. 25-6*a*). Si después extraemos la varilla de vidrio, el cobre tendrá una deficiencia de electrones y, en consecuencia, una carga positiva neta. Los electrones fluirán a través del cobre, de modo que las cargas positivas (los núcleos de iones) estarán distribuidos uniformemente en la superficie del cobre. *Carga por contacto* es el nombre que se da a esta transferencia directa de la carga de un objeto a otro. Aun cuando se transfieren los electrones negativos, a menudo conviene considerar el experimento de la figura 25-6 como si se transfiriesen cargas positivas de la varilla de vidrio a la de cobre.

Retomemos la situación de la figura 25-4. Si colocamos un alambre entre el extremo positivo del cobre y la tierra (como en la Fig. 25-7*a*), los electrones fluirán desde tierra para



**FIGURA 25-6.** *a)* Carga por contacto. Los electrones fluyen del cobre para neutralizar las cargas positivas en el punto de contacto con el vidrio. *b)* Carga resultante en el cobre cuando se quita el vidrio.

neutralizar la carga positiva del cobre. Si dejamos la varilla de vidrio en su sitio y luego quitamos la conexión a tierra, la varilla de cobre conservará una carga negativa neta. Si después quitamos la varilla de vidrio, las cargas negativas se distribuirán sobre la superficie del cobre (Fig. 25-7*b*) para separarse lo más posible una de otra. Este método de cargar un objeto recibe el nombre de *carga por inducción*. Nótese que hemos logrado utilizar la varilla de vidrio cargada positivamente para transferir la carga positiva al cobre por contacto o la carga negativa (desde tierra) por inducción.



**FIGURA 25-7.** *a)* Carga por inducción. Los electrones fluyen de tierra para neutralizar la carga positiva en el extremo opuesto de la varilla de cobre. *b)* Carga resultante en el cobre cuando se quita el vidrio.

## 25-4 LEY DE COULOMB

Hasta ahora, en este capítulo, hemos establecido que existen dos clases de carga eléctrica y que las cargas ejercen fuerza una sobre otra. Ahora nuestro objetivo es entender la naturaleza de esta fuerza.

Los primeros experimentos cuantitativos exitosos con que se estudió la fuerza entre cargas eléctricas fueron realizados por Charles Augustin Coulomb (1736-1806), quien midió las atracciones y repulsiones eléctricas deduciendo la ley que las rige. En principio su aparato se parece al de la figura 25-2, salvo Coulomb que empleó pequeñas esferas cargadas, las cuales se indican con las letras  $a$  y  $b$  en la figura 25-8.

Si las esferas  $a$  y  $b$  están cargadas, la fuerza eléctrica en  $a$  tiende a retorcer la fibra de suspensión. Coulomb anuló el efecto de torsión girando la cabeza de suspensión por el ángulo  $\theta$  necesario para mantener cierta separación entre las dos cargas. Entonces, el ángulo  $\theta$  es una medida relativa de la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga  $a$ . El aparato de la figura 25-8 es una *balanza de torsión*; Cavendish utilizó más tarde un dispositivo similar para medir las atracciones gravitacionales (Sec. 14-3).

Los experimentos de Coulomb y de sus contemporáneos demostraron que la fuerza eléctrica ejercida por un cuerpo cargado sobre otro depende directamente del producto de sus magnitudes e inversamente del cuadrado de su separación. En otras palabras,

$$F \propto \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

Aquí,  $F$  es la magnitud de la fuerza mutua que opera sobre las dos cargas  $q_1$  y  $q_2$ , y  $r$  la distancia entre sus centros. La fuerza

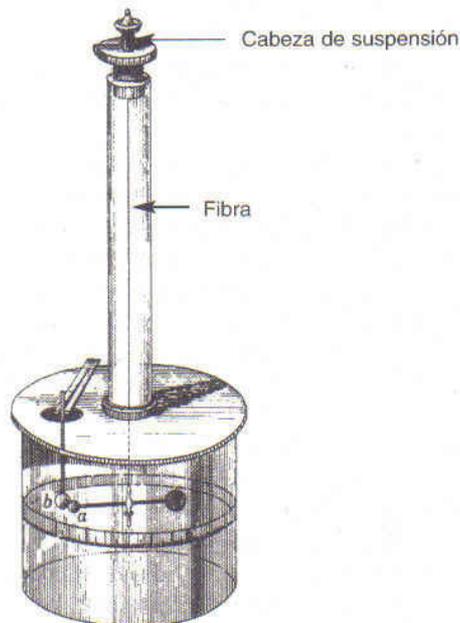


FIGURA 25-8. Balanza de torsión de Coulomb, tomado de su memoria presentada en 1785 a la Academia de Ciencias de París.

en una carga debido a la otra actúa en la línea que las conecta. Tal como lo estableció la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida por  $q_1$  sobre  $q_2$  tiene la misma magnitud pero dirección opuesta a la fuerza ejercida por  $q_2$  sobre  $q_1$ , a pesar de que la magnitud de las cargas puede ser distinta.

Para convertir la proporcionalidad anterior en una ecuación, se introduce una constante de proporcionalidad  $K$ , que llamaremos constante de Coulomb. Para la fuerza entre las cargas, obtenemos así:

$$F = K \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (25-2)$$

La ecuación 25-2, conocida como *ley de Coulomb*, generalmente se cumple exclusivamente con objetos cargados cuyo tamaño es mucho menor que la distancia entre ellos. A menudo se dice que esta ecuación se aplica sólo a *cargas puntuales*.

La aceptación de la ley de Coulomb no se funda cuantitativamente en los experimentos de Coulomb. Tales mediciones no podrían, por ejemplo, convencernos de que el exponente de  $r$  en la ecuación 25-2 es exactamente 2 y no, digamos, 2.0001. En la sección 27-7 demostraremos que la ley también puede deducirse de un experimento directo, el cual prueba que si el exponente de la ecuación 25-2 no es exactamente 2, su diferencia será a lo más de  $1 \times 10^{-16}$ .

La ley de Coulomb nos recuerda la ley de cuadrados inversos de la gravitación de Newton,  $F = Gm_1m_2/r^2$ , que ya tenía 100 años en la época de los experimentos de Coulomb. Ambas son leyes de cuadrados inversos, y la carga  $q$  desempeña la misma función en la ley de Coulomb que la masa  $m$  en la ley de gravitación. Una diferencia entre ellas es que las fuerzas gravitacionales siempre son atractivas, mientras que las electrostáticas pueden ser atractivas o repulsivas, dependiendo, de si las dos cargas tienen signos iguales u opuestos.

En el Sistema Internacional de Unidades, la constante  $K$  se expresa de la siguiente manera:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (25-3)$$

Aunque la selección de esta forma de la constante  $K$  parece hacer innecesariamente compleja la ley de Coulomb, pero termina por simplificar las fórmulas del electromagnetismo que se emplean más que la ley.

La constante  $\epsilon_0$ , que se conoce como *constante eléctrica* (o *permitividad*), tiene un valor que depende del valor de la velocidad de la luz, según veremos en el capítulo 39. Su valor exacto es

$$\epsilon_0 = 8.85418781762 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

La constante de Coulomb  $K$  tiene el valor correspondiente (hasta tres cifras significativas)

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

Con esta selección de la constante  $K$ , la ley de Coulomb puede escribirse así:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (25-4)$$

Cuando  $K$  tiene el valor anterior, la fuerza en newtons se obtiene expresando  $q$  en coulombs y  $r$  en metros.

La importancia de la ley de Coulomb trasciende la mera descripción de las fuerzas ejercidas por las esferas cargadas una sobre otra. Esta ley, cuando la incorporamos a la estructura de la física cuántica, describe correctamente 1) las fuerzas eléctricas que unen los electrones de un átomo a su núcleo, 2) las fuerzas que enlazan los átomos para que formen moléculas y 3) las fuerzas que ligan átomos y moléculas para que formen sólidos o líquidos. Así pues, la mayor parte de las fuerzas en la experiencia cotidiana que no son gravitacionales son eléctricas.

**PROBLEMA RESUELTO 25-2.** En el problema resuelto 25-1 vimos que un centavo de cobre contiene cargas positivas y negativas, cada una con una magnitud de  $1.37 \times 10^5 \text{ C}$ . Supóngase que podamos concentrarlas en dos bultos independientes, mantenidos a una distancia de 100 metros. ¿Qué fuerza de atracción operará sobre cada uno?

**Solución** Con base en la ecuación 25-4 tenemos

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|^2}{r^2} = \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.37 \times 10^5 \text{ C})^2}{(100 \text{ m})^2} \\ = 1.69 \times 10^{16} \text{ N.}$$

¡Alrededor de  $2 \times 10^{12}$  toneladas de fuerza! Aun cuando las cargas estuvieran a una distancia de 1 diámetro terrestre, la fuerza de atracción seguiría siendo de unas 120 toneladas. En este cálculo hemos eludido el problema de formar las cargas individuales en un bulto cuyas dimensiones sean pequeñas en comparación con su separación. Si alguna vez pueden formarse los bultos, los desharán las fuerzas mutuas de repulsión de Coulomb.

Este problema resuelto nos da una lección: no es posible perturbar mucho la neutralidad eléctrica de la materia común. Si se intenta extraer una parte considerable de la carga contenida en un cuerpo, de modo automático aparece una gran fuerza de Coulomb que tiende a recuperarla.

**PROBLEMA RESUELTO 25-3.** La distancia promedio  $r$  entre el electrón y el protón del átomo de hidrógeno es  $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ . a) ¿Qué magnitud tiene la fuerza electrostática promedio que actúa entre las dos partículas? b) ¿Qué magnitud tiene la fuerza gravitacional promedio que opera entre ellas?

**Solución** a) En el caso de la fuerza electrostática, conforme a la ecuación 25-4 tenemos

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2} \\ = 8.2 \times 10^{-8} \text{ N.}$$

Aunque esta fuerza puede parecer pequeña (equivale más o menos al peso de una mancha de polvo), produce una enorme aceleración del electrón dentro del átomo:  $10^{23} \text{ m/s}^2$  aproximadamente.

b) En el caso de la fuerza gravitacional tenemos

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2} \\ = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2} \\ = 3.6 \times 10^{-47} \text{ N.}$$

Vemos que la fuerza gravitacional es más débil que la electrostática por un factor aproximado de  $10^{39}$ . Pese a ello siempre es una fuerza de atracción. En consecuencia, puede acumular masas muy grandes, como sucede en la formación de estrellas y galaxias, de modo que pueden originarse importantes fuerzas gravitacionales. Por el contrario, la fuerza electrostática repele las cargas del mismo signo; así que es imposible acumular una fuerte concentración de carga positiva o negativa. Siempre hay que mantener unidos ambos tipos de carga, a fin de que se compensen entre sí. Las cargas que acostumbramos en la vida diaria son pequeñas perturbaciones de este equilibrio tan avasallador.

**PROBLEMA RESUELTO 25-4.** El núcleo de un átomo de hierro tiene un radio aproximado de  $4 \times 10^{-15} \text{ m}$  y contiene 26 protones. ¿Qué fuerza electrostática de repulsión opera entre dos protones del núcleo si se hallan a una distancia de un radio?

**Solución** De acuerdo con la ecuación 25-4 tenemos

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(4 \times 10^{-15} \text{ m})^2} \\ = 14 \text{ N.}$$

La gran fuerza electrostática de repulsión de más de 3 lb, que actúa sobre un solo protón, ha de ser equilibrada por la fuerza nuclear de atracción que mantiene unido al núcleo. Esta fuerza, cuyo alcance es tan corto que sus efectos no se sienten muy lejos del núcleo, se conoce como "fuerza nuclear fuerte", nombre que la describe a la perfección.

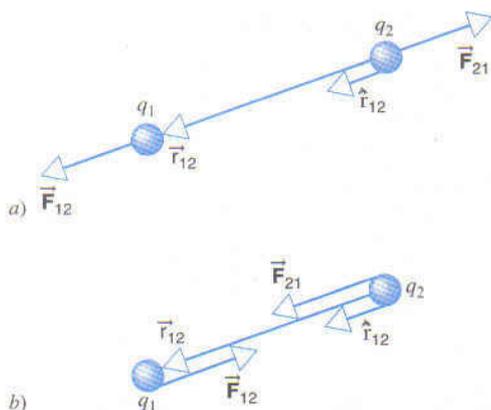
## Ley de Coulomb: forma vectorial

Hasta ahora nos hemos ocupado exclusivamente de la magnitud de la fuerza ejercida por una carga sobre otra, la cual calculamos basándonos en la ley de Coulomb. La fuerza también posee propiedades direccionales por ser un vector. En el caso de esta ley, su dirección la determina el signo relativo de las dos cargas eléctricas.

Como se aprecia en la figura 25-9, supóngase que hay dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  separadas por una distancia  $r_{12}$ . Supongamos, por ahora, que las dos cargas tienen el mismo signo y que, por lo mismo, se repelen. Consideremos la fuerza que la partícula 2 ejerce sobre la partícula 1, fuerza que escribimos en la forma habitual como  $\vec{F}_{12}$ . El vector de posición que ubica la partícula 1 en relación con la partícula 2 es  $\vec{r}_{12}$ ; en otras palabras, si tuviéramos que definir el origen de nuestro sistema coordenado en el lugar de la partícula 2,  $\vec{r}_{12}$  sería el vector de posición de la partícula 1.

Si las dos cargas tienen el mismo signo, la fuerza será de repulsión y, como se advierte en la figura 25-9a,  $\vec{F}_{12}$  ha de ser paralela a  $\vec{r}_{12}$ . Si las cargas tienen signos opuestos, como en la figura 25-9b, la fuerza  $\vec{F}_{12}$  será de atracción y paralela a  $-\vec{r}_{12}$ . En uno y otro caso podemos representarla así

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}. \quad (25-5)$$



**FIGURA 25-9.** a) Dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  del mismo signo ejercen fuerzas iguales y opuestas de repulsión una sobre otra. El vector  $\vec{r}_{12}$  sitúa  $q_1$  en relación con  $q_2$ , y el vector unitario  $\hat{r}_{12}$  señala en la dirección de  $\vec{r}_{12}$ . Nótese que  $\vec{F}_{12}$  es paralelo a  $\vec{r}_{12}$ . b) Ahora las dos cargas tienen signos opuestos y la fuerza es de atracción. Advértase que  $\vec{F}_{12}$  es antiparalela a  $\vec{r}_{12}$ .

Aquí  $r_{12}$  representa la magnitud del vector  $\vec{r}_{12}$  y  $\hat{r}_{12}$ , e indica el vector unitario en la dirección de  $\vec{r}_{12}$ . Esto es,

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (25-6)$$

Hemos utilizado una forma similar a la ecuación 25-5 para expresar la fuerza gravitacional (véanse las Ecs. 14-2 y 14-3).

Otra característica salta a la vista en la figura 25-9. Conforme a la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida sobre la partícula 2 por la partícula 1,  $\vec{F}_{21}$ , es opuesta a  $\vec{F}_{12}$ . Así pues, esta fuerza se expresa exactamente en la misma forma:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} \quad (25-7)$$

Aquí  $\hat{r}_{21}$  es un vector unitario que apunta de la partícula 1 a la 2, es decir, sería el vector unitario en dirección de la partícula 2 si las coordenadas tuvieran su origen en el sitio de la partícula 1.

La forma vectorial de la ley de Coulomb es útil porque contiene la información direccional alrededor de  $\vec{F}$  e indica si la fuerza atrae o repele. Su empleo es importantísimo cuando se trata de fuerzas que operan sobre más de dos cargas. En este caso, la ecuación 25-5 se aplicará a los pares de ellas, y la fuerza total de una se calculará tomando la suma vectorial de las fuerzas debidas a cada una de las cargas restantes. Por ejemplo, la fuerza sobre la partícula 1 en un sistema sería

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \dots, \quad (25-8)$$

donde  $\vec{F}_{12}$  es la fuerza sobre la partícula 1 proveniente de la partícula 2,  $\vec{F}_{13}$  es la fuerza sobre la partícula 1 proveniente de la partícula 3 y así sucesivamente. La ecuación 25-8 es la representación matemática del principio de superposición aplicado a las fuerzas eléctricas. Establece que la fuerza que opera sobre una carga debido a otra no depende de la presencia o ausencia de otras cargas; por tanto, puede calcularse por

separado en cada par de cargas y luego servirse de su suma vectorial para obtener la fuerza neta en cualquiera de ellas. Así, la presencia de la partícula 2 no afecta en absoluto a la fuerza  $\vec{F}_{13}$  que la partícula 3 ejerce sobre la partícula 1. El principio de superposición no es de ninguna manera evidente y puede no cumplirse tratándose de fuerzas eléctricas muy intensas. Su aplicabilidad sólo se verifica por medio de experimentos. Pero sí se cumple en todos los casos presentados en este libro.

**PROBLEMA RESUELTO 25-5.** La figura 25-10 muestra tres partículas cargadas, que se mantienen en su sitio por fuerzas que no se ven en ella. ¿Qué fuerza electrostática, debido a las otras dos caras, actúa sobre  $q_1$ ? supóngase  $q_1 = -1.2 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = +3.7 \mu\text{C}$ ,  $q_3 = -2.3 \mu\text{C}$ ,  $r_{12} = 15 \text{ cm}$ ,  $r_{13} = 10 \text{ cm}$  y  $\theta = 32^\circ$ .

**Solución** En este problema se aplica el principio de superposición. Comenzamos calculando la magnitud de las fuerzas que  $q_2$  y  $q_3$  ejercen sobre  $q_1$ . Las sustituimos en la ecuación 25-5:

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2} \\ &= \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.2 \times 10^{-6} \text{ C})(3.7 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.15 \text{ m})^2} \\ &= 1.77 \text{ N}. \end{aligned}$$

Las cargas  $q_1$  y  $q_2$  tienen signos opuestos, por lo cual la fuerza ejercida por  $q_2$  sobre  $q_1$  es de atracción. Por tanto,  $\vec{F}_{12}$  apunta a la derecha en la figura 25-10.

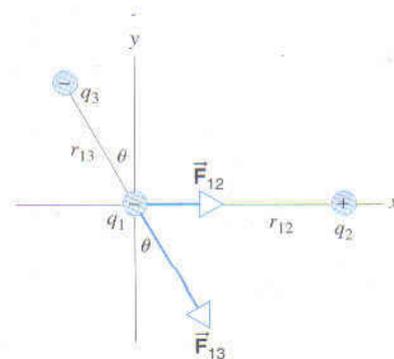
También tenemos

$$\begin{aligned} F_{13} &= \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.2 \times 10^{-6} \text{ C})(2.3 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.10 \text{ m})^2} \\ &= 2.48 \text{ N}. \end{aligned}$$

Estas dos cargas tienen el mismo signo (negativo) y, por lo mismo, la fuerza ejercida por  $q_3$  sobre  $q_1$  es de repulsión. Así  $\vec{F}_{13}$  apunta hacia la derecha, como se indica en la figura 25-10.

Los componentes de la fuerza resultante  $\vec{F}_1$  que actúa sobre  $q_1$ , están determinados por los componentes correspondientes de la ecuación 25-8, o sea

$$\begin{aligned} F_{1x} &= F_{12x} + F_{13x} = F_{12} + F_{13} \cos \theta \\ &= 1.77 \text{ N} + (2.48 \text{ N})(\cos 32^\circ) = 3.08 \text{ N} \end{aligned}$$



**FIGURA 25-10.** Problema resuelto 25-5. Las tres cargas ejercen tres pares de fuerzas de acción reacción una sobre otra. Se muestran sólo las dos fuerzas que operan sobre  $q_1$ .

y

$$F_{1y} = F_{12y} + F_{13y} = 0 - F_{13} \cos \theta \\ = -(2.48 \text{ N})(\cos 32^\circ) = -2.10 \text{ N}.$$

Por medio de los componentes anteriores, puede demostrarse que la magnitud de  $\vec{F}_1$  es 3.73 N y que este vector forma un ángulo de  $-34^\circ$  con el eje  $x$ .

## 25-5 DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

Hasta ahora hemos visto cómo calcular las fuerzas debidas a cargas puntuales. Pero en muchas aplicaciones las fuerzas son ejercidas por objetos cargados, como varillas, placas o sólidos. Para simplificar la exposición supondremos que los objetos son aislantes y que la carga se esparce por su superficie, o volumen, formando una *distribución continua de carga*.

La figura 25-2 mostró las fuerzas que una varilla cargada ejerce sobre otra. La ley de Coulomb se aplica sólo a las cargas puntuales; así que no podemos emplearla en esta forma para calcular la fuerza que una varilla cargada ejerce sobre otra. Es posible imaginar que estén cubiertas con cargas puntuales y calcular, con la ley de Coulomb, la fuerza ejercida por las cargas de una varilla sobre las cargas de la otra varilla; sólo que el procedimiento resultaría demasiado complicado: si las varillas tienen la carga pequeña de apenas 1 nC, habría que considerar  $10^{10}$  cargas puntuales en cada una.

Optamos por retomar una idea de la época de Benjamin Franklin y concebir la carga como una propiedad continua. El procedimiento básico consiste en dividirla en elementos infinitesimales y usar los métodos de cálculo para obtener la fuerza total debida a todos ellos.

Si un objeto contiene una carga neta  $q$ , imaginemos que se divide en muchos elementos pequeños  $dq$ . Cada uno posee cierta longitud, superficie o volumen, según que consideremos cargas que se distribuyen, respectivamente, en una, dos o tres dimensiones. Expresamos  $dq$  en función del tamaño del elemento y de la *densidad de carga*, que describe cómo se distribuyen las cargas en la longitud, superficie o volumen del objeto. En la generalidad de los problemas incluidos en el libro, las cargas estarán distribuidas uniformemente en el objeto, lo cual significa que la densidad posee el mismo valor en todas sus partes.

En algunas situaciones, las cargas se distribuyen en una dimensión, como las delgadas varillas cargadas de la figura 25-2. En este caso expresamos  $dq$  atendiendo a la *densidad lineal de carga* (carga por unidad de longitud)  $\lambda$ , cuya unidad básica es C/m. Un elemento pequeño de la varilla con una longitud  $dx$  tiene una carga  $dq$  dada por

$$dq = \lambda dx. \quad (25-9)$$

Si la varilla presenta una carga uniforme de modo que una carga total  $q$  se distribuya uniformemente por su longitud  $L$ , entonces  $\lambda = q/L$ . Por ejemplo, una varilla de longitud  $L = 0.12 \text{ m}$

que lleva una carga distribuida uniformemente de  $q = 5.4 \times 10^{-6}$  tendrá una densidad lineal de carga de  $\lambda = q/L = 4.5 \times 10^{-5} \text{ C/m}$ . Un pedazo pequeño de ella con una longitud  $dx = 1.0 \text{ mm}$  tendrá una carga  $dq = \lambda dx = 4.5 \times 10^{-8} \text{ C}$ .

En otros casos la carga podría estar distribuida en una superficie bidimensional, digamos la superficie del bastidor portador de la figura 25-3. En este caso,  $dq$  se expresa a partir de la *densidad superficial de carga* (carga por unidad de superficie)  $\sigma$ , medida en la unidad de  $\text{C/m}^2$  del SI. Entonces un elemento pequeño de la superficie  $dA$  tendría una carga dada por

$$dq = \sigma dA. \quad (25-10)$$

Si una carga  $q$  se distribuye uniformemente en un área de superficie  $A$ , entonces  $\sigma = q/A$ .

La carga también podría distribuirse en todo el volumen de un objeto tridimensional. En tal caso se utiliza la *densidad volumétrica de carga* (carga por unidad de volumen)  $\rho$ , cuya unidad es  $\text{C/m}^3$  en el SI. Entonces la carga  $dq$  en un elemento de volumen  $dV$  sería

$$dq = \rho dV. \quad (25-11)$$

Si la carga  $q$  se distribuye uniformemente en todo el volumen  $V$ , entonces  $\rho = q/V$ .

Para ejemplificar los conceptos anteriores calcularemos expresiones referentes a la fuerza que sobre una carga puntual  $q_0$  ejerce una distribución continua de carga. Al ampliar estos métodos es posible calcular la fuerza ejercida por una distribución de carga continua sobre otra.

El procedimiento con que se calcula la fuerza que este tipo de distribución ejerce sobre una carga puntual es el siguiente:

1. Se supone que la distribución continua está dividida en muchos elementos pequeños de carga.
2. Se selecciona un elemento arbitrario y se expresa su carga  $dq$  a partir de las ecuaciones 25-9, 25-10 o 25-11, según que se distribuya en una línea, en una superficie o volumen, respectivamente.
3. Por ser  $dq$  infinitesimalmente pequeña, se la trata como una carga puntual. Se expresa la magnitud del elemento de fuerza  $dF$  ejercido por la carga  $dq$  sobre la carga  $q_0$  en función de la ley de Coulomb, ecuación 25-4:

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|dq||q_0|}{r^2}, \quad (25-12)$$

donde  $r$  es la distancia entre  $dq$  y  $q_0$ .

4. Se tienen en cuenta los signos y la ubicación de  $dq$  y de  $q_0$  para determinar la dirección del elemento de fuerza  $d\vec{F}$ .

5. Luego se calcula la fuerza total, sumando todos sus elementos infinitesimales, que implica la integral

$$\vec{F} = \int d\vec{F}. \quad (25-13)$$

Al calcular esta integral se necesita normalmente recordar que los elementos de carga  $dq$  pueden producir elementos de fuerza  $d\vec{F}$  en diversas direcciones. La ecuación 25-13, en rea-

lidad, significa tres ecuaciones distintas para los tres componentes de  $\vec{F}$ :

$$F_x = \int dF_x, \quad F_y = \int dF_y, \quad F_z = \int dF_z, \quad (25-14)$$

En ocasiones puede recurrirse a los argumentos basados en la simetría para no calcular una o dos de estas integrales.

### Línea con carga uniforme

La figura 25-11 muestra una delgada varilla de longitud  $L$  que se halla sobre el eje  $z$  y que tiene una carga positiva  $q$ , distribuida uniformemente de modo que la densidad lineal de carga es  $\lambda = q/L$ . Queremos calcular la fuerza que la varilla ejerce sobre la carga puntual positiva  $q_0$  ubicada en la bisectriz perpendicular de la varilla (el eje positivo  $y$ ), a una distancia  $y$  de su centro.

La figura muestra los resultados obtenidos al efectuar los pasos 1, 2 y 3 del procedimiento. Imaginamos que la varilla está dividida en elementos pequeños de longitud  $dz$ . Un elemento arbitrario de carga  $dq = \lambda dz$  se halla situado a una distancia  $z$  de su centro y ejerce una fuerza  $dF$  sobre  $q_0$ , donde

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 dq}{r^2}.$$

La dirección de la fuerza  $d\vec{F}$  aparece en la figura. La fuerza  $d\vec{F}$  no tiene componentes en la dirección  $x$  (perpendicular a la página), así que  $F_x = 0$ . También podemos recurrir a un argumento de simetría para probar que  $F_z = 0$ . Por cada elemento de carga  $dq$  ubicado en la posición  $+z$ , hay otro elemento de carga ubicado en  $-z$ . Cuando sumamos las fuerzas provenientes de los elementos de carga en  $+z$  y en  $-z$ , encontramos que los componentes  $z$  tienen igual magnitud pero que señalan en dirección opuesta; por tanto, su suma es igual a cero. Como la carga  $q_0$  se encuentra en el plano medio de la varilla, esta cancelación ocurrirá con todos los pares de elementos de carga en toda la longitud de la varilla. Podemos, pues, concluir que  $F_z = 0$ .

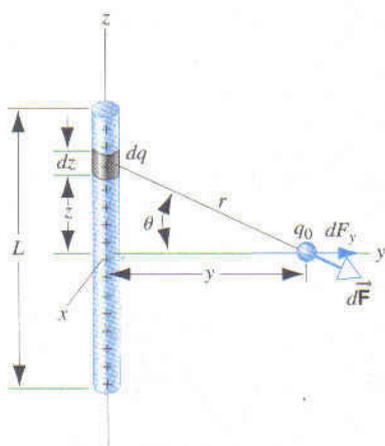


FIGURA 25-11. Varilla cargada uniformemente. Para calcular la fuerza ejercida sobre la carga puntual  $q_0$ , se supone que la varilla consta de muchos elementos individuales de carga, como  $dq$ .

Sólo queda por calcular  $F_y$ . El elemento  $dF_y = dF \cos \theta$  se muestra en la figura 25-11. Con  $dq = \lambda dz$ ,  $r^2 = y^2 + z^2$  y  $\cos \theta = y/r$ , tenemos

$$dF_y = dF \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 \lambda dz}{(y^2 + z^2)} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

$$F_y = \int dF_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \lambda y \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{(y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Al calcular la integral (consúltese el Ap. I y observe que  $y$  es una constante), obtenemos

$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{y\sqrt{y^2 + L^2/4}}. \quad (25-15)$$

Esta fuerza sigue la dirección  $y$  positiva cuando  $q_0$  y  $q$  son positivas. Si movemos la carga  $q_0$  a otra posición del plano  $xy$ , cambia la expresión de la fuerza (Ej. 14).

A menudo resulta esclarecedor evaluar expresiones como la anterior en varios casos límite. Examinemos el resultado cuando  $y \gg L$ , en este caso la fuerza se convierte en

$$F_y \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{y^2},$$

precisamente la expresión de la fuerza de una carga puntual sobre otra. La varilla se parece a una carga puntual cuando estamos muy lejos de la varilla cargada o cuando la varilla es muy pequeña.

### Anillo con carga

En la figura 25-12 vemos un anillo delgado de radio  $R$  que tiene una carga positiva  $q$  distribuida uniformemente, de manera que la densidad de carga lineal es  $\lambda = q/2\pi R$ . Queremos calcular la fuerza que ejerce el anillo sobre la carga puntual positiva  $q_0$ , ubicada en el eje del anillo (que consideraremos como el eje positivo  $x$ ), a una distancia  $z$  del centro del anillo. Un elemento del anillo con carga pequeña tiene una longitud

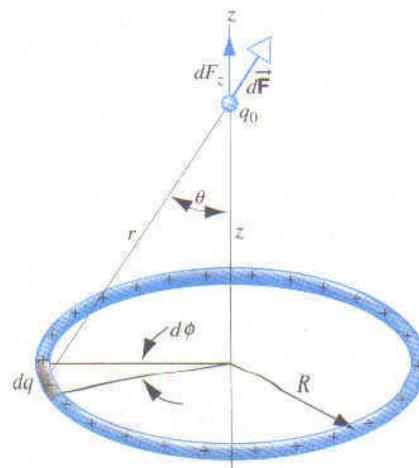


FIGURA 25-12. Anillo cargado uniformemente. Para calcular la fuerza ejercida sobre una carga puntual  $q_0$ , se supone que el anillo consta de muchos elementos individuales de carga

$R d\phi$  y, en consecuencia, porta una carga  $dq = \lambda R d\phi$ . La fuerza  $dF$  ejercida sobre  $q_0$  por  $dq$  es

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 \lambda R d\phi}{(z^2 + R^2)}$$

Podemos servirnos de un argumento de simetría para probar que la única componente no cero de  $\vec{F}$  es su componente  $z$ . Por cada elemento  $dq$  del anillo, habrá otro elemento de igual carga  $dq$  en el extremo opuesto de un diámetro que cruza el centro del anillo; cuando se suman los elementos de fuerza sobre  $q_0$  provenientes de los dos elementos, se cancelarán todos los componentes de la fuerza, excepto  $F_z$ . Con  $\cos \theta = z/r$ , tenemos

$$\begin{aligned} F_z &= \int dF_z = \int dF \cos \theta \\ &= \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 \lambda R d\phi}{(z^2 + R^2)} \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 \lambda R z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi. \end{aligned}$$

La integral evaluada alrededor del anillo da  $2\pi$  y, por tanto, el resultado final de la fuerza es

$$F_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (25-16)$$

¿Es válido el resultado anterior si  $q_0$  se halla en el eje  $z$  negativo? (Ej. 15.)

Este resultado podemos examinarlo como  $z \rightarrow \infty$  para  $z \gg R$  en el caso límite y obtenemos

$$F_z \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{z^2}$$

expresión que vuelve a darnos el resultado de las cargas puntuales. Aparecerá como un carga puntual cuando estemos muy lejos del anillo.

Nótese, asimismo, que  $F_z = 0$  para  $z = 0$ . Esto es razonable porque en el centro del anillo los elementos constitutivos del anillo empujarán la carga  $q_0$  en todas direcciones.

### Disco con carga

En la figura 25-13 se muestra un disco circular de radio  $R$  que porta una carga positiva  $q$  distribuida uniformemente en su superficie, de modo que la densidad de carga superficial es  $\sigma = q/\pi R^2$ . Una carga puntual positiva  $q_0$  se halla en el eje del disco (el eje positivo  $z$ ), a una distancia  $z$  del centro del disco. Para calcular la fuerza que ejerce el disco sobre la carga puntual, podemos dividirlo en una serie de anillos concéntricos. La carga en el anillo, de radio  $w$  y de espesor  $dw$ , que aparece en la figura 25-13, es  $dq = \sigma dA = \sigma(2\pi w dw) = 2\pi\sigma w dw$ . La fuerza que sobre  $dF_z$  ejerce este anillo se calcula por medio de la ecuación 25-16, reemplazando  $q$  por  $dq$  y  $R$  por  $w$ :

$$dF_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0(2\pi\sigma w dw)z}{(z^2 + w^2)^{3/2}}$$

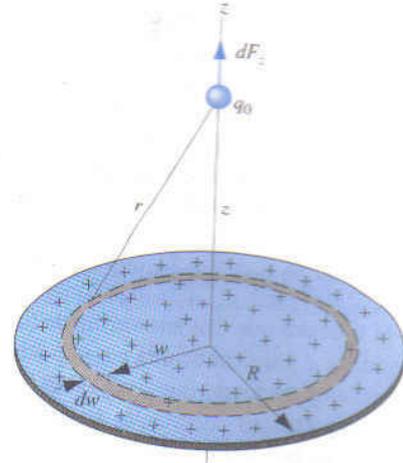


FIGURA 25-13. Disco circular que porta una densidad de carga superficial uniforme. La fuerza ejercida sobre una carga puntual  $q_0$  se calcula dividiendo el disco en delgados anillos circulares.

Si queremos sumar los elementos de fuerza procedentes de todos los anillos, integramos cuando  $w$  varía de 0 a  $R$ :

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 2\pi\sigma z \int_0^R \frac{w dw}{(z^2 + w^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_0 q}{R^2} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right). \end{aligned} \quad (25-17)$$

Nótese que la integral tiene la forma  $\int u^{-3/2}$ , la cual puede calcularse directamente. ¿Cómo se distinguirá la ecuación anterior cuando  $z < 0$  (Ej. 15). Dado que  $z \rightarrow \infty$ , puede utilizarse la expansión binomial (consúltese el Ap. 1) para demostrar que esta expresión se reduce a la ley de Coulomb aplicada a las cargas puntuales.

En los tres ejemplos precedentes hemos supuesto que todas las cargas son positivas. Si la carga puntual, o el objeto extendido (pero no ambos) porta carga negativa, la dirección de la fuerza es opuesta a la que se observa en las figuras 25-11 a 25-13.

**PROBLEMA RESUELTO 25-6.** Dos discos circulares de radio  $R = 5.0$  cm están a una distancia de 6.0 cm en un eje vertical común. Llevan cargas eléctricas iguales en magnitud pero contrarias en signo, distribuidas uniformemente a lo largo de su superficie. ¿Cuánta carga  $q$  debe colocarse en cada disco para suspender una pequeña gota de aceite de masa  $4.0 \times 10^{-15}$  kg y de carga  $-e$  en un punto del eje de los discos y en medio de ellos?

**Solución** Supongamos que la parte superior del disco tiene carga positiva y que el fondo tiene carga negativa. Entonces la parte superior atrae la gota y el fondo la repele. Puesto que la gota se encuentra a la mitad de ellos, las fuerzas tendrán la misma magnitud  $F_z$  dada por la ecuación 25-17. Para mantenerla en equilibrio, es necesario que la fuerza electrostática ascendente neta  $2F_z$  sea igual a su peso  $mg$ . Si hacemos iguales las dos fuerzas y utilizamos la ecuación 25-17, obtenemos

$$q = \frac{mg}{\frac{4e}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)}$$

Y resolviendo tenemos  $q = 35 \text{ nC}$ .

Este método lo utilizó Robert A. Millikan en una serie de experimentos, iniciados en 1906, para medir la carga del electrón (Sec. 26-6).

### Un caso especial

Existe un caso especial en el cual una distribución de carga continua puede tratarse como carga puntual, lo cual permite aplicar la ley de Coulomb en su forma de carga puntual. Se presenta cuando la carga se distribuye con simetría esférica. Dicho de otra manera, la densidad de carga volumétrica puede variar con el radio, pero la densidad es uniforme en un cascarón delgado sin importar su radio.

Primero consideraremos el caso de un cascarón esférico delgado. En la sección 14-5 mencionamos dos propiedades de la fuerza gravitacional que sobre una masa puntual ejerce un cascarón esférico uniforme, a saber: 1) la fuerza sobre una partícula dentro del cascarón es cero y 2) la fuerza sobre una partícula externa es la misma que si la masa del cascarón se concentrara totalmente en su centro.

La simetría entre las leyes de la fuerza gravitacional y electrostática (ambas dependen de  $1/r^2$ ) nos permitirá hacer varias analogías entre la gravitación y la electrostática. A menudo podemos aplicar los resultados de la gravitación a la electrostática sin cálculos ni pruebas adicionales. Esto lo hacemos con las propiedades de los cascarones uniformes. Las pruebas de esos dos resultados tan importantes en la electrostática se deducen exactamente de las de la sección 14-5 aplicables a la fuerza gravitacional.

*Un cascarón esférico de carga uniforme no ejerce fuerza electrostática sobre una carga puntual ubicada en cualquier parte del interior del cascarón.*

*Un cascarón esférico uniformemente cargado ejerce fuerza electrostática sobre una carga puntual ubicada fuera de dicho cascarón, como si la carga entera del cascarón estuviese concentrada en una carga puntual en su centro.*

Existe una diferencia entre los casos gravitacional y electrostático: la fuerza gravitacional siempre es de atracción, pero la fuerza electrostática puede ser de atracción o de repulsión. Sin embargo, esta diferencia no afecta la transferencia de las dos reglas anteriores de la fuerza gravitacional a la electrostática.

Las dos reglas pueden servir para obtener una relación conexa que es válida con las distribuciones esféricas de carga. Supóngase que tenemos una distribución esférica donde la densidad de carga volumétrica  $\rho$  es constante o varía sólo en función del radio  $r$ . Podemos, pues, suponer que la esfera se compone de varios cascarones esféricos delgados. Cada cascarón está cargado uniformemente, esto es, la densidad de carga de un cascarón puede diferir de la de otro cascarón, pero en cada cascarón indi-

vidual la carga está distribuida de manera uniforme. Entonces podemos aplicar las dos reglas a todos los cascarones de la esfera. Si la carga de prueba se encuentra en algún lugar del interior de la esfera, según la primera regla, los cascarones de la carga no ejercen fuerza sobre ella. (Este resultado se usó con la fuerza gravitacional en el problema resuelto 14-14.) Si la carga de prueba se encuentra fuera de la esfera, todos los cascarones pueden ser reemplazados por una carga puntual en el centro; por consiguiente, la esfera puede reemplazarse íntegramente por una carga puntual igual a la carga total de la misma.

Por tal razón, la fuerza que el núcleo de un átomo ejerce sobre sus electrones generalmente no puede proporcionarnos información sobre la distribución de la carga positiva dentro del núcleo. En los núcleos esféricos donde la densidad de la carga depende sólo de  $r$ , todas las distribuciones suministran fuerzas idénticas a un electrón fuera del núcleo. No obstante, en ocasiones un electrón puede vagar en su interior y ofrecernos información referente a su distribución de carga positiva.

**PROBLEMA RESUELTO 25-7.** El núcleo esférico de cierto átomo contiene una carga positiva  $Ze$  en un volumen de radio  $R$ . Compare la fuerza que se ejerce sobre un electrón dentro del núcleo en el radio  $0.5R$ , con la fuerza de radio  $R$  en un núcleo donde a) la densidad de carga es constante en todo su volumen y donde b) aumenta en proporción directa con el radio  $r$ .

**Solución** a) En el núcleo de carga uniforme (que constituye una buena aproximación al comportamiento de muchos núcleos), la densidad de carga volumétrica es

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Cuando el electrón se halla en  $r = R$ , todo el núcleo puede sustituirse por una carga puntual  $q = Ze$  ubicada en su centro, de modo que la fuerza  $F(r)$  en  $r = R$  es

$$F(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{R^2}$$

Cuando el electrón se encuentra en  $r = R/2$ , la carga en todos los radios más grandes no ejerce fuerza alguna sobre el electrón (según lo establece la primera regla de los cascarones esféricos). La carga dentro de  $R/2$  puede reemplazarse con una carga puntual. ¿Cuánta carga está contenida en el interior hasta  $R/2$ ? Puesto que el volumen de una esfera depende de  $r^3$ , el volumen en el interior de  $r = R/2$  es  $(1/2)^3 = 1/8$  de su volumen. Por tanto, la carga dentro de  $r = R/2$  es  $1/8$  de la carga de toda la esfera; así concluimos que

$$\frac{F(R/2)}{F(R)} = \frac{1}{8}$$

b) Podemos escribir la densidad de carga como  $\rho(r) = br$ . Primero debemos calcular la constante de proporcionalidad  $b$ . Sabemos que la carga total en el núcleo debe ser  $Ze$ , así que

$$\int_0^R \rho dV = \int_0^R (br)4\pi r^2 dr = Ze,$$

donde  $dV = 4\pi r^2 dr$  es el volumen de un cascarón esférico. Al resolver la integral tenemos  $b = Ze/\pi R^4$ .

De la segunda regla de los cascarones esféricos, se deduce que la fuerza  $F(R)$  es la misma en ambas distribuciones de carga. Sin em-

bargo,  $F(R/2)$  será distinta para las dos distribuciones. Si queremos calcular esta última es necesario saber cuánta carga  $q'$  está contenida dentro de la esfera de radio  $R/2$ , ya que la carga fuera del radio  $R/2$  no ejerce fuerza alguna sobre el electrón. Esta carga es

$$q' = \int_0^{R/2} \rho dV = \int_0^{R/2} \frac{Ze r}{\pi R^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Ze}{16}.$$

La fuerza sobre el electrón, con  $r = R/2$ , se obtiene sustituyendo la esfera dentro de  $R/2$  por una carga puntual  $q'$  en su centro, lo cual nos da  $1/16$  de la fuerza en la superficie:

$$\frac{F(R/2)}{F(R)} = \frac{1}{16}.$$

El resultado anterior es muy distinto del de la esfera uniforme de la parte a); lo cual demuestra que, aunque el electrón fuera del núcleo no puede distinguir entre las dos distribuciones, el del interior sí puede.

En forma esporádica los electrones atómicos penetran en el núcleo, y un acelerador puede disparar los electrones hacia su interior. Ambos métodos aportan información sobre la distribución de la carga dentro del núcleo. Un resultado de estos experimentos es que la densidad de carga es casi uniforme en la generalidad de los núcleos. Los protones del núcleo se distribuyen con una densidad más o menos uniforme, a pesar de la repulsión de Coulomb de los protones (que se supone que los impulse hacia la superficie nuclear) y a pesar de la intensa fuerza nuclear entre los protones (que se espera que los haga reunirse cerca del centro del núcleo). Más aún, la densidad es aproximadamente igual en los núcleos ligeros que en los núcleos pesados. Resultados tan sorprendentes permiten entender las propiedades importantes de la fuerza nuclear.

## 25-6 CONSERVACIÓN DE LA CARGA

Cuando se frota con seda una varilla de vidrio, aparece una carga positiva en ella. La medición revela que una carga negativa correspondiente aparece en la seda. Ello significa que el frotamiento no crea la carga, sino que se limita a transferirla de un objeto a otro, perturbando un poco su neutralidad eléctrica. Esta hipótesis de la *conservación de la carga* ha pasado rigurosas pruebas experimentales en objetos a gran escala y en átomos, en núcleos y en partículas elementales. Nunca se han descubierto excepciones.

En analogía con otras leyes de conservación, entre ellas la de la conservación del momento o de la energía, podemos expresar la conservación de la carga eléctrica así:

$$\sum q = \text{constante} \quad \text{o} \quad q_i = q_f. \quad (25-18)$$

En todo proceso que se realice en un sistema aislado la carga inicial neta debe ser igual a la carga final neta. Al determinar la carga neta, hay que tener en cuenta los signos de las cargas individuales.

Un ejemplo interesante de este tipo de conservación se observa cuando se acercan un electrón (carga =  $-e$ ) y un an-

tielectrón o positrón (carga =  $+e$ ). Las dos partículas pueden aniquilarse entre sí, convirtiendo su energía de reposo en energía radiante. Esta última puede manifestarse en dos rayos gamma (paquetes de gran energía de radiación electromagnética que no tienen carga):



La carga neta es cero antes y después del evento, conservándose la carga.

Algunas partículas sin carga, como el mesón neutral  $\pi^0$  a veces decaen y se transforman en rayos gamma:



El decaimiento conserva la carga, y la carga total es otra vez 0 antes y después de él. Un ejemplo más: un neutrón ( $q = 0$ ) decae y se convierte en un protón ( $q = +e$ ) y en un electrón ( $q = -e$ ), más otra partícula neutra, un neutrino ( $q = 0$ ):



La carga total es cero antes y después del decaimiento, conservando la carga. Se han hecho experimentos para buscar el decaimiento de un neutrón y su transformación en protón sin que emita electrones, lo cual violaría la conservación de la carga. No se han encontrado este tipo de eventos.

Están prohibidos el decaimiento de un electrón ( $q = -e$ ) y su conversión en partículas neutras, como los rayos gamma ( $\gamma$ ) o en neutrinos ( $\nu$ ); por ejemplo,



porque el decaimiento violaría la conservación de la carga. Los intentos de observarlo han fracasado; ello significa que, si el decaimiento se produce, el electrón debe tener una vida de por lo menos  $10^{23}$  años.

Otro ejemplo de conservación de la carga se encuentra en la fusión de dos núcleos de deuterio  ${}^2\text{H}$  (llamados "hidrógeno pesado") para producir helio. Entre las reacciones posibles figuran:



El núcleo del deuterio contiene un protón y un neutrón; tiene, pues, una carga de  $+e$ . El núcleo del isótopo de hidrógeno con masa 3, que se escribe  ${}^3\text{H}$  y se conoce como *tritio*, contiene un protón y dos neutrones; así que tiene una carga de  $+e$ . En consecuencia, la primera reacción presenta una carga neta de  $+2e$  a ambos lados y la conserva. En la segunda reacción el neutrón no tiene carga, mientras que el núcleo del isótopo de helio con masa 3 contiene dos protones y un neutrón; por tanto, tiene una carga de  $+2e$ . Así pues, la segunda reacción también conserva la carga. La conservación de esta última explica por qué nunca vemos un protón emitido junto con  ${}^3\text{H}$  ni un neutrón junto con  ${}^3\text{H}$ .

En resumen, la carga se conserva en *todas* las interacciones conocidas entre partículas; nunca se ha observado una excepción.

## OPCIÓN MÚLTIPLE

### 25-1 Electromagnetismo: introducción

#### 25-2 Carga eléctrica

- Las cargas eléctricas  $A$  y  $B$  se atraen entre sí. Las cargas eléctricas  $B$  y  $C$  se repelen una a otra. Si mantienen juntas  $A$  y  $C$ ,
  - se atraerán.
  - se repelerán.
  - una no afectará a la otra.
  - Se necesita más información para contestar.
- Las cargas eléctricas  $A$  y  $B$  se atraen entre sí. Las cargas eléctricas  $B$  y  $C$  también se atraen una a otra. Si se mantienen juntas  $A$  y  $C$ ,
  - se atraerán.
  - se repelerán.
  - una no afectará a la otra.
  - Se necesita más información para contestar.
- Las cargas eléctricas  $A$  y  $B$  se repelen entre sí. Las cargas eléctricas  $B$  y  $C$  también se repelen una a otra. Si se mantienen juntas  $A$  y  $C$ ,
  - se atraerán.
  - se repelerán.
  - una no afectará a la otra.
  - Se necesita más información para contestar.

#### 25-3 Conductores y aislantes

- Si un objeto hecho de la sustancia  $A$  frota a otro hecho de la sustancia  $B$ ,  $A$  adquiere carga positiva, y  $B$  carga negativa. Pero si un objeto hecho de la sustancia  $A$  se frota contra otro hecho de la sustancia  $C$ ,  $A$  adquiere carga negativa. ¿Qué sucederá si un objeto hecho de la sustancia  $B$  se frota contra otro hecho de la sustancia  $C$ ?
  - $B$  adquiere carga positiva y también  $C$ .
  - $B$  adquiere carga positiva y  $C$  carga negativa.
  - $B$  adquiere carga negativa y  $C$  carga positiva.
  - $B$  adquiere carga negativa y también  $C$ .
- Un varilla con carga positiva es mantenida cerca de una bola colgada de un hilo aislante. La vemos oscilar hacia la varilla. ¿Qué conclusión podemos sacar?
  - La bola debe haber tenido una carga opuesta a la de la varilla.
  - La bola debe haber sido neutra originalmente, pero se cargó cuando se mantuvo la varilla cerca de ella.
  - La bola debe ser un conductor.
  - La bola no tiene carga positiva, pero podría ser neutra.
- Se cuelga una bola esférica conductora de un hilo conductor aterrizado. Le acercamos una carga puntual. La bola
  - será atraída a la carga puntual y oscilará hacia ella.
  - será repelida de la carga puntual y se alejará de ella oscilando.
  - no se verá afectada por la carga puntual.
- Colgamos una bola esférica conductora de un hilo aislante. Le acercamos una carga positiva puntual. La bola
  - será atraída a la carga puntual y oscilará hacia ella.
  - será repelida de la carga puntual y se alejará de ella oscilando.
  - no se verá afectada por la carga puntual.

#### 25-4 Ley de Coulomb

- Un carga puntual  $3\text{-}\mu\text{C}$  de  $q_1$  se halla a una distancia  $d$  de otra  $-6\text{-}\mu\text{C}$  de  $q_2$ . ¿Cuál es la razón  $|\vec{F}_{12}|/|\vec{F}_{21}|$ ?
  - 1/2
  - 1
  - 2
  - 18
- Dos bolas de plomo de 200 libras se hallan a una distancia de 1 m una de otra. Poseen la misma carga positiva  $q$ . ¿Qué carga producirá entre ellas una fuerza electrostática que tenga la misma magnitud que el peso de una de las bolas?
  - $1 \times 10^{-14} \text{ C}$
  - $1 \times 10^{-7} \text{ C}$
  - $3 \times 10^{-4} \text{ C}$
  - $2 \times 10^{-2} \text{ C}$
- Dos pequeñas esferas conductoras idénticas están a una distancia de 1 m una de otra. Originalmente poseen la misma carga positiva y la fuerza entre ellas es  $F_0$ . Después, la mitad de la carga de una se deposita en la otra. Ahora la fuerza entre ellas es
  - $F_0/4$ .
  - $F_0/2$ .
  - $3F_0/4$ .
  - $3F_0/2$ .
  - $3F_0$ .
- Dos pequeñas esferas conductoras idénticas se encuentran a una distancia de 1 m una de otra. Originalmente poseen cargas iguales, pero opuestas, y la fuerza entre ellas es  $F_0$ . La mitad de la carga de una se deposita después en la otra. Ahora la fuerza entre ellas es
  - $F_0/4$ .
  - $F_0/2$ .
  - $3F_0/4$ .
  - $3F_0/2$ .
  - $3F_0$ .

#### 25-5 Distribuciones continuas de carga

- Una carga puntual  $q$  se halla a una distancia  $a$  de la superficie de una esfera de radio  $2a$ . Una carga  $Q$  se distribuye uniformemente a través de todo el volumen de la esfera. La magnitud de la fuerza electrostática entre la carga puntual  $q$  y la esfera es  $F$ , donde
  - $F = |qQ|/4\pi\epsilon_0 a^2$ .
  - $|qQ|/4\pi\epsilon_0 a^2 > F > |qQ|/12\pi\epsilon_0 a^2$ .
  - $|qQ|/12\pi\epsilon_0 a^2 > F > |qQ|/20\pi\epsilon_0 a^2$ .
  - $|qQ|/20\pi\epsilon_0 a^2 > F > |qQ|/36\pi\epsilon_0 a^2$ .
  - $F = |qQ|/36\pi\epsilon_0 a^2$ .

#### 25-6 Conservación de la carga

- Con un hilo aislante mantenemos una esfera conductora neutra cerca de una varilla con carga positiva. La esfera
  - no se verá afectada por ser neutra.
  - permanecerá neutra, pero de todos modos será repelida por la varilla.
  - permanecerá neutra, pero de todos modos será atraída por la varilla.
  - adquirirá una carga negativa y será repelida por la varilla.
  - adquirirá una carga negativa y será atraída hacia la varilla.
- Los objetos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres conductores esféricos idénticos y aislados. Originalmente  $A$  y  $B$  tienen carga de  $+3 \text{ mC}$ , en tanto que  $C$  tiene una carga de  $-6 \text{ mC}$ . Se deja que los objetos  $A$  y  $C$  se toquen y luego se los separa. Después se deja que los objetos  $B$  y  $C$  se toquen y se les separa.
  - Si se sostienen los objetos  $A$  y  $B$  cerca uno de otro,
    - se atraerán.
    - se repelerán.
    - no tendrán efecto recíproco.
  - Si, en cambio, se sostienen los objetos  $A$  y  $C$  cerca uno de otro,
    - se atraerán.
    - se repelerán.
    - no tendrán efecto recíproco.

# PREGUNTAS

1. Recibe usted dos esferas metálicas montadas sobre soportes aislantes portátiles. Encuentre la manera de suministrarles una carga igual y opuesta. Puede utilizar una varilla de vidrio frotada con seda, pero sin que ésta las toque. ¿Deben las esferas tener el mismo tamaño para que este método dé resultado?
2. En la pregunta 1 encuentre la forma de suministrarles a las esferas una carga igual del mismo signo. Una vez más, ¿deben tener el mismo tamaño para que este método dé resultado?
3. Una varilla cargada atrae fragmentos de polvo de corcho seco, los cuales a menudo después de tocarla se alejan de ella saltando violentamente. Explique por qué.
4. ¿Cómo cambiarán sus respuestas a las preguntas 1, 2 y 3 de opción múltiple, si se pudiera eliminar la carga de uno de los objetos A, B o C?
5. Los experimentos descritos en la sección 25-2 podrían explicarse postulando cuatro tipos de carga, es decir, con vidrio, con seda, con plástico y con piel. ¿Qué argumento rechaza esto?
6. Acercamos mucho una carga positiva a un conductor aislante no cargado. Aterrizamos el conductor y mantenemos cerca la carga. ¿Tendrá carga positiva, negativa o de ninguna clase si a) se elimina la carga y después también la conexión a tierra y b) se elimina la conexión y luego la carga?
7. Puede descargarse un aislante con carga pasándolo por encima de una llama. Explique cómo sucede esto.
8. Si frotamos fuertemente una moneda entre los dedos, tendremos la impresión de que no se carga con la fricción. ¿Por qué?
9. Si caminamos rápidamente por una alfombra, sentimos a menudo un chispa al tocar la manija de una puerta. a) ¿A qué se debe esto? b) ¿Cómo puede evitarse?
10. ¿Por qué en los experimentos electrostáticos no se obtiene buenos resultados en días húmedos?
11. ¿Por qué se recomienda tocar el marco metálico de la computadora personal antes de instalar accesorios internos?
12. Se dice que una varilla aislada porta carga eléctrica. ¿Cómo podría verificarse esto y determinar el signo de la carga?
13. Si sostenemos una varilla cargada de vidrio cerca de un extremo de una varilla metálica sin carga, como en la figura 25-14, los electrones son atraídos hacia un extremo según se aprecia. ¿Por qué cesa el flujo de electrones? Después de todo, en la varilla metálica hay un suministro casi inagotable de ellos.



FIGURA 25-14. Preguntas 13 y 14.

14. En la figura 25-14, ¿actúa sobre la varilla metálica una fuerza eléctrica resultante? Explique su respuesta.
15. Una persona de pie sobre un taburete aislante toca un conductor aislado y cargado. ¿Se descarga por completo el conductor?
16. a) Una varilla de vidrio con carga positiva atrae un objeto suspendido. ¿Podemos concluir que éste tiene carga negativa? b) Un va-

rilla de vidrio con carga positiva repele un objeto suspendido. ¿Podemos concluir que éste tiene carga positiva?

17. Explique que se entiende al decir que las fuerzas electrostáticas obedecen el principio de superposición.
18. ¿Cambia la fuerza eléctrica que una carga ejerce sobre otra si se acercan otras cargas?
19. Una solución de sulfato de cobre es un conductor. ¿Qué partículas cumplen la función de portadores en este caso?
20. Si los electrones de un metal como el cobre pueden moverse libremente, a menudo se verán empujados hacia la superficie del metal. ¿Por qué no siguen su camino y salen de él?
21. ¿Tendría gran importancia que Benjamin Franklin hubiera llamado positivos a los electrones y negativos a los protones?
22. La ley de Coulomb predice que la fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra es proporcional al producto de las dos. ¿Cómo demostraría usted en el laboratorio este aspecto de la ley?
23. Explique por qué un núcleo atómico puede ser estable si se compone de partículas que son neutras (neutrones) o que portan cargas (protones).
24. Un electrón (carga =  $-e$ ) circula alrededor de un núcleo de helio (carga =  $+2e$ ) en un átomo de helio. ¿Qué partículas ejercen la máxima fuerza una sobre otra?
25. La carga es una característica auténtica de una partícula, prescindiendo de su estado de movimiento. Explique cómo puede probar esta afirmación haciendo una vigorosa verificación experimental de si el átomo de hidrógeno es verdaderamente neutro desde el punto de vista eléctrico.
26. Suponga que la carga de la figura 25-11 no estuviera distribuida uniformemente a lo largo de la varilla, sino que se concentrara en su centro y que fuera disminuyendo con la misma rapidez hacia los dos extremos. ¿Tendrá ahora la fuerza un componente  $z$ ? Si la varilla presentara la misma carga total  $q$  que la varilla de carga uniforme, ¿cuál sería la magnitud de  $F_y$  en relación con la ecuación 25-15? Repita ambas preguntas si la carga se distribuye a través de la varilla de modo que haya una deficiencia cerca del centro y que la densidad de carga aumente con la misma rapidez hacia los dos extremos.
27. Según el teorema de Earnshaw, ninguna partícula puede permanecer en equilibrio estable exclusivamente bajo la acción de fuerzas electrostáticas. Suponga, sin embargo, que el punto P se halla en el centro de un cuadrado de cuatro cargas positivas iguales, según se advierte en la figura 25-15. Si coloca allí una carga positiva de prueba, podría dar la impresión de hallarse en equilibrio estable. Las cuatro cargas externas la impulsan hacia P y aun así se cumple el teorema de Earnshaw. ¿Puede explicar por qué?

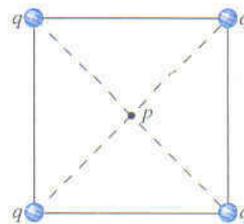


FIGURA 25-15. Pregunta 27.

28. El cuanto de la carga es  $1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ . ¿Existe un cuanto correspondiente de masa?
29. ¿Qué significa decir que una cantidad física *a*) está cuantizada o *b*) que se conserva? Dé algunos ejemplos.
30. En el problema resuelto 25-3 indicamos que la fuerza eléctrica es alrededor de  $10^{39}$  más intensa que la fuerza gravitacional. ¿Puede concluirse de ello que una galaxia, una estrella o un pla-

meta han de ser esencialmente neutros desde el punto de vista eléctrico?

31. ¿Cómo sabemos que las fuerzas electrostáticas no son la causa de la atracción gravitacional, por ejemplo, entre la Tierra y la Luna?

## EJERCICIOS

### 25-1 Electromagnetismo: introducción

### 25-2 Carga eléctrica

1. En el golpe de vuelta de un rayo típico (Fig. 25-16), una corriente de  $2.5 \times 10^4 \text{ C/s}$  fluye durante  $20 \mu\text{s}$ . ¿Cuánta carga se transfiere en este fenómeno?

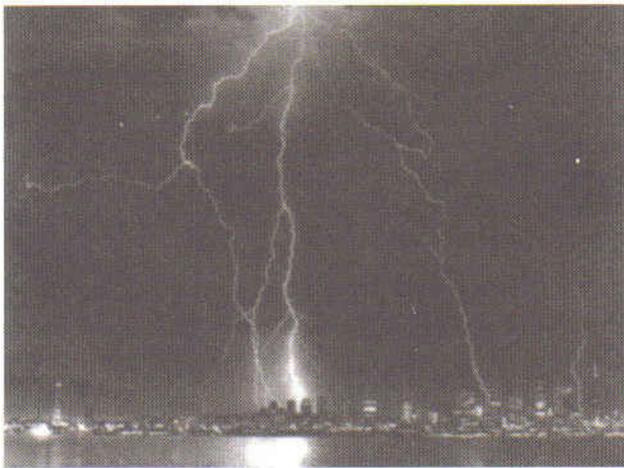


FIGURA 25-16. Ejercicio 1.

### 25-3 Conductores y aislantes

### 25-4 Ley de Coulomb

2. ¿Cuál ha de ser la distancia entre una carga puntual  $q_1 = 26.3 \mu\text{C}$  y otra  $q_2 = -47.1 \mu\text{C}$  para que la fuerza eléctrica de atracción entre ellas tenga una magnitud de  $5.66 \text{ N}$ ?
3. Una carga puntual de  $+3.12 \times 10^{-6} \text{ C}$  se halla a  $12.3 \text{ cm}$  de una segunda carga puntual de  $-1.48 \times 10^{-6} \text{ C}$ . Calcule la magnitud de la fuerza entre ambas.
4. Se liberan del reposo dos partículas de la misma carga, sostenidas a  $3.20 \text{ mm}$  de distancia entre sí. La aceleración inicial de la primera partícula es  $7.22 \text{ m/s}^2$  y la segunda es  $9.16 \text{ m/s}^2$ . La masa de la primera es  $6.31 \times 10^{-7} \text{ kg}$ . Calcule *a*) la masa de la segunda partícula y *b*) la magnitud de la carga común.
5. La figura 25-17a muestra dos cargas,  $q_1$  y  $q_2$ , mantenidas fijas y separadas por una distancia  $d$ . *a*) Determine la intensidad de la fuerza eléctrica que actúa sobre  $q_1$ . Suponga que  $q_1 = q_2 = 21.3 \mu\text{C}$  y  $d = 1.52 \text{ m}$ . *b*) Se introduce una tercera carga  $q_3 = 21.3 \mu\text{C}$

y se coloca como se indica en la figura 25-17b. Encuentre la intensidad de la fuerza eléctrica que ahora opera sobre  $q_1$ .

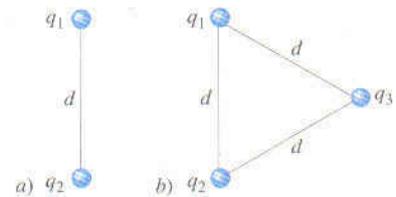


FIGURA 25-17. Ejercicio 5.

6. Dos esferas conductoras idénticas, 1 y 2, portan igual cantidad de carga y están fijas y separadas por una distancia grande en comparación con su diámetro. Se repelen una a otra con una fuerza eléctrica de  $88 \text{ mN}$ . Suponga ahora que una tercera esfera idéntica 3, que tiene un mango aislante e inicialmente sin carga, es puesta en contacto con la esfera 1, luego con la esfera 2 y que finalmente se separa. Calcule la fuerza entre las esferas 1 y 2 (Fig. 25-18).

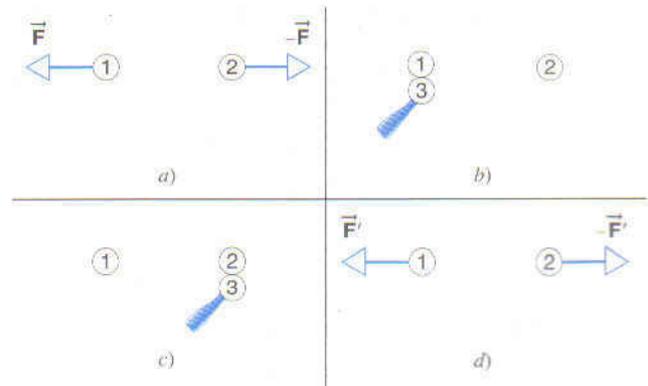


FIGURA 25-18. Ejercicio 6.

7. Tres partículas cargadas se encuentran en una línea recta y separadas por una distancia  $d$ , como se ve en la figura 25-19. Se mantienen fijas las cargas  $q_1$  y  $q_2$ . La carga  $q_3$ , que puede moverse libremente, está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas eléctricas. Obtenga  $q_1$  en función de  $q_2$ .



FIGURA 25-19. Ejercicio 7.

8. En la figura 25-20, encuentre *a*) los componentes horizontales y *b*) los componentes verticales de la fuerza eléctrica resultante que operan sobre la carga en el ángulo inferior izquierdo del cuadrado. Suponga que  $q = 1.13 \mu\text{C}$  y  $a = 15.2 \text{ cm}$ . Las cargas se hallan en reposo.

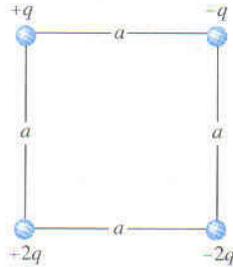


FIGURA 25-20. Ejercicio 8.

9. Dos cargas positivas, de  $4.18 \mu\text{C}$  cada una, y una carga negativa de  $-6.36 \mu\text{C}$  están fijas en los vértices de un triángulo equilátero cuyas lados miden  $13.0 \text{ cm}$ . Calcule la fuerza eléctrica que opera sobre la carga negativa.
10. Dos esferas pequeñas presentan carga positiva, siendo  $52.6 \mu\text{C}$  la carga total. Se repelen entre sí con una fuerza de  $1.19 \text{ N}$  cuando se hallan a  $1.94 \text{ m}$  de distancia una de otra. Calcule la carga de ambas.
11. Dos cargas fijas,  $+1.07 \mu\text{C}$  y  $-3.28 \mu\text{C}$ , se hallan a una distancia de  $61.8 \text{ m}$ . ¿Dónde puede encontrarse una tercera carga de modo que una fuerza neta no opere sobre ella?
12. Tres bolas pequeñas, con una masa de  $13.3 \text{ g}$  cada una, están colgadas de un punto común de hilos de seda que miden  $1.17 \text{ m}$  de largo. Tienen la misma carga y cuelgan en las esquinas de un triángulo equilátero de  $15.3 \text{ cm}$  por lado. Determine la carga de cada una.
13. Un cubo de borde  $a$  lleva una carga puntual  $q$  en cada esquina. Demuestre que la fuerza eléctrica resultante en cualquiera de las cargas está dada por

$$F = \frac{0.262q^2}{\epsilon_0 a^2}$$

que se aleja del cubo a través de la diagonal del cuerpo.

### 25-5 Distribuciones de carga continua

14. La ecuación 25-15 se obtuvo suponiendo que la carga  $q_0$  se encuentra en el eje positivo  $y$ . *a*) ¿Conserva su validez si la carga está en el eje negativo  $y$ ? Explique su respuesta. *b*) Escriba una ecuación similar a la 25-15, si la carga puntual  $q_0$  se halla ahora a una distancia  $x$  de la varilla en el eje positivo o negativo  $x$ . *c*) Escriba una ecuación en forma de componentes vectoriales de la fuerza, cuando  $q_0$  está a una distancia  $d$  de la varilla en la línea de  $45^\circ$  que bisecta los ejes  $x$  y  $y$  positivos. *d*) Escriba una ecuación en forma de componentes vectoriales que indique la fuerza cuando  $q_0$  se encuentra en un punto arbitrario  $x, y$  en algún lugar del plano  $xy$ . Compruebe que los componentes tienen los signos correctos cuando el punto  $x, y$  está en cada uno de los cuatro cuadrantes.
15. *a*) Comenzando con la ecuación 25-16, escriba una ecuación en forma vectorial que indique la fuerza cuando  $q_0$  se halla en el eje positivo o negativo  $z$  del anillo de la carga. *b*) Haga lo mismo con el disco de carga, empleando la ecuación 25-17.
16. Obtenga la fuerza que actúa sobre una carga puntual positiva  $q$  situada a una distancia  $x$  del extremo de una varilla de longitud  $L$ , con una carga positiva  $Q$  distribuida uniformemente (Fig. 25-21).

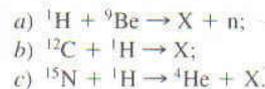


FIGURA 25-1. Ejercicio 16.

17. Considere una varilla y una carga  $q_0$  en la figura 25-11. ¿Dónde colocaría usted una segunda carga puntual  $q$  (igual a la de la varilla) para que  $q_0$  esté en equilibrio (no tenga en cuenta la gravedad)? Resuelva el problema suponiendo *a*) que  $q$  es positiva y *b*) que es negativa.
18. Demuestre que el equilibrio de  $q_0$  en el ejercicio 17 es inestable. (Sugerencia: este problema puede resolverse con argumentos de simetría y en realidad requiere pocas operaciones matemáticas.)
19. Suponga que la varilla de la figura 25-11 tiene una densidad uniforme de carga positiva  $\lambda$  en su mitad superior y una densidad de carga uniforme  $-\lambda$  en su mitad inferior. Calcule la fuerza neta que opera sobre la carga puntual  $q_0$ .
20. Cuatro varillas cargadas forman los lados de un cuadrado en el plano horizontal ( $xy$ ). Tienen una longitud  $L = 25.0 \text{ cm}$  y transportan una carga positiva  $Q$  distribuida uniformemente. Una esfera pequeña, que puede considerarse una carga puntual de masa  $3.46 \times 10^{-4}$  y otra  $q = +2.45 \times 10^{-12}$  se hallan en equilibrio y a una distancia  $z = 21.4 \text{ cm}$  por encima del centro del cuadrado. Determine el valor de  $Q$ .

### 25-6 Conservación de la carga

21. Identifique el elemento X en las siguientes reacciones nucleares:



(Sugerencia: consulte el Ap. E.)

22. En el decaimiento radiactivo de  $^{238}\text{U}$  ( $^{238}\text{U} \rightarrow ^4\text{He} + ^{234}\text{Th}$ ), en cierto momento el centro de la partícula emergente  $^4\text{He}$  se encuentra a  $12 \times 10^{-15}$  del centro del núcleo del  $^{234}\text{Th}$  residual. En ese instante, *a*) ¿Qué fuerza actúa sobre la partícula  $^4\text{H}$  y *b*) cuál es su aceleración?
23. En un cristal de sal, un átomo de sodio transfiere uno de sus electrones a un átomo vecino de cloro, formando un enlace iónico. El ion positivo sodio y el ion negativo cloro que se producen se atraen entre sí a causa de la fuerza electrostática. Calcule la fuerza de atracción si la distancia entre los iones es de  $282 \text{ pm}$ .
24. La fuerza electrostática entre dos iones idénticos que se hallan a una distancia de  $5.0 \times 10^{-10} \text{ m}$  es  $3.7 \times 10^{-9} \text{ N}$ . *a*) Determine la carga de cada uno. *b*) ¿Cuántos electrones faltan en ellos?
25. Se cree que el neutrón se compone de un quark superior de carga  $+\frac{2}{3}e$  y de dos quarks inferiores, con una carga de  $-\frac{1}{3}e$  cada uno. Si la distancia entre estos últimos es de  $2.6 \times 10^{-15}$  dentro del neutrón, ¿qué fuerza de repulsión habrá entre ellos?
26. *a*) ¿Cuántos electrones deberían extraerse de una moneda de un centavo para dejarle una carga de  $+1.15 \times 10^{-7} \text{ C}$ . *b*) ¿A qué fracción de los electrones en la moneda corresponde esto? Consulte el problema 25-1.
27. Un electrón se encuentra en un vacío cerca de la superficie de la Tierra. ¿Dónde deberíamos colocar otro para que sea cero la

fuerza neta que opera sobre el primer electrón, debido a la gravedad y al otro electrón?

28. Calcule en coulombs la carga total de 75.0 kg de electrones.
29. Calcule el número de coulombs de carga positiva en un vaso de agua. Suponga que el volumen del agua es 250 cm<sup>3</sup>.
30. La distancia entre dos estudiantes de física (María de 52.0 kg y Juan de 90.7 kg) es 28.0 m. Supongamos que tengan un desequilibrio de 0.01% en su carga positiva y negativa; uno es positivo y negativo el otro. Estime la fuerza electrostática de atracción en-

tre ellos. (Sugerencia: reemplace los estudiantes por esferas de agua y utilice el resultado del Ej. 29.)

31. a) ¿Qué cantidad igual de carga positiva y negativa han de ponerse en la Tierra y en la Luna para neutralizar su atracción gravitacional? ¿Es necesario conocer la distancia de la Luna para resolver el problema? Explique su contestación afirmativa o negativa. b) ¿Cuántas toneladas métricas de hidrógeno se requerirían para generar la carga positiva que se calculó en la parte a)? La masa molar del hidrógeno es 1.008 g/mol.

## PROBLEMAS

1. Dos esferas conductoras idénticas, con cargas de signo opuesto, se atraen entre sí con una fuerza de 0.108 N cuando las separa una distancia de 50.0 cm. De repente las conecta un alambre conductor delgado, que después se quita; después de eso las esferas se repelen con una fuerza de 0.0360 N. ¿Cuál era su carga inicial?
2. Una carga  $Q$  está fija en dos ángulos opuestos de un cuadrado. Se pone una carga  $q$  en los dos ángulos restantes. a) Si la fuerza eléctrica resultante que opera sobre  $Q$  es cero, ¿qué relación se da entre  $Q$  y  $q$ ? b) ¿Podría elegirse  $q$  para hacer que la fuerza eléctrica resultante en todas las cargas fuera cero? Explique su respuesta.
3. Dos cargas puntuales libres  $+q$  y  $+4q$  están separadas por una distancia  $L$ . Una tercera carga se coloca de modo que el sistema entero se encuentre en equilibrio. a) Encuentre el signo, la magnitud y la ubicación de esta carga. b) Demuestre que el equilibrio es inestable.
4. Dos bolas pequeñas y similares de masa  $m$  se cuelgan de hilos de seda de longitud  $L$  y portan la misma carga  $q$ , como se muestra en la figura 25-22. Suponga que  $\theta$  es tan pequeña que  $\tan \theta$  puede ser reemplazada por su igual aproximado,  $\sin \theta$ . a) Con esta aproximación pruebe que, en el estado de equilibrio,

$$x = \left( \frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3}$$

donde  $x$  es la distancia entre las bolas. b) Si  $L = 122$  cm,  $m = 11.2$  g y  $x = 4.70$  cm, ¿cuál es el valor de  $q$ ?

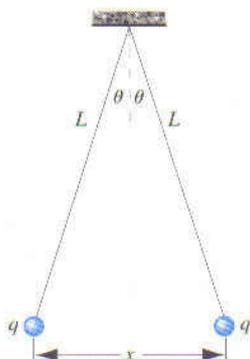


FIGURA 25-22. Problemas 4, 5 y 6.

5. Si las bolas de la figura 25-22 son conductoras, a) ¿qué les sucede después que descargamos una? Explique su contestación. b) Encuentre la distancia del nuevo equilibrio.
6. Suponga que las pelotas del problema 4 pierden carga con una rapidez de 1.20 nC/s. ¿Con qué velocidad instantánea relativa ( $= dx/dt$ ) se acercan inicialmente una a otra?
7. Una carga  $Q$  debe ser dividida en dos partes,  $Q - q$  y  $q$ . ¿Qué relación existe entre  $Q$  y  $q$  si las dos partes, separadas por cierta distancia, debe tener una repulsión de Coulomb máxima?
8. Dos cargas positivas  $+Q$  se sostienen fijas y separadas por una distancia  $d$ . Una partícula de carga negativa  $-q$  y de masa  $m$  se coloca a la mitad de distancia entre ellas y luego se le imprime un pequeño desplazamiento perpendicular a la línea que las une, liberándolas después. Demuestre que la partícula describe un movimiento armónico simple de periodo  $(\epsilon_0 m \pi^3 d^3 / qQ)^{1/2}$ .
9. Calcule el periodo de oscilación de una partícula de carga positiva  $+q$  desplazada del punto medio y que se desplaza en la línea que une las dos cargas  $+Q$  en el problema 8.
10. En el compuesto CsCl (cloruro de cesio), los átomos Cs se encuentran en los ángulos de un cubo, con un átomo Cl en el centro de él. La longitud de lado del cubo es 0.40 nm (Fig. 25-23). A los átomos Cs les falta un electrón y el átomo Cl porta un electrón de exceso. a) ¿Qué intensidad tiene la fuerza eléctrica neta que opera sobre el átomo Cl, resultante de los ocho átomos Cs mostrados? b) Suponga que el átomo Cs marcado con una flecha no está presente (defecto de cristal). ¿Cuál es ahora la fuerza eléctrica neta que actúa sobre el átomo Cl proveniente de los siete átomos Cs restantes?

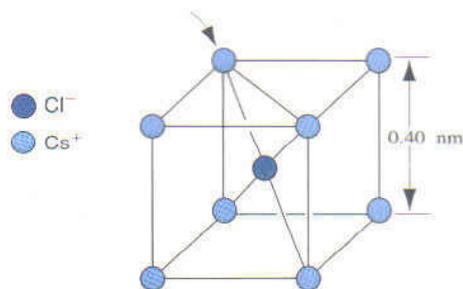


FIGURA 25-23. Problema 10.

11. Dos cargas puntuales positivas e iguales  $q$  son sostenidas separadas una distancia fija  $2a$ . Se coloca una carga puntual de prueba en un plano normal a la línea que une las cargas y a la mitad entre ellas. Determine el radio  $R$  del círculo en este plano en el cual la fuerza que opera sobre la partícula de prueba alcanza su valor máximo (Fig. 25-24).

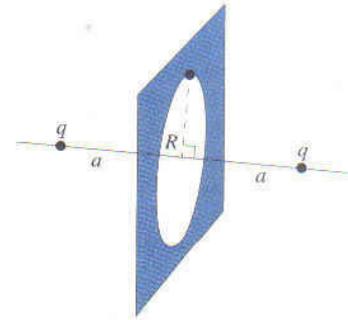


FIGURA 25-24. Problema 11.

## PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Calcule la fuerza de atracción entre dos anillos con cargas uniformemente distribuidas  $+q$  y  $-q$ . Su eje es el eje  $x$ , cada uno con un radio  $R$ , y una distancia de  $2R$  separa los anillos. La respuesta final ha de tener la forma  $F = C_r q^2 / 4\pi\epsilon_0 R^2$ , donde  $C_r$  es una constante adimensional que usted determinará.
2. Repita el problema anterior en el caso de dos discos con cargas uniformemente distribuidas  $+q$  y  $-q$ . La respuesta final seguirá siendo del tipo  $F = C_d q^2 / 4\pi\epsilon_0 R^2$ , donde  $C_d$  es una constante adimensional que encontrará;  $C_d$  del disco es *distinta* de  $C_r$  del anillo.
3. Calcule la fuerza de atracción entre dos esferas sólidas con cargas distribuidas uniformemente  $+q$  y  $-q$ . Se centran en el eje  $x$ , con un radio  $R$  cada una; una distancia de  $d > 2R$  las separa. La respuesta final será del tipo  $F = C_s q^2 / 4\pi\epsilon_0 d^2$ , donde  $C_s$  es una constante adimensional que usted calculará.
4. Un anillo uniforme de carga  $Q$  tiene un radio  $R = 1.00$  cm. Se hace que un electrón se desplace en el plano del anillo. *a)* Suponiendo que  $Q = -1.00 \mu\text{C}$ , calcule la rapidez de un electrón que se mueve en una órbita circular de radio  $r = 0.50$  cm, concéntrico al anillo. *b)* Suponiendo que  $Q = +1.00 \mu\text{C}$  calcule la rapidez de un electrón que describa una órbita circular de radio  $r = 1.50$  cm, concéntrico al anillo. *c)* Integrando numéricamente el movimiento, demuestre que ninguna de las órbitas es estable.

## CAMPO ELÉCTRICO

**L**as cargas eléctricas pueden interactuar desde grandes distancias. Los electrones, o los átomos ionizados, en los lugares más remotos del universo conocido, ejercen una fuerza que ocasiona que los electrones se dirijan hacia la Tierra.

¿Cómo se explican esas interacciones? A partir del campo eléctrico: las cargas lejanas crean un campo eléctrico, que abarca todo el espacio entre la Tierra y el origen de este campo. El movimiento de las cargas ocasiona perturbaciones en el campo, las cuales se desplazan a través del espacio con la velocidad de la luz y son detectadas más tarde como ondas (como radiación) cuando provocan movimiento de electrones en los circuitos terrestres.

En el presente capítulo nos ocuparemos sólo del campo eléctrico estático producido por cargas en reposo. Más tarde ampliaremos la exposición para mostrar cómo las cargas en movimiento originan los campos asociados con la radiación electromagnética, como emisión de radio o luz.

## 26-1 ¿QUÉ ES UN CAMPO?

La temperatura tiene un valor bien definido en cualquier lugar del cuarto donde se encuentra usted. Puede medirla en cada punto colocando un termómetro. Después podría representar su distribución dibujando un mapa del cuarto que muestre en todos los lugares la temperatura medida o especificando una función matemática  $T(x, y, z)$  que sirva para calcularla en los puntos  $x, y, z$ . Se da el nombre de *campo de temperatura* a esta distribución representada mediante un mapa o una función. En forma parecida podría medirse la presión en todos los sitios y determinar así el *campo de presión*. Los dos campos son ejemplo de *campos escalares*, ya que la temperatura y la presión son magnitudes escalares. Si ni la temperatura ni la presión variasen con el tiempo, serían también *campos estáticos*; de lo contrario, serían *campos que varían con el tiempo* y podrían representarse matemáticamente con una función dependiente del tiempo como  $T(x, y, z, t)$ .

En cambio, si quisiéramos medir la velocidad en todos los puntos de un fluido que fluye, habríamos que especificar el valor del *vector* velocidad en todos ellos. También en este caso podríamos trazar un mapa que muestre la magnitud y la

dirección de la velocidad en un punto cualquiera o bien especificar una función matemática  $\vec{v}(x, y, z)$  que permitiría calcular en cualquier punto la velocidad del flujo. Éste es un ejemplo de *campo vectorial*.

El campo gravitacional de la Tierra es otro ejemplo de *campo vectorial*. Se podría medir su valor en cualquier punto con sólo agregar una masa de prueba  $m_0$  a una báscula de resorte. Después se determinarían la magnitud y la dirección de la fuerza gravitacional  $\vec{F}$  en cualquier punto; los resultados se presentarían dibujando un mapa que indique la magnitud y la dirección en varios puntos o especificando una función matemática  $\vec{F}(x, y, z)$ . Sin embargo, el mapa no sería útil para otras personas, salvo que usaran la misma masa de prueba que nosotros. La fuerza que se mide es directamente proporcional al valor de la masa de prueba; de ahí que un procedimiento más adecuado consistiría en preparar un mapa que tuviera no la fuerza ejercida sobre la masa, sino la fuerza por unidad de masa, o sea  $\vec{F}/m_0$ . Esta cantidad, que tendría unidades de N/kg, sería independiente del valor de la masa de prueba  $m_0$ . Si se escoge una masa de otro tamaño, se obtendría exactamente el mismo mapa con idénticos valores de la fuerza por unidad de masa en todos los pun-

tos.\* A la magnitud  $\vec{F}/m_0$  se le denomina *campo gravitacional*. El lector se dará cuenta de que también es igual a la aceleración en caída libre  $\vec{g}$  en cualquier lugar:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m_0}. \quad (26-1)$$

El campo  $\vec{g}$  es un vector cuya dirección indica la dirección de la fuerza gravitacional en ese punto y cuya magnitud indica la "fuerza" del efecto gravitacional allí. La fuerza que se ejerce sobre una masa  $m$  en un punto cualquiera se calcula multiplicando  $\vec{g}$  en ese punto por el valor de la masa:

$$\vec{F} = m\vec{g}. \quad (26-2)$$

En este capítulo explicaremos el concepto tan útil de *campo eléctrico*, el cual se basa en un procedimiento semejante que consiste en determinar la fuerza eléctrica por unidad de carga (en vez de la fuerza gravitacional por unidad de masa). El campo eléctrico es un campo vectorial, pues interviene una fuerza. Por ahora nos ocuparemos únicamente de campos estáticos, pero más tarde, al hablar de la radiación magnética, nos ocuparemos también de los campos que varían con el tiempo.

Antes de que el concepto de campo lograra aceptación general, se creía que la fuerza ejercida por un cuerpo gravitacional sobre otro era una interacción directa e instantánea. Esta concepción, llamada *acción a distancia*, se aplicaba asimismo a las fuerzas electromagnéticas. En el caso de la gravitación puede representarse de modo esquemático así:

$$\text{masa} \rightleftharpoons \text{masa}$$

lo cual indica que las dos masas interactúan directamente. Desde esta perspectiva, el efecto del movimiento de un cuerpo se transmite de inmediato al otro. Ello viola la teoría especial de la relatividad, la cual limita como máximo a la velocidad de la luz  $c$ , la rapidez con que puede transmitirse en la información. La actual interpretación, basada en el concepto de campo, puede representarse como

$$\text{masa} \rightleftharpoons \text{campo} \rightleftharpoons \text{masa}$$

donde una masa no interactúa directamente con la otra, sino con el campo gravitacional creado por esta última. En otras palabras, la primera masa origina un campo que posee cierto valor en todos los puntos del espacio; la segunda interactúa entonces con el campo en su propio lugar. El campo desempeña la función de intermediario entre los dos cuerpos. La fuerza ejercida sobre la segunda masa puede calcularse por medio de la ecuación 26-2, si se conoce el valor del campo  $\vec{g}$  debido a la primera masa. La situación es enteramente simétrica desde el punto de vista de la primera masa, la cual interactúa con el campo gravitacional generado por la segunda

\* Solemos especificar que la masa de prueba  $m_0$  ha de ser pequeña. Es decir, no queremos que altere el campo gravitacional de la Tierra. Por ejemplo, si utilizáramos una masa de prueba del tamaño de la Luna, su fuerza gravitacional en la Tierra haría que los efectos de la marea modificasen la distribución de las masas terrestres y, en consecuencia, alterarían la fuerza gravitacional en varios lugares. Para evitar que ello ocurra, conservamos  $m_0$  mucho más pequeño que la masa de la Tierra.

masa. Los cambios en la ubicación de una masa provocan variaciones en su campo gravitacional; estas variaciones se desplazan a la velocidad de la luz, por lo cual el concepto de campo es compatible con las restricciones impuestas por la teoría especial de la relatividad.

## 26-2 CAMPO ELÉCTRICO

La descripción anterior del campo gravitacional puede aplicarse directamente a la electrostática. La ley de Coulomb relativa a la fuerza que una carga eléctrica ejerce sobre otra nos estimula a pensar en función de la acción a distancia, representada así:

$$\text{carga} \rightleftharpoons \text{carga}$$

Una vez más introducimos el campo como intermediario entre las cargas, lo cual nos permite representar la interacción en la siguiente forma

$$\text{carga} \rightleftharpoons \text{campo} \rightleftharpoons \text{carga}$$

En otras palabras, la primera carga crea un *campo eléctrico*, y la segunda carga interactúa con el campo eléctrico de la primera. El problema de determinar la interacción entre las cargas se reduce con ello a dos problemas separados: 1) determinar por medición o cálculo el campo eléctrico creado por la primera carga en todos los lugares del espacio y 2) calcular la fuerza que el campo ejerce sobre la segunda carga ubicada en un punto particular del espacio.

En analogía con la ecuación 26-1 concerniente al campo gravitacional, podemos definir el campo eléctrico  $\vec{E}$  asociado a cierto grupo de cargas en función de la fuerza ejercida sobre una carga positiva de prueba  $q_0$  en un punto particular, o sea

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \quad (26-3)$$

La dirección del vector  $\vec{E}$  es la misma que la de  $\vec{F}$ , porque  $q_0$  es un escalar positivo. Definido de este modo, el campo eléctrico no depende de la magnitud de la carga de prueba  $q_0$ .

La figura 26-1 indica cómo usamos esta definición para determinar el campo eléctrico en un punto particular  $P$ . Colocamos una carga positiva de prueba en  $P$  y luego determinamos la fuerza electrostática ejercida sobre  $q_0$  que proviene de los objetos en el área circundante, los cuales no se muestran en la figura. La ecuación 26-3 nos da entonces el campo eléctrico que aparece en la figura 26-1b. Nótese que  $\vec{E}$  y  $\vec{F}$  son paralelos, como lo exige la definición de la ecuación 26-3.

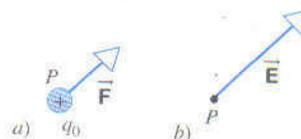


FIGURA 26-1. a) Objetos cargados en un ambiente ejercen una fuerza  $\vec{F}$  sobre una carga de prueba positiva  $q_0$  en el punto  $P$ . b) El campo eléctrico en el punto  $P$  debido a estos objetos cargados del ambiente.

TABLA 26-1 Algunos campos eléctricos

Ubicación	Campo eléctrico (N/C)
En la superficie de un núcleo de uranio	$3 \times 10^{21}$
En un átomo de hidrógeno, en el radio promedio del electrón	$5 \times 10^{11}$
La ruptura eléctrica ocurre en el aire	$3 \times 10^6$
En el tambor cargado de una fotocopiadora	$10^5$
El acelerador de haces de electrones en un televisor	$10^5$
Cerca de un peine de plástico cargado	$10^3$
En la atmósfera inferior	$10^2$
Dentro del alambre de cobre de los circuitos caseros	$10^{-2}$

Desde el punto de vista dimensional, el campo eléctrico es la fuerza por unidad de carga, y su unidad en el SI es el newton/coulomb (N/C), aunque, como veremos en el capítulo 28, con frecuencia se expresa en la unidad equivalente de volt/metro (V/m). Nótese la semejanza con el campo gravitacional, donde  $g$  (que generalmente se indica en unidades de  $m/s^2$ ) también puede expresarse como la fuerza por unidad de masa en unidades de newton/kilogramo (N/kg). Los campos gravitacional y eléctrico pueden expresarse como una fuerza dividida por una propiedad (masa o carga) del cuerpo de prueba. La tabla 26-1 contiene algunos campos eléctricos que ocurren en unas pocas situaciones.

Como lo hicimos en la ecuación 26-2 con la fuerza gravitacional ejercida sobre un cuerpo, podemos emplear el campo eléctrico para calcular la fuerza que opera sobre un cuerpo cargado. Una vez obtenido el campo eléctrico en un punto (usando el cuerpo de prueba, por ejemplo), es posible calcular la fuerza eléctrica ejercida sobre un objeto cualquiera de carga  $q$  en ese lugar:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (26-4)$$

Aquí, el campo eléctrico  $\vec{E}$  proviene de otras cargas que pueden estar presentes, no de la carga  $q$ . La ecuación 26-4 no es más que una manera de especificar la fuerza que esas otras cargas ejercen sobre  $q$ .

Ahora entendemos cómo el campo eléctrico actúa como intermediario en la interacción entre dos cargas  $q_1$  y  $q_2$ . Como se ilustra en la figura 26-2a, la carga  $q_1$  ubicada en A da origen a un campo eléctrico en todos los puntos circundantes. Sea  $\vec{E}_1$  su valor en el lugar B. El valor del campo se obtiene colocando la carga de prueba en B y midiendo la fuerza que  $q_1$  ejerce sobre ella. Si ponemos una carga diferente  $q_2$  en B, experimentará una fuerza eléctrica  $\vec{F}_{21}$ , la cual puede calcularse con el uso la ecuación 26-4:  $\vec{F}_{21} = q_2\vec{E}_1$  (Fig. 26-2b). La situación es totalmente simétrica: podríamos, en cambio, primero utilizar la carga de prueba para determinar el campo  $\vec{E}_2$  en A debido a  $q_2$  (Fig. 26-2c). Después, al colocar  $q_1$  en A, se calcula la fuerza ejercida sobre  $q_1$  por  $q_2$ :  $\vec{F}_{12} = q_1\vec{E}_2$  (Fig. 26-2d). Conforme a la tercera ley de Newton, las fuerzas son iguales y opuestas ( $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ ), a pesar de ser diferentes los campos eléctricos creados por las dos cargas.

Si queremos utilizar la ecuación 26-3 como procedimiento operativo para medir el campo eléctrico, es necesario apli-

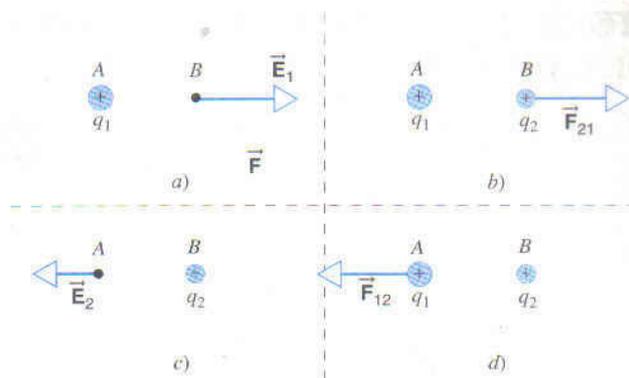


FIGURA 26-2. a)  $q_1$  en A crea un campo eléctrico en B. b) El campo eléctrico en B ejerce fuerza sobre  $q_2$ . c)  $q_2$  en B crea un campo eléctrico en A. d) El campo eléctrico en A ejerce fuerza sobre  $q_1$ . Nótese que  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .

car la misma precaución que cuando medimos, con la masa de prueba, el campo gravitacional: la carga de prueba deberá ser tan pequeña que no perturbe la distribución de las cargas cuyo campo eléctrico intentamos medir. En otras palabras, hay que escribir la ecuación 26-3 como:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}, \quad (26-5)$$

aunque, como vimos en el capítulo 25, no puede suponerse que este límite sea cero, pues la carga de prueba nunca puede ser más pequeña que la carga elemental  $e$ . Desde luego, si estamos calculando (no midiendo) el campo eléctrico debido a un conjunto específico de cargas en posiciones fijas, ni la magnitud ni el signo de  $q_0$  alteran el resultado. Como veremos más adelante en este capítulo, los campos eléctricos de grupos de cargas pueden calcularse con el uso de la ecuación 26-3 y la ley de Coulomb sin considerar de manera directa la ecuación 26-5.

**PROBLEMA RESUELTO 26-1.** Un electrón ( $q = -e$ ) colocado cerca de un cuerpo cargado experimenta una fuerza en la dirección  $+$  y de magnitud  $3.60 \times 10^{-8}$  N. a) ¿Cuál es el campo eléctrico en ese lugar? b) ¿Qué fuerza ejercería el mismo cuerpo cargado sobre una partícula alfa ( $q = +2e$ ) puesta en el sitio ocupado antes por el electrón?

**Solución** a) Con el uso de la ecuación 26-4 tenemos

$$E_y = \frac{F_y}{q} = \frac{3.60 \times 10^{-8} \text{ N}}{-1.60 \times 10^{-19} \text{ C}} = -2.25 \times 10^{11} \text{ N/C}.$$

El campo eléctrico presenta la dirección y negativa.

b) La fuerza ejercida sobre la partícula alfa se deduce de la ecuación 26-4:

$$F_y = qE_y = 2(+1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(-2.25 \times 10^{11} \text{ N/C}) = -7.20 \times 10^{-8} \text{ N}.$$

La fuerza sigue la dirección negativa y, la misma que el campo eléctrico, sólo que en dirección opuesta a la de la fuerza en el electrón. En el mismo campo eléctrico, la fuerza ejercida sobre la partícula alfa es el doble de la ejercida sobre el electrón, porque la carga de la partícula alfa tiene el doble de magnitud que la carga de electrón.

## 26-3 CAMPO ELÉCTRICO DE CARGAS PUNTUALES

En la presente sección vamos a estudiar el campo eléctrico de cargas puntuales, primero como una carga individual y luego como un conjunto de cargas individuales.

Supongamos que una carga positiva de prueba  $q_0$  se coloca a una distancia  $r$  de una carga puntual  $q$ . La magnitud de la fuerza que opera sobre  $q_0$  está dada por la ley de Coulomb,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0|q|}{r^2}$$

Conforme a la ecuación 26-3, la magnitud del campo eléctrico en el sitio de la carga de prueba es

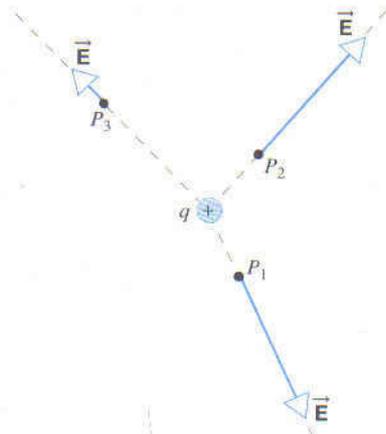
$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2} \quad (26-6)$$

En la línea radial proveniente de  $q$ , la dirección de  $\vec{E}$  es la misma que la de  $\vec{F}$ : señala hacia afuera si  $q$  es positiva y hacia adentro si es negativa. La figura 26-3 muestra la magnitud y la dirección del campo eléctrico  $\vec{E}$  en varios sitios cerca de una carga puntual positiva. ¿Cómo se dibujaría la figura si la carga fuera negativa?

He aquí el procedimiento con que se obtiene  $\vec{E}$  de un grupo de  $N$  cargas puntuales: 1) se calcula  $\vec{E}_n$  debido a cada carga  $n$  en el punto dado como si fuera la única carga presente. 2) Por separado estos campos se suman vectorialmente para encontrar el campo resultante  $\vec{E}$  en el punto. En forma de ecuación,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots \\ &= \sum \vec{E}_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N). \end{aligned} \quad (26-7)$$

La suma es una suma vectorial e incluye todas las cargas. La ecuación 26-7 (como la Ec. 25-8) es un ejemplo de la aplicación del *principio de superposición*, el cual establece, den-



**FIGURA 26-3.** El campo eléctrico  $\vec{E}$  en varios puntos cerca de una carga puntual positiva  $q$ . Adviértase que en todas partes la dirección de  $\vec{E}$  se encuentra radialmente hacia afuera de  $q$ . Los campos en  $P_1$  y  $P_2$ , situados a la misma distancia de  $q$ , poseen la misma magnitud. El campo en  $P_3$ , que está a una distancia doble de  $q$  que  $P_1$  o  $P_2$  tiene un cuarto de magnitud del campo en  $P_1$  o  $P_2$ .

tro de este contexto, que en un punto cualquiera los campos eléctricos debido a distribuciones individuales de carga simplemente se suman (en forma vectorial) o se superponen de modo independiente. Este principio puede no cumplirse cuando la magnitud de los campos es demasiado grande, pero será válido en todas las situaciones que se incluyen en este libro.

**PROBLEMA RESUELTO 26-2.** En un átomo de helio ionizado (al cual se le ha quitado uno de los dos electrones), el electrón y el núcleo están separados por una distancia de 26.5 pm. ¿Qué magnitud del campo eléctrico se debe al núcleo en el sitio del electrón?

**Solución** Utilizamos la ecuación 26-6, con  $q$  (la carga del núcleo) igual a  $+2e$ :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2} = \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)[2(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})]}{(26.5 \times 10^{-12} \text{ m})^2} \\ &= 4.10 \times 10^{12} \text{ N/C}. \end{aligned}$$

Este valor es 8 veces el campo eléctrico que opera sobre un electrón en el hidrógeno (Tabla 26-1). El incremento se origina porque 1) la carga nuclear del helio es el doble de la del hidrógeno y 2) porque el electrón en el helio ionizado está más cerca del núcleo (por un factor de 2) que en el caso de un electrón en el átomo de hidrógeno.

**PROBLEMA RESUELTO 26-3.** La figura 26-4 muestra una carga  $q_1$  de  $+1.5 \mu\text{C}$  y una carga  $q_2$  de  $+2.3 \mu\text{C}$ . La primera se halla en el origen del eje  $x$ , y la segunda en una posición  $x = L$ , donde  $L = 13 \text{ cm}$ . ¿En qué punto  $P$  sobre el eje  $x$  es cero el campo eléctrico?

**Solución** El punto ha de encontrarse entre las cargas porque sólo en esta región las fuerzas ejercidas por  $q_1$  y  $q_2$  sobre una carga de prueba se oponen entre sí. Si  $\vec{E}_1$  es el campo eléctrico debido a  $q_1$  y  $\vec{E}_2$  es a causa de  $q_2$ , la magnitud de estos vectores ha de ser igual, o sea

$$E_1 = E_2$$

Entonces, con base en la ecuación 26-6 tenemos

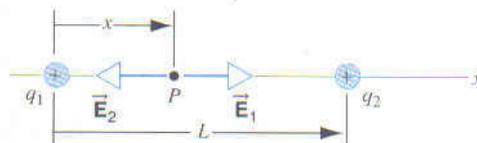
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{(L-x)^2},$$

donde  $x$  es coordenada del punto  $P$ . Al sacar la raíz cuadrada de ambos lados y al despejar  $x$ , obtenemos

$$x = \frac{L}{1 \pm \sqrt{q_2/q_1}},$$

donde hemos tenido en cuenta que el valor de la raíz cuadrada puede ser positivo o negativo. Sustituimos los valores numéricos para  $L$ ,  $q_1$  y  $q_2$  y así obtenemos

$$x = 5.8 \text{ cm} \quad \text{y} \quad x = -54.6 \text{ cm}.$$



**FIGURA 26-4.** Problema resuelto 26-3. En el punto  $P$  los campos eléctricos de las cargas  $q_1$  y  $q_2$  son iguales y contrarios; así que el campo neto en él es cero.

La primera solución, que define un punto entre las cargas, es la que buscamos. La segunda define un punto ubicado a la izquierda de las dos. En este punto es verdad que  $E_1 = E_2$ , pero los campos apuntan en la misma dirección, por lo cual su suma vectorial no puede ser cero. Se justifica, pues, descartar la segunda solución.

## Dipolo eléctrico

Muchos objetos que se encuentran en la naturaleza se analizan muy bien como cuerpos aislados que poseen una carga neta, como lo hemos hecho hasta ahora en este libro. Otros presentan tipos diferentes de comportamiento. Un tipo de este comportamiento es característico de un objeto que no tiene carga neta, sino que consta de cargas positivas y negativas iguales  $+q$  y  $-q$ , separadas por una distancia fija  $d$ . Por ejemplo, una molécula iónica como el NaCl (en su estado de vapor a alta temperatura, no en su forma cristalina común) es neutra desde el punto de vista eléctrico, pero puede considerarse como un ion  $\text{Na}^+$  unido al ion  $\text{Cl}^-$ . Un ejemplo más: un tipo similar de comportamiento de la molécula de agua es, en parte, la causa de una gran solubilidad de muchas sustancias en el agua.

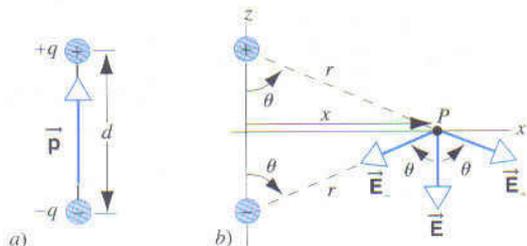
Se da el nombre de *dipolo eléctrico* a la configuración de dos cargas iguales y opuestas separadas por una distancia. En las ecuaciones que describen los dipolos eléctricos, observamos que la magnitud de la carga  $q$  en los componentes y su separación  $d$  con frecuencia ocurren como el producto  $qd$ . Conviene definir esta magnitud como el *momento de dipolo eléctrico*  $p$ :

$$p = qd. \quad (26-8)$$

Resulta que esta cantidad se comporta como un vector. Por definición el vector momento dipolar eléctrico posee una magnitud  $p = qd$  y una dirección que apunta de la carga negativa a la carga positiva en la línea que las une. La figura 26-5a muestra un dipolo eléctrico y su momento dipolar vectorial. Por ejemplo, en el NaCl la magnitud de la carga  $q$  en cada uno de los iones es  $e$  y la distancia medida de la separación es de 0.236 nm, por lo cual esperamos que el momento dipolar de la molécula sea

$$p = ed = (1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(0.236 \times 10^{-9} \text{ m}) \\ = 3.78 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}.$$

El valor medido es  $3.00 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$ , lo que indica que el electrón no fue eliminado enteramente del Na ni agregado al



**FIGURA 26-5.** a) Las cargas positivas y negativas de igual magnitud forman un dipolo eléctrico. b) El campo eléctrico  $\vec{E}$  en cualquier punto es la suma vectorial de los campos creados por las cargas individuales. En el punto  $P$  del eje  $x$  el campo tiene sólo un componente  $z$ .

Cl. En cierto modo, el electrón se comparte entre el Na y Cl, lo cual genera un momento dipolar un poco menor al previsto.

A continuación calculamos el campo eléctrico  $\vec{E}$  del dipolo en el punto  $P$  a una distancia  $x$  en el bisector perpendicular del dipolo, como se muestra en la figura 26-5b.

Las cargas positiva y negativa crean los campos eléctricos  $\vec{E}_+$  y  $\vec{E}_-$ , respectivamente. La magnitud de estos dos campos en  $P$  es igual, ya que  $P$  equidista de ambas cargas. En la figura 26-5b se incluyen también las direcciones de  $\vec{E}_+$  y  $\vec{E}_-$ , determinadas por las direcciones de la fuerza proveniente de cada carga que actuaría sobre una carga positiva de prueba en  $P$ . De acuerdo con la ecuación 26-7, el campo eléctrico total en este punto se obtiene mediante la suma vectorial

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-.$$

Según la ecuación 26-6, la magnitud de los campos creados por las cargas está dada por

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + (d/2)^2}. \quad (26-9)$$

Debido a que los campos  $\vec{E}_+$  y  $\vec{E}_-$  tienen igual magnitud y se hallan en ángulos iguales  $\theta$  respecto a la dirección  $z$ , como se observa en la figura, el componente  $x$  del campo total es  $E_+ \sin \theta - E_- \sin \theta = 0$ . En consecuencia, el campo total  $\vec{E}$  tiene sólo un componente  $z$  de magnitud

$$E = E_+ \cos \theta + E_- \cos \theta = 2E_+ \cos \theta. \quad (26-10)$$

En la figura vemos que el coseno del ángulo  $\theta$  se determina mediante

$$\cos \theta = \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}}.$$

Al sustituir el resultado anterior y la ecuación 26-9 en la ecuación 26-10, obtenemos

$$E = (2) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + (d/2)^2} \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}}$$

o bien

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{[x^2 + (d/2)^2]^{3/2}}, \quad (26-11)$$

empleando la ecuación 26-8 ( $p = qd$ ) para el momento dipolar.

La ecuación 26-11 nos da la magnitud del campo eléctrico en  $P$  debido al dipolo. Nótese que el problema presenta simetría cilíndrica alrededor del eje  $z$ , es decir, podríamos haber decidido que el eje  $x$  tuviera cualquier dirección perpendicular al eje dipolar, y la ecuación 26-11 nos hubiera dado el campo.

A menudo observamos el campo de un dipolo eléctrico en los puntos  $P$  cuya distancia  $x$  del dipolo es muy grande en comparación con la separación  $d$ . En este caso es posible simplificar un poco el campo dipolar recurriendo a la expansión binomial,

$$(1 + y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2!} y^2 + \dots$$

Escribamos la ecuación 26-11 así

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} \frac{1}{[1 + (d/2x)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} \left[ 1 + \left( \frac{d}{2x} \right)^2 \right]^{-3/2}$$

y apliquemos la expansión binomial al factor entre corchetes, lo cual nos da

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} \left[ 1 + \left( -\frac{3}{2} \right) \left( \frac{d}{2x} \right)^2 + \dots \right]$$

Cuando  $x \gg d$ , basta conservar sólo el primer término de los corchetes (el 1); así encontramos una expresión de la magnitud del campo eléctrico debido a un dipolo en los puntos lejanos en su plano mediano:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3}. \quad (26-12)$$

Una expresión de forma semejante se consigue para el campo situado en el eje dipolar (el eje  $z$  en la Fig. 26-5b) (Prob. 1). Se obtiene un resultado más general para el campo en cualquier punto del plano  $xz$  (Prob. 2). En todos los casos, el campo en los puntos distantes varía como  $1/r^3$  con la distancia  $r$  respecto al dipolo. Es un resultado típico del campo del dipolo eléctrico. Éste cambia más rápidamente con la distancia que con la dependencia  $1/r^2$  característica de una carga puntual.

Asimismo, existen distribuciones más complejas de carga creadoras de campos eléctricos que varían como potencias inversas más grandes de  $r$ . En el ejercicio 11 y en el problema 4 se dan ejemplos de la variación  $1/r^4$  en el campo de un *cua-*  
*drupolo* eléctrico.

## 26-4 CAMPO ELÉCTRICO DE DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

En la sección 25-5 estudiamos la fuerza que varias distribuciones continuas de carga ejercen sobre una carga puntual. Las hemos analizado considerándolas conjuntos de elementos infinitesimales de carga, que tratamos como cargas puntuales, y luego hemos integrado sobre la distribución para determinar la fuerza. Ahora aplicamos un método similar para calcular el campo eléctrico debido a distribuciones de carga continua. De hecho, como veremos luego, podemos usar los resultados de la sección 25-5 para obtener el campo eléctrico producido por las distribuciones estudiadas en esa sección.

Primero, explicamos el método general para encontrar el campo eléctrico de una distribución continua de carga. Dividimos la distribución en elementos infinitesimales  $dq$ , expresando el elemento de carga  $dq$  como  $\lambda ds$ ,  $\sigma dA$  o  $\rho dV$ , dependiendo de si se distribuyen en la línea ( $\lambda$  = densidad de carga lineal o carga por unidad de longitud), en la superficie ( $\sigma$  = densidad de

carga superficial o carga por unidad de área) o en el volumen ( $\rho$  = densidad de carga volumétrica o carga por unidad de volumen). Al escoger un elemento arbitrario de carga, escribimos la magnitud de la contribución al campo eléctrico en el punto de observación  $P$  como si  $dq$  fuera una carga puntual:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|dq|}{r^2}, \quad (26-13)$$

por medio de la ecuación 26-6. La dirección del vector  $d\vec{E}$  se determina con el signo de  $dq$  según la dirección de la fuerza que ejercería sobre una carga positiva de prueba en  $P$ . El campo total resultante en el punto  $P$  para la distribución entera se obtiene sumando las aportaciones de todos los elementos de carga del objeto, teniendo en cuenta las direcciones que podrían tener todos los  $d\vec{E}$ :

$$\vec{E} = \int d\vec{E}. \quad (26-14)$$

En las coordenadas cartesianas, podemos considerar que la ecuación 26-14 es una representación abreviada de las tres ecuaciones constitutivas:

$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y, \quad E_z = \int dE_z. \quad (26-15)$$

Como veremos luego, a menudo es posible simplificar el cálculo razonando, a partir de la simetría, que una o dos de las integrales desaparecen o que dos de ellas poseen valor idéntico.

### Una línea de carga uniforme

Como ejemplo de la aplicación de las ecuaciones 26-13 a 26-15 vamos a estudiar el campo eléctrico debido a una línea con carga (una delgada varilla cargada por ejemplo) de longitud  $L$  que presenta una densidad uniforme de carga lineal positiva  $\lambda = q/L$ , donde  $q$  es la carga total transportada por la varilla. La figura 26-6 muestra la geometría para realizar el cálculo. Queremos encontrar el campo en el punto  $P$  a una distancia  $y$  de la varilla en su bisector perpendicular (el eje positivo  $y$ ). La magnitud del campo eléctrico  $d\vec{E}$  en el punto  $P$  debido al elemento de carga  $dq$  está dada por la ecuación 26-13. Podemos concluir que  $E_x = 0$ , porque ninguno de los elementos de

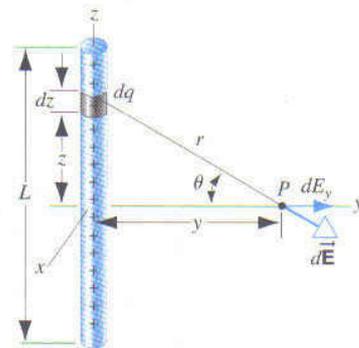


FIGURA 26-6. Una varilla con carga uniforme. El campo eléctrico en el punto  $P$  se debe al efecto total de todos los elementos de carga como  $dq$ .

carga  $dq$  en cualquier punto de la varilla produce un  $d\vec{E}$  con un componente  $x$ . De la simetría también podemos concluir que  $E_z = 0$ , porque por cada  $dq$  en  $z$  positivo hay un  $dq$  correspondiente en  $z$  negativo tal que se cancelan los componentes  $z$  cuando sumamos los vectores  $d\vec{E}$  de las dos cargas elementales. El único componente no cero del campo eléctrico en  $P$  es  $E_y$ . Por tanto, tenemos

$$dE_y = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{y^2 + z^2} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$

donde hemos empleado la ecuación 26-13 con  $dE$  cuando  $dq = \lambda dz$ ,  $\cos \theta = y/r$  y  $r^2 = y^2 + z^2$ . El campo total en  $P$  es

$$E_y = \int dE_y = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda y dz}{(y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Al integrar respecto a  $z$ , manteniendo constante  $y$ , obtenemos (véase integral 18 en el Ap. 1)

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{y\sqrt{y^2 + L^2/4}}. \quad (26-16)$$

Esta ecuación nos da el campo eléctrico en el punto  $P$  sobre el eje  $y$  positivo debido a la línea con carga. Nótese que podríamos haber conseguido el mismo resultado directamente de la ecuación 25-15 para la fuerza entre la línea con carga y la carga puntual  $q_0$ , con sólo sustituir  $q$  por  $\lambda L$  y usar la ecuación 26-3,  $E_y = F_y/q_0$ .

Como en el caso del dipolo eléctrico, este problema también presenta simetría cilíndrica alrededor del eje  $z$ ; podríamos haber decidido que el eje  $y$  apuntara en cualquier dirección perpendicular al eje de la varilla y a través de su punto medio. La figura 26-7 es una representación del campo en el plano  $xy$  debido a una varilla con carga positiva uniforme.

Como lo hicimos con la fuerza calculada en el capítulo 25, es importante revisar los cálculos del campo eléctrico para

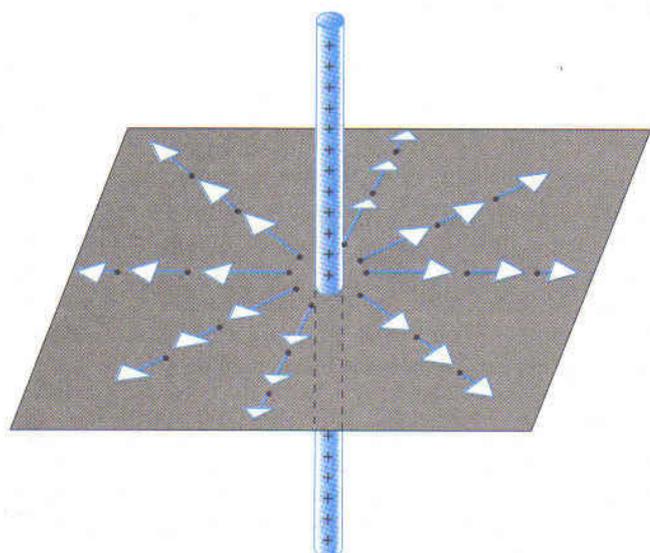


FIGURA 26-7. Campo eléctrico producido por una varilla con carga positiva. Tiene simetría cilíndrica alrededor del eje de la varilla.

verificar que tengan los límites correctos. En el límite  $y \rightarrow \infty$ , la ecuación 26-16 se aproxima a la expresión del campo eléctrico de una carga puntual,

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2},$$

donde hemos utilizado  $q = \lambda L$ .

En situaciones con cargas lineales, el punto de observación está tan cerca de la línea que  $y$  es pequeño en comparación con  $L$ . Si tomamos el límite de la ecuación 26-16 cuando  $L \gg y$  y si  $\lambda$  permanece constante, tenemos el campo eléctrico debido a una línea infinitamente larga con carga:

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}. \quad (26-17)$$

El campo se dirige radialmente hacia afuera de la varilla y depende en forma inversa de la distancia con la varilla.

El lector seguramente se preguntará por qué es útil calcular el campo debido a una línea infinita con carga cuando una línea real cualquiera ha de tener longitud finita. Sin embargo, en los puntos cercanos a la línea y lejanos de ambos extremos, la ecuación 26-17 ofrece una aproximación excelente y útil al campo eléctrico. A menudo es insignificante la diferencia entre el resultado aproximado (Ec. 26-17) y el exacto (Ec. 26-16). En este caso el resultado aproximado nos da una idea más física, porque la variación de  $E$  con la distancia de la varilla se percibe más inmediatamente.

### Un anillo o disco con carga uniforme

Si se desea conocer el campo eléctrico proveniente de un anillo o de un disco de radio  $R$  que transportan una densidad de carga uniforme, no es preciso efectuar el cálculo completo comenzando con la ecuación 26-13. Ya hemos obtenido la fuerza que un anillo o disco con carga ejercen sobre una carga puntual  $q_0$ . La fuerza ejercida por un anillo sobre una carga puntual  $q_0$  en el eje  $x$  del anillo estaba dada por la ecuación 25-16. Si utilizamos la ecuación 26-3,  $E_z = F_z/q_0$ , se determina directamente de la ecuación 25-16 el campo eléctrico en un punto del eje positivo  $z$ , debido a un anillo con carga:

$$E_z = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{Rz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (26-18)$$

donde hemos empleado  $q = \lambda(2\pi R)$ . El campo eléctrico está dirigido a lo largo del eje del anillo (el eje  $z$ ) y se aleja de este último. La ecuación 26-18 es válida con  $z$  positivo y negativo. Si el anillo tiene carga negativa, el campo apunta a lo largo del eje en la dirección opuesta (hacia el anillo).

En forma parecida, con la ecuación 25-17 podemos determinar el campo eléctrico producido por un disco con carga:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right). \quad (26-19)$$

Aquí, utilizando  $q = \sigma A = \sigma(\pi R^2)$ , hemos expresado el campo eléctrico a partir de la densidad de carga superficial del disco. Esta expresión da el campo en un punto del eje  $z$  posi-

tivo a una distancia  $z$  del disco. El campo apunta lejos del disco si éste tiene carga positiva. La ecuación 26-19 es válida sólo cuando  $z > 0$ . ¿Cómo habría que modificarla si  $P$  se hallara en el eje  $z$  negativo?

### Una hoja infinita con carga

Examinemos ahora el caso límite de la ecuación 26-19 como  $R \rightarrow \infty$ , de modo que el disco cargado se convierte en una hoja infinita con carga. Suponemos que, al aumentar  $R$ , agregamos carga al disco para que la densidad de carga superficial  $\sigma$  permanezca constante. En tales condiciones, podemos aproximar la ecuación 26-19 como

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (26-20)$$

El resultado anterior resulta de muchísima utilidad, pues es aproximadamente válido para un disco con densidad de carga uniforme cuando estamos cerca de él y lejos de uno de sus bordes. De hecho, si estuviéramos lejos de sus bordes, no sería imposible saber si la distribución de carga se esparce en un área circular o en una cuadrada, rectangular o de forma irregular. Como veremos en el siguiente capítulo, este resultado es válido con cualquier hoja grande de carga uniforme, sin importar su forma. El campo posee magnitud uniforme y (en una hoja con carga positiva) se aleja de la hoja con carga.

### Un cascarón esférico con carga uniforme

En la sección 25-5 mencionamos dos propiedades de un cascarón esférico con carga uniforme: no ejerce fuerza alguna sobre una carga de prueba en su interior, y en los puntos exteriores la fuerza que ejerce es la misma como si toda la carga del cascarón se concentrara en un punto en su centro. Podemos usar estas propiedades para deducir el campo eléctrico debido a un cascarón delgado cargado uniformemente. Supongamos que el cascarón tiene el radio  $R$  y la carga  $q$ , que por ahora suponemos positiva. Tenemos entonces los siguientes resultados del campo eléctrico en varias distancias del centro del cascarón:

$$E = 0 \quad (r < R) \quad (26-21a)$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R). \quad (26-21b)$$

El subíndice  $r$  en el campo eléctrico nos recuerda que este último apunta en dirección radial. Los resultados anteriores se deducen directamente de la fuerza ejercida sobre una carga de prueba en varios lugares. El campo eléctrico es cero dentro del cascarón. En los puntos exteriores el campo eléctrico es radial e idéntico al de una carga puntual, de manera que su aspecto sería como el del campo de la figura 26-3.

Podemos servirnos de las propiedades de los cascarones de carga para deducir el campo eléctrico producido por una distribución de carga simétricamente esférica en la esfera de radio  $R$ . Para simplificar la explicación supondremos que la carga se distribuye uniformemente a través de toda la esfera,

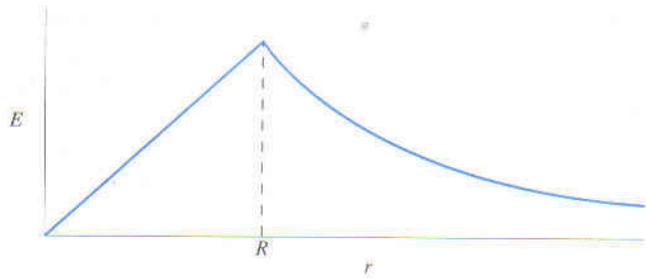


FIGURA 26-8. Magnitud del campo eléctrico creado por una esfera cargada uniformemente de radio  $R$ .

así que su densidad de carga volumétrica es una constante. Si  $Q$  es la carga total de la esfera, la densidad es

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \quad (26-22)$$

Imagine que la esfera va a ser dividida en muchos cascarones delgados de radio  $r$  y de espesor  $dr$ . Si colocamos una carga de prueba a una distancia  $r$  del origen y dentro del cascarón ( $r < R$ ), el campo eléctrico en ese sitio de la carga se origina sólo por los cascarones de radio menor; por la ecuación 26-21a sabemos que  $E = 0$  en todas las de radio mayor. Más aún, en la ecuación 26-21b vimos que el campo debido a todos los cascarones de radio menor es el mismo que el de una carga puntual en el origen. La magnitud de la carga puntual es igual a la carga total de todos los cascarones de radio menor que  $r$ , o, en forma equivalente, la carga total  $q$  dentro de la esfera de radio  $r$ , dada por la densidad de carga volumétrica multiplicada por el volumen de la esfera de radio  $r$ .

$$q = \rho \left( \frac{4}{3}\pi r^3 \right) = Q \frac{r^3}{R^3}. \quad (26-23)$$

usando la densidad de carga obtenida de la ecuación 26-22.

La ecuación 26-21b proporciona entonces el componente radial del campo eléctrico en este sitio del interior de la esfera:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \quad (r < R). \quad (26-24)$$

Si, como supusimos,  $Q$  es positiva, el campo apunta radialmente hacia afuera; si  $Q$  es negativa, el campo se dirige radialmente al interior. Con  $r > R$ , el campo es idéntico al de una carga puntual  $Q$  ubicada en el origen (Ec. 26-6). Nótese que el campo crece linealmente con  $r$  cuando  $r < R$ , y disminuye como  $1/r^2$  con  $r > R$ . En la figura 26-8 se muestra la magnitud del campo eléctrico en función de  $r$ .

**PROBLEMA RESUELTO 26-4.** Una varilla de plástico, que mide 220 cm de largo y 3.6 mm de radio, transporta una carga negativa  $q$  de magnitud  $3.8 \times 10^{-7}$  C, distribuida uniformemente en su superficie. ¿Cuál es el campo eléctrico cerca del punto medio de la varilla, en un lugar de su superficie?

**Solución** Aunque la varilla no es infinitamente larga, es muy larga en un punto de su superficie y cerca de su punto medio; así que se

justifica emplear la ecuación 26-17. La densidad de carga lineal de la varilla es

$$\lambda = \frac{q}{L} = \frac{-3.8 \times 10^{-7} \text{ C}}{2.2 \text{ m}} = -1.73 \times 10^{-7} \text{ C/m.}$$

Con  $y = 0.0036 \text{ m}$ , a partir de la ecuación 36-17 tenemos

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \\ &= \frac{-1.73 \times 10^{-7} \text{ C/m}}{(2\pi)(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(0.0036 \text{ m})} \\ &= -8.6 \times 10^5 \text{ N/C.} \end{aligned}$$

El signo negativo indica lo siguiente: la varilla tiene carga negativa, por eso el campo eléctrico se dirige radialmente hacia adentro, en dirección de su eje. Se producen chispas en el aire seco a presión atmosférica en un campo eléctrico cuya magnitud aproximada es  $3 \times 10^6 \text{ N/C}$ . La fuerza del campo calculado es menor que la anterior en un factor de alrededor de 3.4, por lo cual no deberían saltar chispas.

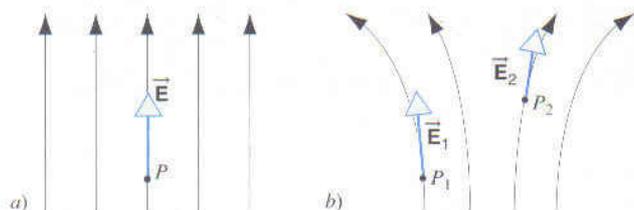
## 26-5 LAS LÍNEAS DEL CAMPO ELÉCTRICO

Michael Faraday introdujo el concepto de campo eléctrico a comienzos del siglo XIX. No formuló una representación matemática de él; más bien, preparó una representación gráfica donde imaginó que el espacio alrededor de una carga eléctrica estaba lleno de *líneas de fuerza*. Hoy ya no consideramos las líneas tan reales como Faraday, pero las conservamos como un medio útil para visualizar el campo eléctrico. Las llamamos *líneas del campo eléctrico*.

La figura 26-9a muestra las líneas del campo eléctrico que representan un campo uniforme. Nótese que las líneas son paralelas y presentan el mismo espaciamiento. En la figura 26-9b vemos líneas que representan un campo no uniforme. Por convención trazamos las líneas con la siguiente propiedad:

*La tangente a la línea del campo eléctrico que cruza un punto cualquiera del espacio denota la dirección del campo eléctrico allí.*

Por ejemplo, en la figura 26-9a en el punto  $P$  la dirección del campo eléctrico se dirige verticalmente hacia arriba, tangente a las líneas del campo. Por ser uniforme el campo, tiene esta dirección en todos los puntos de esa región del espacio. En la



**FIGURA 26-9.** a) Líneas del campo eléctrico de un campo uniforme. b) Líneas del campo eléctrico de un campo no uniforme.

figura 26-9b, que contiene un campo no uniforme, el campo eléctrico tiene distintas direcciones en los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , en todos los casos tangentes al que pasa por allí.

Para las líneas de campo que poseen esta propiedad, deben también trazarse, de modo que

*Las líneas del campo eléctrico comiencen en las cargas positivas y terminen en las negativas.*

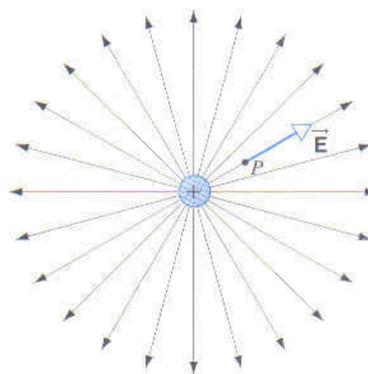
Así, la figura 26-10 representa las líneas del campo de una carga puntual positiva aislada (o una esfera pequeña con carga positiva). Las líneas apuntan radialmente hacia afuera, de manera que el campo es radial en cualquier punto  $P$ . Las líneas del campo empiezan en la carga positiva y se extienden al infinito, ya que no hay cargas negativas en la región. Si la carga fuera negativa, las líneas del campo apuntarían en dirección contraria (radialmente hacia adentro).

Una última propiedad de las líneas del campo eléctrico es la siguiente:

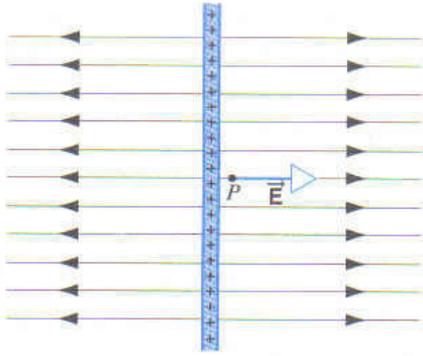
*La magnitud del campo eléctrico en un punto cualquiera es proporcional al número de líneas por unidad de superficie perpendicular a estas líneas.*

En otras palabras, cuando más densamente empaçadas estén las líneas cerca de cualquier punto, más fuerte será el campo en ese punto. Por ejemplo, la figura 26-9b indica que la magnitud del campo es mayor en el fondo del dibujo (cerca del punto  $P_1$ ) que en la parte superior (cerca del punto  $P_2$ ). Por el contrario, en la figura 26-9a el espaciamiento entre las líneas es el mismo en todos los puntos, lo cual significa que el campo posee la misma magnitud por todas partes. En una carga puntual (Fig. 26-10), las líneas del campo están muy juntas cerca de la carga y más separadas lejos de ella, lo cual indica que el campo se debilita al incrementarse la distancia respecto a la carga.

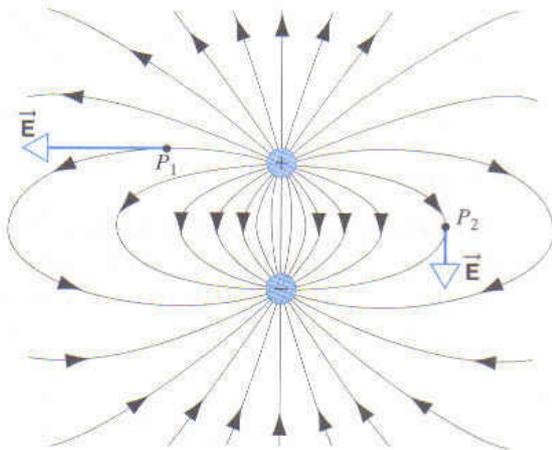
En la figura 26-11 aparece el campo uniforme cerca de una hoja grande de carga positiva. La dirección del campo es perpendicular a la hoja. Cerca de los bordes de la hoja, el campo se vuelve no uniforme y ya no se dirige perpendicularmente a la hoja; pero mientras permanezcamos cerca del centro y lejos de los bordes, el campo será casi uniforme. Una vez más sus líneas se extienden hacia el infinito.



**FIGURA 26-10.** Líneas del campo eléctrico que rodean una carga puntual positiva y aislada o una esfera uniforme de carga positiva. Se muestra el campo situado en un punto arbitrario  $P$ .

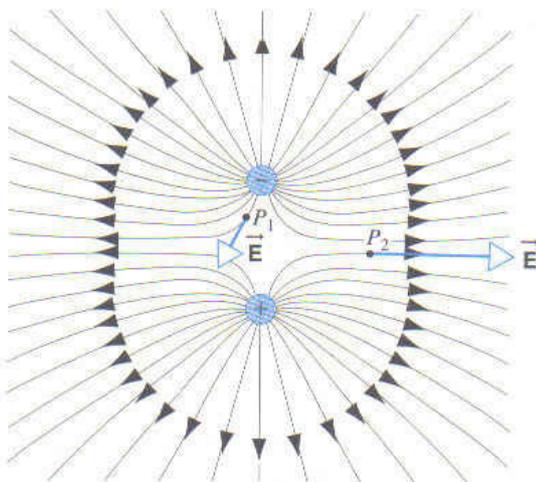


**FIGURA 26-11.** Líneas del campo eléctrico cerca de una hoja uniforme delgada de carga. Estamos viendo el borde de la hoja, que se orienta perpendicularmente a la página.



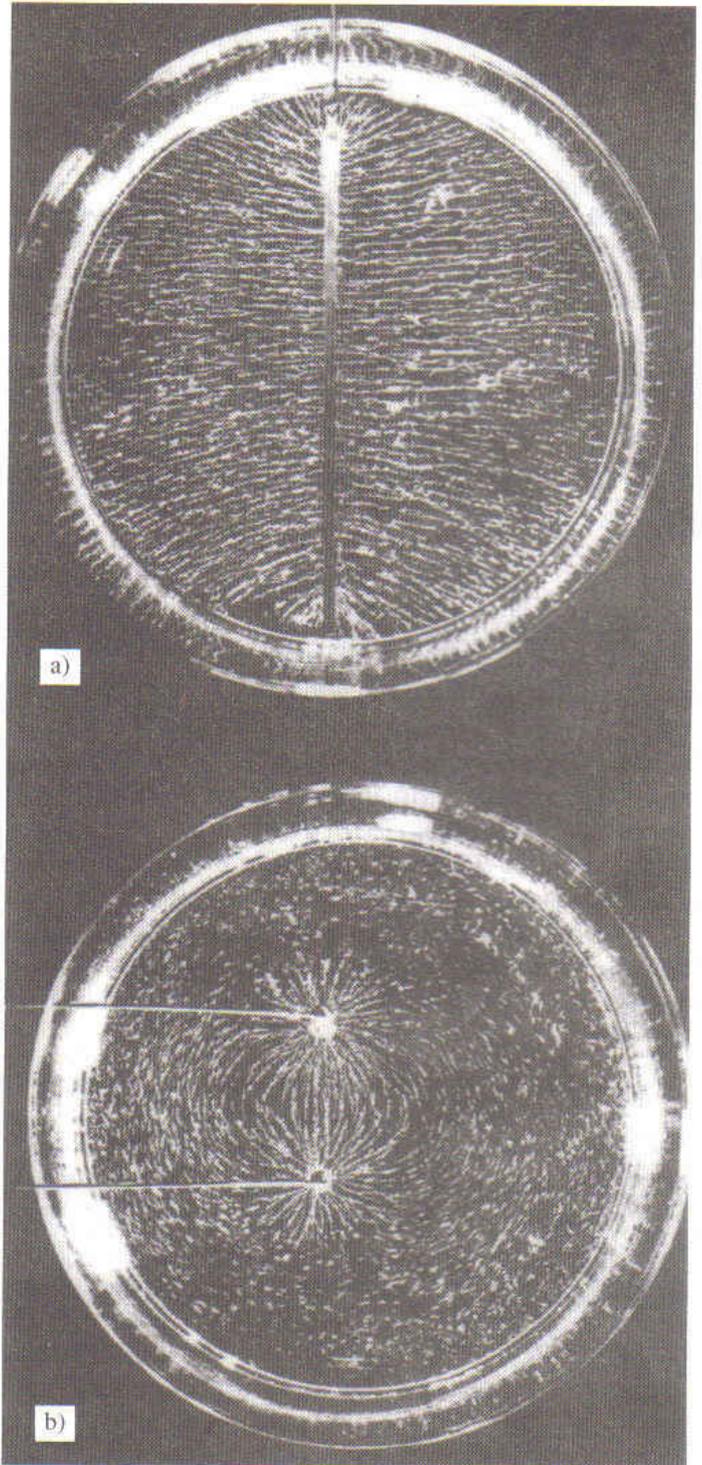
**FIGURA 26-12.** Líneas del campo eléctrico de un dipolo eléctrico.

En la figura 26-12 se muestra el campo cerca de un dipolo (que indica gráficamente cómo las líneas de campo empiezan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas); en la figura 26-13 se observa el campo cerca de dos cargas positivas iguales. Nótese las diferencias de los dos patrones. En la región entre las cargas, la densidad de las líneas es mayor en



**FIGURA 26-13.** Líneas del campo eléctrico de dos cargas positivas iguales.

la figura 26-12 que en la 26-13, lo cual significa que el dipolo genera un campo mayor allí que las dos cargas positivas. Debido a que el campo eléctrico es cero entre las cargas de la figura 26-13, no pueden trazarse líneas a través de ese punto. Al alejarnos de las cargas de la figura 26-13, el patrón empieza a parecerse al de una carga simple (como en la Fig. 26-10). En



**FIGURA 26-14.** Fotografías de los patrones de las líneas del campo eléctrico alrededor de *a)* una placa cargada (que produce líneas paralelas de campo) y *b)* de dos varillas con carga igual pero opuesta (semejante al dipolo eléctrico de la Fig. 26-12). Se hicieron visibles los patrones suspendiendo semillas de pasto en un líquido aislante.

los puntos externos del plano mediano (perpendicular a la página y a la mitad entre las cargas), el campo es pequeño en el dipolo y se dirige hacia abajo; en cambio, en las cargas iguales es mayor y se dirige radialmente hacia afuera, como se aprecia en los puntos  $P_2$  de las figuras 26-12 y 26-13.

Estos dibujos ayudan mucho a visualizar el patrón de las líneas del campo eléctrico. Pero no olvide que representan tan sólo una “rebanada” bidimensional de lo que es en realidad un patrón tridimensional. Los espaciamientos relativos de las líneas en dos dimensiones no corresponden estrictamente al patrón tridimensional; los espaciamientos de las líneas en nuestros dibujos bidimensionales no guardan una relación matemática directa con la magnitud del campo; indican únicamente las regiones donde el campo puede ser uniforme o su magnitud puede aumentar o disminuir.

El patrón de líneas del campo eléctrico puede hacerse visible aplicando un campo eléctrico a una suspensión de objetos diminutos en un fluido aislante. La figura 26-14 ofrece fotografías de patrones que se asemejan al dibujo de líneas del campo eléctrico en una hoja cargada y en un dipolo eléctrico.

## 26-6 UNA CARGA PUNTUAL EN UN CAMPO ELÉCTRICO

En secciones anteriores hemos examinado la primera parte de la interacción carga  $\rightleftharpoons$  campo  $\rightleftharpoons$  carga: ¿cuál es el campo eléctrico resultante de un conjunto de cargas? En esta sección y en la siguiente vamos a estudiar la segunda parte: ¿qué sucede cuando en un campo eléctrico conocido colocamos una partícula cargada?

En la ecuación 26-4 vemos que una partícula de carga  $q$  en un campo eléctrico  $\vec{E}$  experimenta una fuerza  $\vec{F}$  dada por

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Si queremos estudiar el movimiento de la partícula en el campo eléctrico, tan sólo necesitamos emplear la segunda ley de Newton  $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ , donde la fuerza resultante en la partícula incluye la fuerza eléctrica y cualquiera otra que pueda intervenir.

Como hicimos en la explicación inicial de las leyes de Newton, podemos lograr una simplificación si consideramos el caso en que la fuerza es constante. Así pues, comenzaremos analizando los casos en que el campo eléctrico y la fuerza eléctrica correspondiente son uniformes (no varían con la posición) y constantes (no varían con el tiempo). En la práctica ello se consigue en la región cercana a una hoja grande con carga uniforme, según vimos en la sección 26-4. Si queremos una uniformidad aún mayor, podemos emplear un par de hojas poco espaciadas con carga opuesta, obtenidas al conectar las terminales de una batería a un par de placas metálicas paralelas. En los siguientes problemas resueltos supondremos que el campo existe tan sólo en la región entre las placas y que se reduce abruptamente a cero cuando las partículas la abandonan. En realidad, el campo disminuye con rapidez en una

distancia del orden del espaciamento entre las placas; cuando esta distancia es pequeña, no cometemos un error demasiado grande al calcular el movimiento de la partícula si prescindimos del efecto de borde.

**PROBLEMA RESUELTO 26-5.** Mantenemos en equilibrio una gota de aceite cargada que tiene un radio de  $R = 2.76 \mu\text{m}$  y una densidad de  $\rho = 918 \text{ kg/m}^3$  bajo la influencia combinada de su peso y de un campo eléctrico uniforme y descendente de magnitud  $E = 1.63 \times 10^6 \text{ N/C}$  (Fig. 26-15). a) Calcule la magnitud y el signo de la carga en ella. Expresé el resultado en función de la carga elemental  $e$ . b) Si se expone la gota a una fuente radiactiva que emite electrones. Dos electrones chocan contra la gota y son capturados por ella, lo cual cambia su carga en dos unidades. Suponiendo que el campo eléctrico conserva su valor constante, calcule la aceleración resultante de la gota.

**Solución** a) Para mantener en equilibrio la gota, su peso  $mg$  ha de ser equilibrado con una fuerza eléctrica igual de magnitud  $qE$  que actúe hacia arriba. Como se supone que el campo eléctrico sigue una dirección descendente, la carga  $q$  de la gota deberá ser negativa para que la fuerza eléctrica apunte en dirección opuesta al campo. La condición de equilibrio es

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{g} + q\vec{E} = 0.$$

Al tomar la componente  $y$ , obtenemos

$$-mg + q(-E) = 0$$

o, al resolver la incógnita  $q$ ,

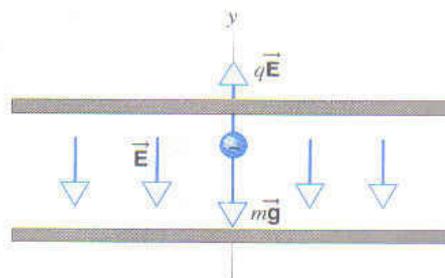
$$\begin{aligned} q &= -\frac{mg}{E} = -\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g}{E} \\ &= -\frac{\frac{4}{3}\pi(2.76 \times 10^{-6} \text{ m})^3(918 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)}{1.63 \times 10^6 \text{ N/C}} \\ &= -4.80 \times 10^{-19} \text{ C}. \end{aligned}$$

Si a partir de la carga eléctrica  $-e$  escribimos  $q$  como  $q = n(-e)$ , donde  $n$  es el número de cargas electrónicas en la gota, tendremos

$$n = \frac{q}{-e} = \frac{-4.80 \times 10^{-19} \text{ C}}{-1.60 \times 10^{-19} \text{ C}} = 3.$$

b) Si incorporamos dos electrones más a la gota, su carga se convertirá en

$$q' = (n + 2)(-e) = 5(-1.60 \times 10^{-19} \text{ C}) = -8.00 \times 10^{-19} \text{ C}.$$



**FIGURA 26-15.** Problema resuelto 26-5. Una gota con carga negativa se pone en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ . Se mueve bajo la influencia combinada de su peso  $m\vec{g}$  y de la fuerza eléctrica  $q\vec{E}$ .

La segunda ley de Newton puede escribirse

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + q'\vec{E} = m\vec{a}$$

y, tomando los componentes  $y$ , obtenemos

$$-mg + q'(-E) = ma.$$

Ahora podemos resolver para la aceleración:

$$\begin{aligned} a &= -g - \frac{q'E}{m} \\ &= -9.80 \text{ m/s}^2 - \frac{(-8.00 \times 10^{-19} \text{ C})(1.65 \times 10^6 \text{ N/C})}{\frac{4}{3}\pi(2.76 \times 10^{-6} \text{ m})^3(918 \text{ kg/m}^3)} \\ &= -9.80 \text{ m/s}^2 + 16.3 \text{ m/s}^2 = +6.5 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

La gota acelera en la dirección positiva  $y$ .

En el cálculo anterior hemos ignorado la fuerza viscosa de arrastre, muy importante en esta situación. En efecto, hemos determinado la aceleración de la gota en el instante en que adquirió dos electrones más. La fuerza de arrastre, que depende de la velocidad de la gota, es cero inicialmente si la gota parte del reposo; pero aumenta a medida que comienza a moverse y, por tanto, disminuirá la magnitud de su aceleración.

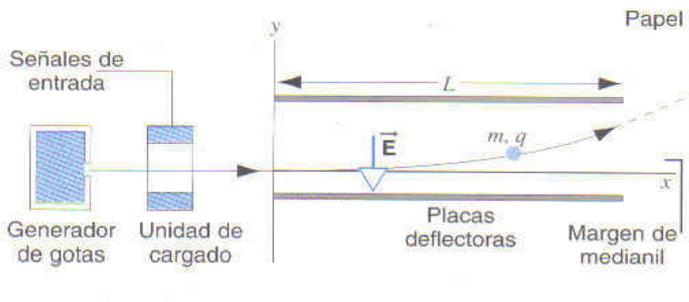
En esta configuración experimental se fundamenta el experimento de la gota de aceite de Millikan, en el que se midió la magnitud de la carga electrónica. El experimento se explica más adelante en esta sección.

**PROBLEMA RESUELTO 26-6.** La figura 26-16 muestra el sistema deflector de electrodos en una impresora de inyección de tinta. Una gota de tinta de masa  $m = 1.3 \times 10^{-10} \text{ kg}$  transporta una carga  $q$  de  $-1.5 \times 10^{-13} \text{ C}$  y entra en el sistema deflector de placas con una velocidad  $v = 18 \text{ m/s}$ . La longitud,  $L$ , de las placas es  $1.6 \text{ cm}$  y la magnitud del campo eléctrico,  $E$ , entre ellas es  $1.4 \times 10^6 \text{ N/C}$ . ¿Cuál es la deflexión vertical de la gota en el borde extremo de las placas? No tenga en cuenta el campo eléctrico variable en los bordes de ellas.

**Solución.** Sea  $t$  el tiempo que la gota tarda en pasar por el sistema deflector. Los desplazamiento vertical y horizontal están dados por

$$y = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{y} \quad L = vt,$$

respectivamente, donde  $a$  es la aceleración vertical de la gota.



**FIGURA 26-16.** Problema resuelto 26-6. Características esenciales de una impresora de inyección de tinta. Una señal de entrada proveniente de la computadora controla la carga aplicada a la gota y, por tanto, la posición en que golpea al papel. Una fuerza transversal procedente del campo eléctrico  $\vec{E}$  hace que la gota se desvíe. Ésta describe una trayectoria parabólica mientras se encuentra entre las placas, desplazándose a lo largo de una línea recta (líneas punteadas) después de salir de la placa.

Igual que en el problema resuelto anterior, podemos escribir el componente  $y$  de la segunda ley de Newton como  $-mg + q(-E) = ma$ . Como se puede verificar fácilmente, la fuerza eléctrica que opera sobre la gota,  $-qE$ , es mucho mayor, en este caso, que la fuerza gravitacional  $mg$ ; por tanto, puede suponerse que la aceleración de la gota es  $-qE/m$ . Al eliminar  $t$  entre las dos ecuaciones de desplazamiento y al sustituir  $a$  por este valor, se tiene

$$\begin{aligned} y &= \frac{-qEL^2}{2mv^2} \\ &= \frac{-(-1.5 \times 10^{-13} \text{ C})(1.4 \times 10^6 \text{ N/C})(1.6 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{(2)(1.3 \times 10^{-10} \text{ kg})(18 \text{ m/s})^2} \\ &= 6.4 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.64 \text{ mm}. \end{aligned}$$

La deflexión en el papel será mayor que esto, pues la gota de tinta sigue una trayectoria recta hacia el papel tras abandonar la región de deflexión, como lo indica la línea punteada de la figura 26-16. Para dirigir las gotas de tinta de modo que formen bien los caracteres, es preciso controlar la carga  $q$  en ellas, a las cuales es proporcional la deflexión a un porcentaje bajo. En nuestra exposición, hemos vuelto a prescindir de las fuerzas de arrastre que operan sobre la gota; son importantes en estas velocidades tan altas de la gota.

## Medición de la carga elemental

Hoy sabemos que la carga eléctrica está cuantizada, esto es, se observa sólo en múltiplos enteros de la carga elemental  $e$ , cuyo valor actualmente aceptado es  $1.602176462 \times 10^{-19} \text{ C}$ , con una incertidumbre experimental que aparece sólo en los dos últimos dígitos. Este valor actual, como el de casi todas las constantes fundamentales de la física, se obtuvo de varios experimentos interrelacionados y cada vez más precisos.

¿Cómo descubrimos que la carga está cuantizada? y ¿cómo se midió por primera vez el valor de  $e$ ? Las primeras respuestas definitivas a ambas preguntas surgieron de experimentos efectuados por el físico norteamericano Robert A. Millikan\* (1868-1953). Por este trabajo y por otros afines obtuvo el Premio Nobel de Física en 1923.

En la figura 26-17 se muestra el aparato de Millikan. Un atomizador introduce gotitas de aceite en la cámara A. Algunas adquieren carga (positiva o negativa) en el proceso. Consideramos una gota de carga  $q$  (supuestamente negativa); entra en la cámara C a través de un orificio pequeño de la placa  $P_1$ .

Si no hay campo eléctrico en la cámara, dos fuerzas operan sobre la gota, su peso  $mg$  y una fuerza viscosa de arrastre ascendente, cuya magnitud es proporcional a la rapidez de la gota que cae. Rápidamente ésta adquiere una velocidad termi-

\* Consulte los detalles del experimento de Millikan en Henry A. Borres y Lloyd Motz (eds), *The World of the Atom* (Basic Book, 1966) capítulo 40. El punto de vista de dos físicos que conocieron a Millikan cuando estudiaban el posgrado se encuentra en "Robert A. Millikan, Physics Teacher", por Alfred Romer, *The Physics Teacher*, Febrero de 1978, p. 78 y "My work with Millikan on the Oil-Drop Experiment", por Harvey Fletcher, *Physics Today*, Junio de 1982, p. 43.

los puntos externos del plano mediano (perpendicular a la página y a la mitad entre las cargas), el campo es pequeño en el dipolo y se dirige hacia abajo; en cambio, en las cargas iguales es mayor y se dirige radialmente hacia afuera, como se aprecia en los puntos  $P_2$  de las figuras 26-12 y 26-13.

Estos dibujos ayudan mucho a visualizar el patrón de las líneas del campo eléctrico. Pero no olvide que representan tan sólo una "rebanada" bidimensional de lo que es en realidad un patrón tridimensional. Los espaciamentos relativos de las líneas en dos dimensiones no corresponden estrictamente al patrón tridimensional; los espaciamentos de las líneas en nuestros dibujos bidimensionales no guardan una relación matemática directa con la magnitud del campo; indican únicamente las regiones donde el campo puede ser uniforme o su magnitud puede aumentar o disminuir.

El patrón de líneas del campo eléctrico puede hacerse visible aplicando un campo eléctrico a una suspensión de objetos diminutos en un fluido aislante. La figura 26-14 ofrece fotografías de patrones que se asemejan al dibujo de líneas del campo eléctrico en una hoja cargada y en un dipolo eléctrico.

## 26-6 UNA CARGA PUNTUAL EN UN CAMPO ELÉCTRICO

En secciones anteriores hemos examinado la primera parte de la interacción carga  $\rightleftharpoons$  campo  $\rightleftharpoons$  carga: ¿cuál es el campo eléctrico resultante de un conjunto de cargas? En esta sección y en la siguiente vamos a estudiar la segunda parte: ¿qué sucede cuando en un campo eléctrico conocido colocamos una partícula cargada?

En la ecuación 26-4 vemos que una partícula de carga  $q$  en un campo eléctrico  $\vec{E}$  experimenta una fuerza  $\vec{F}$  dada por

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Si queremos estudiar el movimiento de la partícula en el campo eléctrico, tan sólo necesitamos emplear la segunda ley de Newton  $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ , donde la fuerza resultante en la partícula incluye la fuerza eléctrica y cualquiera otra que pueda intervenir.

Como hicimos en la explicación inicial de las leyes de Newton, podemos lograr una simplificación si consideramos el caso en que la fuerza es constante. Así pues, comenzaremos analizando los casos en que el campo eléctrico y la fuerza eléctrica correspondiente son uniformes (no varían con la posición) y constantes (no varían con el tiempo). En la práctica ello se consigue en la región cercana a una hoja grande con carga uniforme, según vimos en la sección 26-4. Si queremos una uniformidad aún mayor, podemos emplear un par de hojas poco espaciadas con carga opuesta, obtenidas al conectar las terminales de una batería a un par de placas metálicas paralelas. En los siguientes problemas resueltos supondremos que el campo existe tan sólo en la región entre las placas y que se reduce abruptamente a cero cuando las partículas la abandonan. En realidad, el campo disminuye con rapidez en una

distancia del orden del espaciamiento entre las placas; cuando esta distancia es pequeña, no cometemos un error demasiado grande al calcular el movimiento de la partícula si prescindimos del efecto de borde.

**PROBLEMA RESUELTO 26-5.** Mantenemos en equilibrio una gota de aceite cargada que tiene un radio de  $R = 2.76 \mu\text{m}$  y una densidad de  $\rho = 918 \text{ kg/m}^3$  bajo la influencia combinada de su peso y de un campo eléctrico uniforme y descendente de magnitud  $E = 1.65 \times 10^6 \text{ N/C}$  (Fig. 26-15). *a)* Calcule la magnitud y el signo de la carga en ella. Expresé el resultado en función de la carga elemental  $e$ . *b)* Se expone la gota a una fuente radiactiva que emite electrones. Dos electrones chocan contra la gota y son capturados por ella, lo cual cambia su carga en dos unidades. Suponiendo que el campo eléctrico conserva su valor constante, calcule la aceleración resultante de la gota.

**Solución** *a)* Para mantener en equilibrio la gota, su peso  $mg$  ha de ser equilibrado con una fuerza eléctrica igual de magnitud  $qE$  que actúe hacia arriba. Como se supone que el campo eléctrico sigue una dirección descendente, la carga  $q$  de la gota deberá ser negativa para que la fuerza eléctrica apunte en dirección opuesta al campo. La condición de equilibrio es

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{g} + q\vec{E} = 0.$$

Al tomar la componente  $y$ , obtenemos

$$-mg + q(-E) = 0$$

o, al resolver la incógnita  $q$ ,

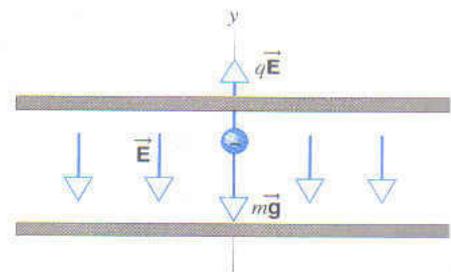
$$\begin{aligned} q &= -\frac{mg}{E} = -\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g}{E} \\ &= -\frac{\frac{4}{3}\pi(2.76 \times 10^{-6} \text{ m})^3(918 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)}{1.65 \times 10^6 \text{ N/C}} \\ &= -4.80 \times 10^{-19} \text{ C}. \end{aligned}$$

Si a partir de la carga eléctrica  $-e$  escribimos  $q$  como  $q = n(-e)$ , donde  $n$  es el número de cargas electrónicas en la gota, tendremos

$$n = \frac{q}{-e} = \frac{-4.80 \times 10^{-19} \text{ C}}{-1.60 \times 10^{-19} \text{ C}} = 3.$$

*b)* Si incorporamos dos electrones más a la gota, su carga se convertirá en

$$q' = (n + 2)(-e) = 5(-1.60 \times 10^{-19} \text{ C}) = -8.00 \times 10^{-19} \text{ C}.$$



**FIGURA 26-15.** Problema resuelto 26-5. Una gota con carga negativa se pone en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ . Se mueve bajo la influencia combinada de su peso  $m\vec{g}$  y de la fuerza eléctrica  $q\vec{E}$ .

La segunda ley de Newton puede escribirse

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + q'\vec{E} = m\vec{a}$$

y, tomando los componentes  $y$ , obtenemos

$$-mg + q'(-E) = ma.$$

Ahora podemos resolver para la aceleración:

$$\begin{aligned} a &= -g - \frac{q'E}{m} \\ &= -9.80 \text{ m/s}^2 - \frac{(-8.00 \times 10^{-19} \text{ C})(1.65 \times 10^6 \text{ N/C})}{\frac{4}{3}\pi(2.76 \times 10^{-6} \text{ m})^3(918 \text{ kg/m}^3)} \\ &= -9.80 \text{ m/s}^2 + 16.3 \text{ m/s}^2 = +6.5 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

La gota acelera en la dirección positiva  $y$ .

En el cálculo anterior hemos ignorado la fuerza viscosa de arrastre, muy importante en esta situación. En efecto, hemos determinado la aceleración de la gota en el instante en que adquirió dos electrones más. La fuerza de arrastre, que depende de la velocidad de la gota, es cero inicialmente si la gota parte del reposo; pero aumenta a medida que comienza a moverse y, por tanto, disminuirá la magnitud de su aceleración.

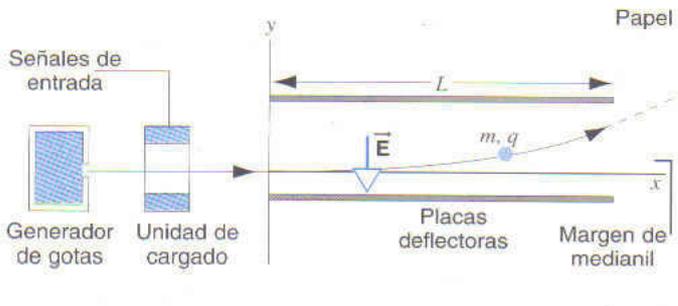
En esta configuración experimental se fundamenta el experimento de la gota de aceite de Millikan, en el que se midió la magnitud de la carga electrónica. El experimento se explica más adelante en esta sección.

**PROBLEMA RESUELTO 26-6.** La figura 26-16 muestra el sistema deflector de electrodos en una impresora de inyección de tinta. Una gota de tinta de masa  $m = 1.3 \times 10^{-10} \text{ kg}$  transporta una carga  $q$  de  $-1.5 \times 10^{-13} \text{ C}$  y entra en el sistema deflector de placas con una velocidad  $v = 18 \text{ m/s}$ . La longitud,  $L$ , de las placas es  $1.6 \text{ cm}$  y la magnitud del campo eléctrico,  $E$ , entre ellas es  $1.4 \times 10^6 \text{ N/C}$ . ¿Cuál es la deflexión vertical de la gota en el borde extremo de las placas? No tenga en cuenta el campo eléctrico variable en los bordes de ellas.

**Solución.** Sea  $t$  el tiempo que la gota tarda en pasar por el sistema deflector. Los desplazamiento vertical y horizontal están dados por

$$y = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{y} \quad L = vt,$$

respectivamente, donde  $a$  es la aceleración vertical de la gota.



**FIGURA 26-16.** Problema resuelto 26-6. Características esenciales de una impresora de inyección de tinta. Una señal de entrada proveniente de la computadora controla la carga aplicada a la gota y, por tanto, la posición en que golpea al papel. Una fuerza transversal procedente del campo eléctrico  $\vec{E}$  hace que la gota se desvíe. Ésta describe una trayectoria parabólica mientras se encuentra entre las placas, desplazándose a lo largo de una línea recta (líneas punteadas) después de salir de la placa.

Igual que en el problema resuelto anterior, podemos escribir el componente  $y$  de la segunda ley de Newton como  $-mg + q(-E) = ma$ . Como se puede verificar fácilmente, la fuerza eléctrica que opera sobre la gota,  $-qE$ , es mucho mayor, en este caso, que la fuerza gravitacional  $mg$ ; por tanto, puede suponerse que la aceleración de la gota es  $-qE/m$ . Al eliminar  $t$  entre las dos ecuaciones de desplazamiento y al sustituir  $a$  por este valor, se tiene

$$\begin{aligned} y &= \frac{-qEL^2}{2mv^2} \\ &= \frac{-(-1.5 \times 10^{-13} \text{ C})(1.4 \times 10^6 \text{ N/C})(1.6 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{(2)(1.3 \times 10^{-10} \text{ kg})(18 \text{ m/s})^2} \\ &= 6.4 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.64 \text{ mm}. \end{aligned}$$

La deflexión en el papel será mayor que esto, pues la gota de tinta sigue una trayectoria recta hacia el papel tras abandonar la región de deflexión, como lo indica la línea punteada de la figura 26-16. Para dirigir las gotas de tinta de modo que formen bien los caracteres, es preciso controlar la carga  $q$  en ellas, a las cuales es proporcional la deflexión a un porcentaje bajo. En nuestra exposición, hemos vuelto a prescindir de las fuerzas de arrastre que operan sobre la gota; son importantes en estas velocidades tan altas de la gota.

## Medición de la carga elemental

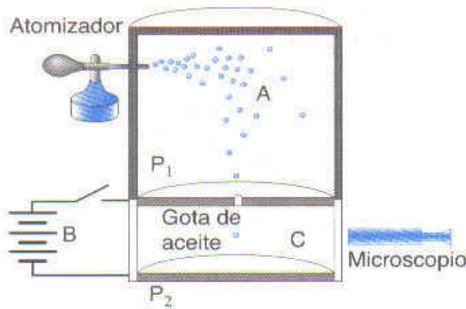
Hoy sabemos que la carga eléctrica está cuantizada, esto es, se observa sólo en múltiplos enteros de la carga elemental  $e$ , cuyo valor actualmente aceptado es  $1.602176462 \times 10^{-19} \text{ C}$ , con una incertidumbre experimental que aparece sólo en los dos últimos dígitos. Este valor actual, como el de casi todas las constantes fundamentales de la física, se obtuvo de varios experimentos interrelacionados y cada vez más precisos.

¿Cómo descubrimos que la carga está cuantizada? y ¿cómo se midió por primera vez el valor de  $e$ ? Las primeras respuestas definitivas a ambas preguntas surgieron de experimentos efectuados por el físico norteamericano Robert A. Millikan\* (1868-1953). Por este trabajo y por otros afines obtuvo el Premio Nobel de Física en 1923.

En la figura 26-17 se muestra el aparato de Millikan. Un atomizador introduce gotitas de aceite en la cámara A. Algunas adquieren carga (positiva o negativa) en el proceso. Consideramos una gota de carga  $q$  (supuestamente negativa); entra en la cámara C a través de un orificio pequeño de la placa  $P_1$ .

Si no hay campo eléctrico en la cámara, dos fuerzas operan sobre la gota, su peso  $mg$  y una fuerza viscosa de arrastre ascendente, cuya magnitud es proporcional a la rapidez de la gota que cae. Rápidamente ésta adquiere una velocidad termi-

\* Consulte los detalles del experimento de Millikan en Henry A. Borres y Lloyd Motz (eds), *The World of the Atom* (Basic Book, 1966) capítulo 40. El punto de vista de dos físicos que conocieron a Millikan cuando estudiaban el posgrado se encuentra en "Robert A. Millikan, Physics Teacher", por Alfred Romer, *The Physics Teacher*, Febrero de 1978, p. 78 y "My work with Millikan on the Oil-Drop Experiment", por Harvey Fletcher, *Physics Today*, Junio de 1982, p. 43.



**FIGURA 26-17.** Aparato de la gota de aceite diseñado por Millikan para medir la carga elemental  $e$ . El movimiento de una gota se observa en la cámara C, donde la gravedad actúa sobre ella, la batería B crea el campo eléctrico y, si la gota se mueve, una fuerza viscosa de arrastre.

nal constante  $v$  a la cual las dos fuerzas quedan apenas balanceadas.

Se conecta la batería B entre las placas  $P_1$  y  $P_2$  y produce ahora un campo eléctrico descendente  $\vec{E}$ . Una tercera fuerza,  $q\vec{E}$ , actúa sobre la gota. Si  $q$  es negativa, esta fuerza apunta hacia arriba y, suponemos, la gota se desplaza hacia arriba con una nueva velocidad terminal  $v'$ . En ambos casos la fuerza de arrastre apunta en dirección opuesta a aquella en que se mueve la gota y tiene una magnitud proporcional a la velocidad de la gota. Su carga  $q$  se calcula midiendo  $v$  y  $v'$ .

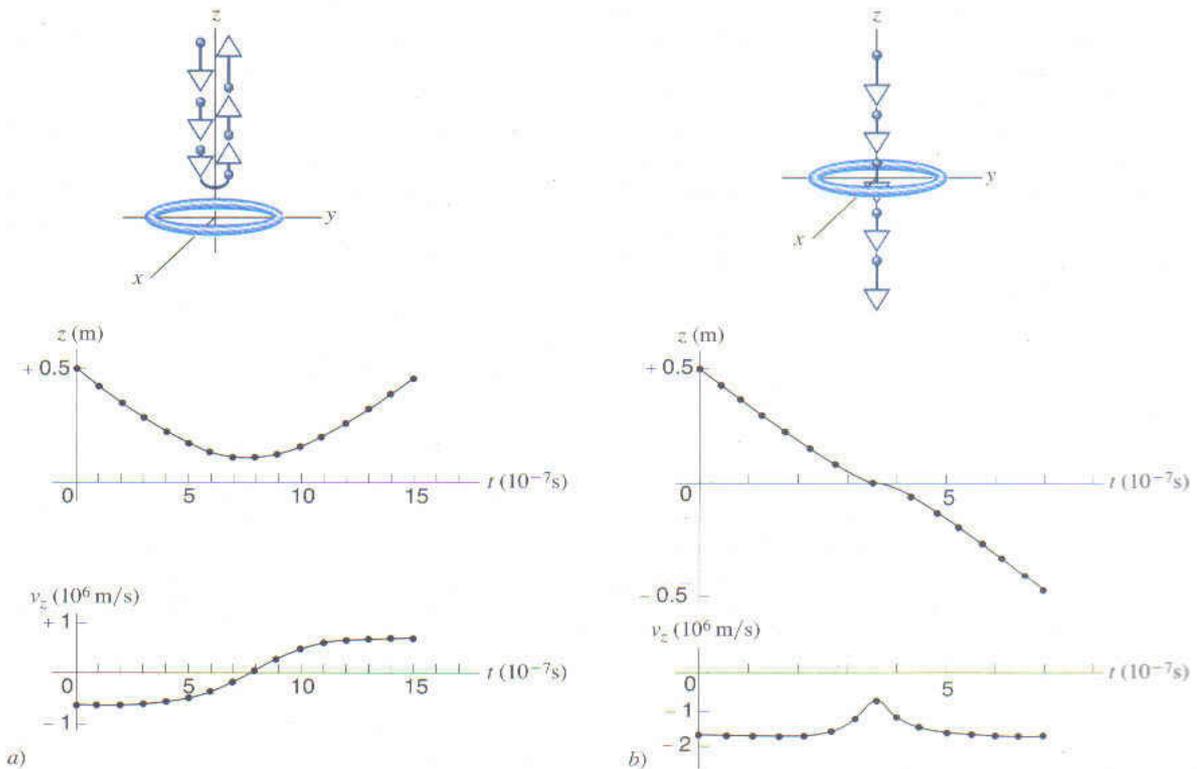
Millikan descubrió que los valores de  $q$  eran todos compatibles con la relación

$$q = ne \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

En otras palabras, las cargas de la gota ocurrían sólo en múltiplos enteros de cierta magnitud fundamental, la carga elemental  $e$ , que según dedujo tiene un valor de  $1.64 \times 10^{-19}$  C, lo cual coincide exactamente con el valor aceptado hoy. El experimento de Millikan ofrece una prueba convincente de que la carga está cuantizada.

### Movimiento en campos eléctricos no uniformes (opcional)

Hasta ahora hemos considerado sólo campos uniformes donde el campo eléctrico tiene magnitud y dirección constantes en la región donde se desplaza la partícula. Sin embargo, a menudo debemos ocuparnos de campos no uniformes. Por ejemplo, consideramos un anillo con carga positiva como el de la figura 26-18. El campo eléctrico en su eje está dado por la ecuación 26-18. Supóngase que desde una gran distancia lanzamos una partícula cargada con la velocidad inicial  $v_0$  a lo largo del eje  $z$  hacia el anillo. A medida que ella recorre el eje, aumenta el campo eléctrico (y, por tanto, la fuerza eléctrica de la partícula). ¿Cómo podemos analizar su movimiento subse-



**FIGURA 26-18.** a) Movimiento de un protón proyectado a lo largo del eje de un anillo con carga positiva uniforme. Se muestran la posición y la velocidad. El protón se detiene inmediatamente en un tiempo aproximado de  $8 \times 10^{-7}$  s e invierte su movimiento. Los puntos son resultado de un cálculo numérico; se hacen pasar las curvas por los puntos. b) Si se aumenta lo suficiente la velocidad inicial de un protón, podrá cruzar el anillo; su rapidez es mínima cuando atraviesa el centro del anillo.

cuenta si prescindimos de la gravedad y consideramos sólo la fuerza eléctrica de la partícula?

En tales casos hay que recurrir a métodos analíticos para calcular las fuerzas dependientes de la posición parecidos a los descritos en la sección 5-5 y aplicables a las fuerzas dependientes del tiempo. Un método equivalente consiste en usar el procedimiento expuesto en la sección 12-5, pues, como veremos en el capítulo 28, la fuerza electrostática es conservativa. Otra opción consiste en emplear métodos numéricos para encontrar la solución, dividiendo el movimiento en intervalos infinitesimalmente pequeños donde suponemos que la aceleración es casi constante; una solución aproximada puede obtenerse con una computadora.

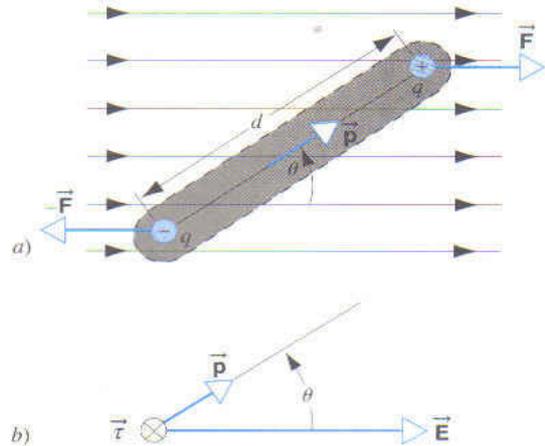
En este cálculo utilizamos un anillo de radio  $R = 3$  cm y con una densidad de carga lineal  $\lambda = +2 \times 10^{-7}$  C/m. Se lanza un protón ( $q = +1.6 \times 10^{-19}$  C,  $m = 1.67 \times 10^{-27}$  kg) sobre un eje de una espira desde una posición inicial en  $z = +0.5$  m, a una velocidad inicial de  $v_{z0} = -7 \times 10^5$  m/s. (La velocidad negativa inicial significa que el protón se desplaza hacia abajo en dirección de la espira, que se halla en el plano  $xy$ .) La espira con carga positiva ejerce una fuerza de repulsión sobre el protón con carga positiva, reduciendo su rapidez. En la figura 26-18a graficamos el movimiento resultante en el caso de que el protón no posea suficiente energía cinética inicial para alcanzar el plano de la espira. Se detiene de inmediato en un punto situado arriba del plano de la espira y luego invierte su movimiento conforme la espira la acelera, ahora en la dirección positiva  $z$ . Nótese que, con excepción de la región cercana a la espira, la velocidad del protón es casi constante porque el campo eléctrico es débil en distancias mayores.

La figura 26-18b muestra gráficamente el movimiento en el caso de que el protón tenga energía cinética inicial más que suficiente para llegar al plano de la espira. La fuerza de repulsión reduce el movimiento del protón, pero no lo detiene. El protón atraviesa la espira; la magnitud de su velocidad alcanza un mínimo al pasar por ella. Una vez más, lejos de la espira se desplaza con una velocidad casi constante. ■

## 26-7 DIPOLO EN UN CAMPO ELÉCTRICO

Cuando ponemos un dipolo eléctrico (Fig. 26-5a) en un campo eléctrico externo, la fuerza eléctrica ejercida sobre la carga positiva seguirá una dirección, y la ejercida sobre la carga negativa seguirá otra. Al explicar el efecto neto de estas fuerzas, es conveniente utilizar el vector de momento dipolar  $\vec{p}$ , que posee una magnitud  $p = qd$  y que apunta desde la carga negativa hacia la positiva. El escribir el momento dipolar como vector nos permite expresar en forma concisa las relaciones fundamentales en que intervienen los dipolos.

En la figura 26-19a se muestra un dipolo dentro de un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ . (Este campo no es el del dipolo propiamente dicho, sino que lo produce un agente externo que no aparece en la figura.) El momento dipolar  $\vec{p}$  forma un ángulo  $\theta$  con la dirección del campo. Suponemos que éste es



**FIGURA 26-19.** a) Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme. b) La relación vectorial  $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$  entre el momento dipolar  $\vec{p}$ , el campo eléctrico  $\vec{E}$  y el par de torsión resultante  $\vec{\tau}$  en el dipolo. El par de torsión apunta hacia la página.

uniforme, así que  $\vec{E}$  tiene la misma magnitud y dirección en el lugar de  $+q$  y  $-q$ . En consecuencia, las fuerzas ejercidas sobre esas dos cargas poseen igual magnitud  $F = qE$  pero dirección contraria, como se muestra en la figura 26-19a. Por ello, la fuerza neta en el dipolo debida al campo externo será cero, pero hay un par de torsión neto en su centro de masa que tiende a girar el dipolo para alinear  $\vec{p}$  con  $\vec{E}$ . El par de torsión de las cargas está dado por  $\tau = Fr_{\perp}$ ; el par de torsión neto alrededor del centro del dipolo debido a causa de las dos fuerzas posee la magnitud

$$\tau = F \frac{d}{2} \sin \theta + F \frac{d}{2} \sin \theta = Fd \sin \theta, \quad (26-25)$$

y su dirección es perpendicular al plano de la página y a su interior, como se indica en la figura 26-19b. Podemos escribir la ecuación 26-25 así

$$\tau = (qE)d \sin \theta = (qd)E \sin \theta = pE \sin \theta. \quad (26-26)$$

La ecuación 26-26 puede escribirse en forma vectorial

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad (26-27)$$

lo cual es consistente con las relaciones direccionales del producto cruz, como lo muestran los tres vectores de la figura 26-19b.

Como sucede generalmente en la dinámica cuando intervienen fuerzas conservativas (a esta categoría pertenece la fuerza electrostática según vimos en el Cap. 28), el sistema puede representarse con la misma fidelidad empleando ecuaciones de fuerza o de energía. Por tanto, consideremos el trabajo ejecutado por el campo eléctrico al hacer girar un dipolo en un ángulo  $\theta$ . Con la expresión adecuada del trabajo en el movimiento rotacional (Ec. 11-25), el trabajo hecho por el campo externo al girar el dipolo de un ángulo inicial  $\theta_0$  a un ángulo final  $\theta$  es

$$W = \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta} \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = \int_{\theta_0}^{\theta} -\tau d\theta, \quad (26-28)$$

donde  $\vec{\tau}$  es el par de torsión ejercido por el campo eléctrico externo. El signo menos en la ecuación 26-28 es necesario porque el par de torsión  $\tau$  tiende a disminuir  $\theta$ ; en la terminología de vectores  $\vec{\tau}$  y  $d\vec{\theta}$  siguen direcciones opuestas, por lo cual  $\vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = -\tau d\theta$ . La combinación de las ecuaciones 26-28 y 26-26 nos da

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} -pE \sin \theta d\theta = -pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = pE(\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (26-29)$$

El trabajo efectuado por el agente que produce el campo externo es igual al negativo del cambio en la energía potencial del sistema dipolo + campo; por tanto, tenemos

$$\Delta U \equiv U(\theta) - U(\theta_0) = -W = -pE(\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (26-30)$$

Definiremos arbitrariamente que el ángulo de referencia  $\theta_0$  es  $90^\circ$  y decidimos que la energía potencial  $U(\theta_0)$  sea cero en ese ángulo. Así pues, en cualquier ángulo  $\theta$  la energía potencial es

$$U = -pE \cos \theta, \quad (26-31)$$

que puede escribirse en forma vectorial

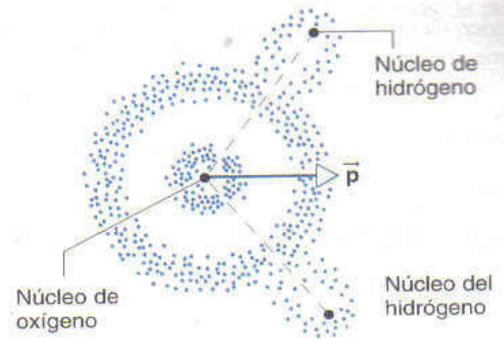
$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (26-32)$$

Por tanto,  $U$  es un mínimo cuando  $\vec{p}$  y  $\vec{E}$  son paralelos.

Una molécula de agua tiene un momento dipolar eléctrico. En un horno de microondas el campo eléctrico de la radiación de microondas tiende a girar el momento dipolar de las moléculas de agua para alinearlas al campo. Una molécula libre de agua simplemente oscilaría alrededor de su posición de equilibrio; en cambio, en los materiales (la comida entre ellos) las interacciones de las moléculas vecinas de agua convierten en energía interna el movimiento angular debido al par de torsión (o, equivalentemente, la energía cinética de la rotación atribuible a la reducción de la energía potencial del dipolo en el campo). La dirección del campo eléctrico se invierte cada  $2 \times 10^{-10}$  s; a medida que los momentos dipolares tratan continuamente de seguir el campo, transfieren la energía que cocina la comida.

El movimiento de un dipolo en un campo externo puede interpretarse partiendo de un par de torsión que lo gira para alienarlo con el campo (Ec. 26-27), o partiendo de una energía potencial que se reduce a un mínimo, cuando el dipolo se alinea con el campo (Ec. 26-32). La elección de una u otra interpretación suele fundarse en la facilidad con que se aplica a un problema en particular.

**PROBLEMA RESUELTO 26-7.** Una molécula de vapor de agua ( $\text{H}_2\text{O}$ ) tiene un momento dipolar eléctrico de magnitud  $p = 6.2 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ . (Este gran momento es el origen de muchas de las propiedades que hacen del agua una sustancia tan importante, entre otras cosas por su capacidad de funcionar como un solvente universal.) La figura 26-20 es una representación de la molécula: muestra los tres núcleos y las distribuciones de los electrones circundantes. El momento dipolar eléctrico  $\vec{p}$  está representado por un vector en el eje de simetría. Este momento se produce porque el centro efectivo de la carga positiva no coincide con el de la carga negativa. (Un caso contrastante es el de una molécula de dióxido de carbono,  $\text{CO}_2$ ,



**FIGURA 26-20.** Una molécula de  $\text{H}_2\text{O}$ , que muestra los tres núcleos, la distribución de electrones y el vector momento dipolar eléctrico  $\vec{p}$ .

Aquí los tres átomos están unidos en una línea recta, con el carbono en la mitad y los oxígenos a ambos lados. El centro de la carga positiva y el de la carga negativa coinciden en el centro de masa de la molécula; el momento dipolar eléctrico de  $\text{CO}_2$  es cero.) a) ¿A qué distancia se halla el centro efectivo de las cargas positiva y negativa en una molécula de  $\text{H}_2\text{O}$ ? b) ¿Cuál es el par de torsión máximo en una molécula de  $\text{H}_2\text{O}$  en un campo eléctrico típico de laboratorio que tiene una magnitud  $1.5 \times 10^4 \text{ N/C}$ . c) Suponga que el momento dipolar de una molécula de  $\text{H}_2\text{O}$  apunta inicialmente en dirección opuesta al campo. ¿Cuánto trabajo realiza el campo eléctrico al hacer girar la molécula para alinearla con él?

**Solución** a) En esta molécula hay 10 electrones y 10 cargas positivas correspondientes. En el caso de la magnitud del momento dipolar podemos escribir

$$p = qd = (10e)(d),$$

donde  $d$  es la separación que buscamos y  $e$  es la carga elemental. Por tanto,

$$d = \frac{p}{10e} = \frac{6.2 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}}{(10)(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})} = 3.9 \times 10^{-12} \text{ m} = 3.9 \text{ pm}.$$

Esto representa alrededor del 4% de la distancia de enlace OH en la molécula.

b) Como se indica en la ecuación 26-26, el par de torsión alcanza su máximo cuando  $\theta = 90^\circ$ . La sustitución de este valor en la ecuación da por resultado

$$\tau = pE \sin \theta = (6.2 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})(1.5 \times 10^4 \text{ N/C})(\sin 90^\circ) = 9.3 \times 10^{-26} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

c) El trabajo efectuado al girar el dipolo de  $\theta_0 = 180^\circ$  o  $\theta = 0^\circ$  está dado por la ecuación 26-29,

$$W = pE(\cos \theta - \cos \theta_0) = pE(\cos 0^\circ - \cos 180^\circ) = 2pE = (2)(6.2 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})(1.5 \times 10^4 \text{ N/C}) = 1.9 \times 10^{-25} \text{ J}.$$

En cambio, la contribución translacional promedio a la energía interna ( $=\frac{3}{2}kT$ ) de una molécula a temperatura ambiente es  $6.2 \times 10^{-21} \text{ J}$ , que es 33,000 veces mayor. En las condiciones del problema, la agitación térmica eliminaría la tendencia de los dipolos a alinearse con el campo. En otras palabras, si tuviésemos un grupo de moléculas a temperatura ambiente con momentos dipolares orientados al azar, a causa de la intensidad de la energía interna la aplicación de un cam-

po eléctrico de tal magnitud influiría muy poco en la alineación de los momentos dipolares. Si queremos alinear los dipolos, hay que utilizar campos mucho más fuertes, temperaturas mucho más bajas o ambas cosas.

## 26-8 EL MODELO NUCLEAR DEL ÁTOMO (opcional)

Hoy sabemos que el átomo está formado por un núcleo diminuto que transporta una carga positiva  $Ze$ , donde  $Z$  es el número atómico. El núcleo está rodeado por un volumen mucho más grande que contiene  $Z$  electrones, todos los cuales llevan una carga de  $-e$ , de modo que en general el átomo es neutro. Sabemos asimismo que el núcleo contiene gran parte (casi siempre mayor que 99.995%) de la masa del átomo.

En los primeros años del siglo xx los datos anteriores no se conocían y se especulaba sobre la estructura del átomo y, en especial sobre la distribución de su carga positiva. Según una teoría de gran aceptación en aquel tiempo, la carga positiva se distribuye más o menos uniformemente en todo el volumen esférico del átomo. Este modelo de la estructura del átomo se conoce como *modelo de Thomson* en honor de J. J. Thomson, quien lo propuso. (Thomson fue el primero en medir la razón de carga a masa del electrón; de ahí que se reconociera como el descubridor del electrón.) También se le llama modelo "budín de ciruelas" porque los electrones se adhieren a la esfera difusa de carga positiva a manera de pasas en este tipo de budín.

Una manera de probar el modelo consiste en determinar el campo eléctrico del átomo, sondeándolo con un haz de proyectiles de carga positiva que pasan cerca de él. El campo eléctrico del átomo desvía o *dispersa* las partículas del haz. En esta exposición vamos a analizar exclusivamente el efecto que la esfera de carga positiva tiene en el proyectil. Suponemos que éste es mucho *menos* masivo que el átomo y mucho *más* masivo que un electrón. De este modo los electrones producen un efecto despreciable en la dispersión del proyectil y puede suponerse que el átomo permanece en reposo mientras se desvía al proyectil.

Podemos estimar la deflexión de un átomo en el modelo de Thomson, en el cual una carga positiva se distribuye uniformemente en todo su volumen. En la ecuación 26-6 se indicó el campo eléctrico producido por una esfera uniforme de carga positiva en el caso de los puntos fuera de la esfera y en la ecuación 26-24 en el caso de los puntos del interior. Calculemos ahora el campo eléctrico en la superficie, el cual, como se aprecia en la figura 26-8, es el *más grande* posible que esta distribución puede producir. Consideramos un átomo pesado como el del oro, que tiene una carga positiva  $Q$  de  $79e$  y un radio  $R$  de unos  $1.0 \times 10^{-10}$  m. Prescindiendo de los electrones, el campo eléctrico en  $r = R$  debido a las cargas positivas es

$$E_{\text{máx}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = 1.1 \times 10^{13} \text{ N/C.}$$

Para los proyectiles de nuestro experimento, usaremos un haz de partículas alfa, que tiene una carga positiva  $q$  de  $2e$  y una masa  $m$  de  $6.6 \times 10^{-27}$  kg. Las partículas alfa son núcleos de átomos de helio, que se emiten en algunos procesos de decaimiento radiactivo. Una energía cinética típica de ellos podría ser de unos  $K = 6 \text{ MeV}$  o  $9.6 \times 10^{-13} \text{ J}$ . A esta energía es fácil verificar que la partícula tiene una velocidad aproximada de  $1.7 \times 10^7 \text{ m/s}$ .

Supongamos que la partícula pasa cerca de la superficie de los átomos, donde experimenta el máximo campo eléctrico que este átomo puede ejercer. La fuerza correspondiente que opera sobre la partícula es

$$F = qE_{\text{máx}} = 3.5 \times 10^{-6} \text{ N.}$$

La figura 26-21 es un diagrama esquemático del experimento de dispersión. El cálculo real de la deflexión es bastante complicado, pero podemos efectuar algunas aproximaciones que lo simplifiquen y permitan estimar la deflexión máxima. Supongamos que la fuerza anterior es constante y que actúa sólo durante el tiempo  $\Delta t$  que el proyectil tarda en recorrer una distancia igual a un diámetro del átomo, como se advierte en la figura 26-21. Este intervalo de tiempo es

$$\Delta t = \frac{2R}{v} = 1.2 \times 10^{-17} \text{ s.}$$

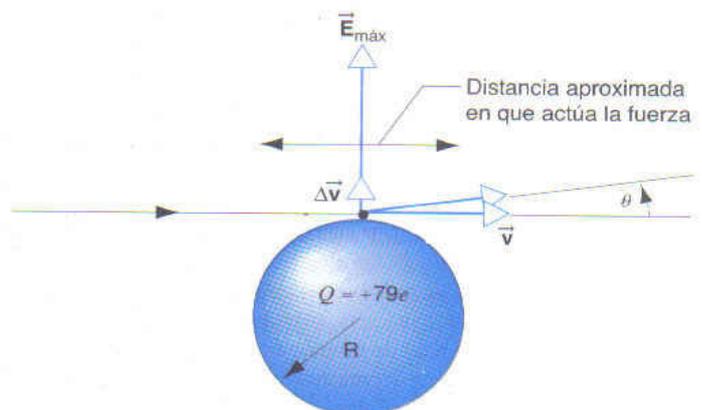
La fuerza imprime a la partícula una aceleración transversal  $a$ , la cual le produce una velocidad transversal  $\Delta v$  dada por

$$\Delta v = a \Delta t = \frac{F}{m} \Delta t = 6.4 \times 10^3 \text{ m/s.}$$

La partícula se desviará un ángulo pequeño  $\theta$  que puede estimarse en alrededor de

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\Delta v}{v} = 0.02^\circ.$$

En 1911 este tipo de experimento de dispersión lo realizaron por primera vez Ernest Rutherford y sus colaboradores



**FIGURA 26-21.** La dispersión de un proyectil con carga positiva que pasa cerca de la superficie de un átomo, representado por una esfera uniforme de carga positiva. El campo eléctrico causa al proyectil una deflexión transversal por un ángulo  $\theta$ .

en la Universidad de Manchester (Inglaterra). Pasaron un haz de partículas alfa por una delgada hoja de oro y calcularon la probabilidad relativa de que se dispersaran en varios ángulos  $\theta$  en relación con su dirección original. Por supuesto no podían controlar cómo atravesaban un átomo en particular; de hecho, en vez de rozar el borde, casi todas cruzaban el volumen del átomo de la figura 26-21 y (según el modelo de Thomson) se desviaban menos del ángulo máximo que hemos calculado.

Los resultados demostraron que aunque casi todas las partículas alfa se desviaban en ángulos de unas cuantas centésimas de grado, un número pequeño (quizá 1 en  $10^4$ ) se desviaba en ángulos mayores que  $90^\circ$ . Tal resultado contradice totalmente el modelo de Thomson, e hizo a Rutherford comentar: "Fue el acontecimiento más increíble que me ha ocurrido en toda la vida. Casi tan increíble como si disparáramos una bala de 15 pulgadas contra un trozo de papel y rebotara para golpearnos".

Basándose en este tipo de experimentos de dispersión, Rutherford concluyó que la carga positiva de un átomo *no* se distribuía a través de una esfera del mismo tamaño que el átomo, sino que se concentraba en una región diminuta (el *núcleo*) cerca de su centro. En el caso de un átomo de oro, el núcleo tiene un radio de unos  $7 \times 10^{-15}$  m (7 fm), aproximadamente  $10^{-4}$  menor que el radio del átomo. Es decir, el núcleo ocupa un volumen apenas  $10^{-12}$  del total del átomo.

Calculemos el campo eléctrico máximo y la fuerza correspondiente ejercida sobre una partícula alfa que pasa cerca de la superficie del núcleo. Si lo consideramos una bola esférica de carga uniforme  $Q = 79e$  y de radio  $R = 7$  fm, el campo eléctrico máximo es

$$E_{\text{máx}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = 2.3 \times 10^{21} \text{ N/C.}$$

La cifra anterior equivale a una magnitud de más de ocho órdenes mayor que el campo eléctrico que operaría sobre una partícula en la superficie de un átomo del modelo de budín de ciruelas. La fuerza correspondiente es

$$F = qE_{\text{máx}} = 740 \text{ N.}$$

¡Esta es una fuerza enorme! Realicemos la misma simplificación que hicimos en el cálculo anterior y supongamos que la fuerza es constante y que actúa sobre la partícula sólo durante el tiempo  $\Delta t$  que la partícula tarda en recorrer una distancia igual a un diámetro nuclear:

$$\Delta t = \frac{2R}{v} = 8.2 \times 10^{-22} \text{ s.}$$

Puede estimarse que el cambio correspondiente de velocidad de la partícula es

$$\Delta v = a \Delta t = \frac{F}{m} \Delta t = 9 \times 10^7 \text{ m/s.}$$

La magnitud anterior es semejante a la velocidad. Concluimos que un átomo nuclear puede producir un campo eléctrico suficientemente grande para invertir el movimiento del proyectil.

Basándose en el modelo nuclear del átomo, Rutherford logró obtener una fórmula exacta del número de partículas esparcidas en un ángulo cualquiera; los experimentos revelaron una coincidencia perfecta con esta fórmula. También pudo utilizarla para determinar el número atómico  $Z$  de los átomos blanco. Más aún, si se usan partículas de mayor energía que penetran en el núcleo (Prob. res. 25-7), el método sirve además para determinar el radio nuclear.

Esta serie clásica y laboriosa de experimentos, así como su interpretación tan brillante, sentaron las bases de la física atómica y nuclear modernas; a Rutherford se le conoce generalmente como el fundador de estas disciplinas. ■

## OPCIÓN MÚLTIPLE

### 26-1 ¿Qué es un campo?

#### 26-2 Campo eléctrico

1. El campo eléctrico se define en la ecuación 26-3 en función de  $q_0$ , una carga *positiva* pequeña. Si en cambio la definición se hiciera en función de una carga *negativa* pequeña de la misma magnitud, en comparación con el campo *original* recién definido

- A) apuntaría en la misma dirección y tendría la misma magnitud.
- B) apuntaría en dirección opuesta pero tendría la misma magnitud.
- C) apuntaría en la misma dirección pero tendría una magnitud distinta.
- D) apuntaría en dirección opuesta y tendría una magnitud distinta.

### 26-3 Campo eléctrico de cargas puntuales

2. Una carga puntual  $+q$  se halla en el origen y otra  $+2q$  está en  $x = a$ , donde  $a$  es positiva.

a) ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

- A) Cerca de las cargas, el campo eléctrico puede ser cero fuera del eje  $x$ .
- B) Cerca de las cargas, la magnitud del campo eléctrico puede ser máxima fuera del eje  $x$ .
- C) El campo eléctrico puede ser cero en alguna parte entre las cargas.
- D) El campo eléctrico puede ser cero en el eje  $x$  en los puntos finitos no situados entre las cargas.

b) ¿En cuál de las siguientes regiones pudiera existir un punto donde el campo eléctrico fuera cero?

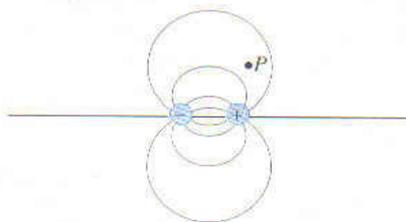
- A)  $-\infty < x < 0$       B)  $0 < x < a$   
 C)  $a < x < \infty$   
 D)  $E$  no desaparece en la región  $-\infty < x < \infty$ .
3. Una carga puntual  $+q$  se encuentra en el origen y otra  $-2q$  está en  $x = a$ , donde  $a$  es positiva.
- a) ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?
- A) Cerca de las cargas, el campo eléctrico puede ser cero fuera del eje  $x$ .  
 B) Cerca de las cargas, la magnitud del campo eléctrico puede alcanzar su máximo fuera del eje  $x$ .  
 C) El campo eléctrico puede ser cero entre las cargas.  
 D) El campo eléctrico puede ser cero a lo largo del eje  $x$  en los puntos finitos, pero no entre las cargas.
- b) ¿En cuál de las siguientes regiones pudiera existir un punto donde el campo eléctrico es cero?
- A)  $-\infty < x < 0$       B)  $0 < x < a$   
 C)  $a < x < \infty$   
 D)  $E$  no desaparece en la región  $-\infty < x < \infty$ .

### 26-4 Campo eléctrico de distribuciones continuas de carga

4. Considere la magnitud del campo eléctrico  $E(z)$  en el eje de un anillo con carga uniforme.
- a)  $E(z)$  tendrá su máximo valor cuando
- A)  $z = 0$ .      B)  $0 < |z| < \infty$ .  
 C)  $|z| = \infty$ .      D) A) y C) son correctas.
- b)  $E(z)$  puede ser cero cuando
- A)  $z = 0$ .      B)  $0 < |z| < \infty$ .  
 C)  $|z| = \infty$ .      D) A) y C) son correctas.
5. Considere la magnitud del campo eléctrico  $E(z)$  en el eje de un disco con carga uniforme.
- a)  $E(z)$  tendrá su valor máximo cuando
- A)  $z = 0$ .      B)  $0 < |z| < \infty$ .  
 C)  $|z| = \infty$ .      D) A) y C) son correctas.
- b)  $E(z)$  puede ser cero cuando
- A)  $z = 0$ .      B)  $0 < |z| < \infty$ .  
 C)  $|z| = \infty$ .      D) A) y C) son correctas.

### 26-5 Las líneas del campo eléctrico

6. En la figura 26-22 se muestran las líneas del campo eléctrico alrededor de un dipolo eléctrico. ¿Cuál de las flechas representan mejor el campo eléctrico en el punto  $P$ ?



- A)      B)      C)      D)      E)

FIGURA 26-22. Pregunta de opción múltiple 6.

7. La figura 26-23 muestra las líneas del campo eléctrico alrededor de tres cargas puntuales, A, B y C. a) ¿Cuáles cargas son posi-

vas? b) ¿Cuál tiene la máxima magnitud? c) ¿En cuál región o regiones de la figura pudiera ser cero el campo eléctrico?

- A) cerca de A.      B) cerca de B.  
 C) cerca de C.      D) en ninguna parte.

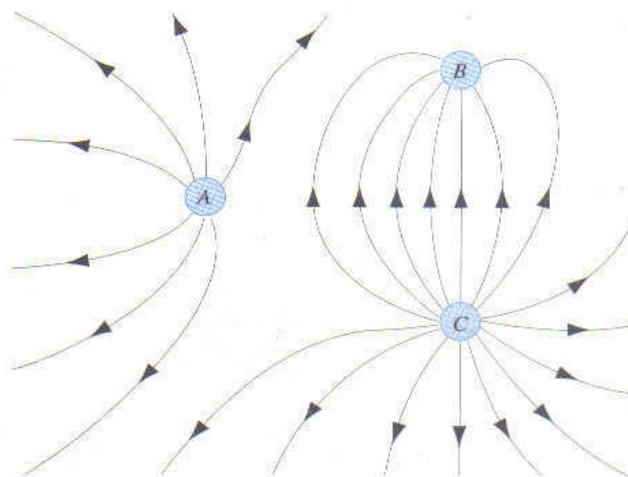


FIGURA 26-23. Pregunta de opción múltiple 7.

### 26-6 Una carga puntual en un campo eléctrico

8. Tres esferas pequeñas  $x$ ,  $y$  y  $z$  transportan cargas de igual magnitud y con los signos que aparecen en la figura 26-24. Están en los vértices de un triángulo isósceles; la distancia entre  $x$  y  $y$  es igual a la existente entre  $x$  y  $z$ . Se mantiene en su sitio a las esferas  $y$  y  $z$ , pero la esfera  $x$  puede desplazarse libremente en una superficie sin fricción.
- a) ¿Qué dirección sigue la fuerza eléctrica en la esfera  $x$  en el punto que se ve en la figura?
- b) ¿Qué trayectoria adoptará la esfera  $x$  cuando la suelten?

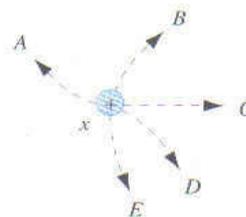


FIGURA 26-24. Pregunta de opción múltiple 8.

9. Un electrón se halla en un campo eléctrico *uniforme*, creado entre placas paralelas cargadas positiva y negativa. ¿Cuándo experimentará la mayor fuerza electrostática?
- A) Cuando esté más cerca de la placa positiva.  
 B) Cuando esté más cerca de la placa negativa.  
 C) Cuando esté en la mitad de las placas.  
 D) El electrón experimenta la misma fuerza sin importar su ubicación entre las placas.

10. Se tomaron las siguientes mediciones de la carga (en unidades de  $10^{-19}$  C) en una serie de gotas cargadas. ¿Cuál es la mayor unidad fundamental posible de la carga que puede deducirse de esos datos?

48	19.2	28.8
9.6	38.4	24

- A)  $1.6 \times 10^{-19}$  C      B)  $4.8 \times 10^{-19}$  C  
 C)  $9.6 \times 10^{-19}$  C      D)  $48 \times 10^{-19}$  C

**26-7 Dipolo en un campo eléctrico**

11. El campo eléctrico en cierta región del espacio obedece  $E_y \neq 0$ ,  $E_x = E_z = 0$  y  $\partial \vec{E} / \partial x \neq 0$ ,  $\partial \vec{E} / \partial y = \partial \vec{E} / \partial z = 0$ .

- a) En este campo la fuerza neta en un dipolo eléctrico orientado paralelamente al eje  $x$   
 A) se dirige a lo largo del eje  $x$ .  
 B) se dirige a lo largo del eje  $y$ .  
 C) se dirige a lo largo del eje  $z$ .  
 D) ninguna de las posibilidades anteriores.  
 b) En este campo el par de torsión neto en un dipolo eléctrico paralelo al eje  $x$   
 A) se dirige a lo largo del eje  $x$ .  
 B) se dirige a lo largo del eje  $y$ .  
 C) se dirige a lo largo del eje  $z$ .  
 D) ninguna de las posibilidades anteriores.

**26-8 El modelo nuclear del átomo**

**PREGUNTAS**

- Mencione el mayor número posible de campos escalares y vectoriales.
- a) En la atracción gravitacional entre la Tierra y una piedra, ¿podemos decir que aquélla se halla en el campo gravitacional de ésta? b) ¿Qué relación hay entre el campo gravitacional producido por la piedra y por la Tierra?
- Una bola con carga positiva cuelga de un largo hilo de seda. Queremos medir la fuerza  $E$  en un punto del mismo plano horizontal de la carga suspendida. Para ello hemos colocado una carga  $q_0$  en el punto y medimos  $F/q_0$ . ¿Será  $F/q_0$  menor, igual o mayor que  $E$  en el punto en cuestión?
- Al explorar los campos eléctricos con una carga de prueba, para facilitar la exposición supusimos a menudo que era positiva. ¿Influye esto al momento de determinar el campo? Explique esto con un caso imaginario simple.
- Las líneas del campo eléctrico nunca se cruzan. ¿Por qué?
- En la figura 26-13, ¿por qué las líneas de campo alrededor del borde de la figura, al ser extendidas hacia atrás, dan la impresión de irradiar uniformemente del centro de la figura?
- Una carga puntual se desplaza a través de un campo eléctrico en ángulo recto con las líneas de campo. ¿Actúa alguna fuerza sobre ella?
- En la figura 26-14, ¿por qué las semillas de pasto se alinean con las líneas del campo eléctrico? En condiciones normales no transportan carga eléctrica. (Consulte "Demonstration of the Electric Fields of Current-Carrying Conductors" de O. Jefimenko, *American Journal of Physics*, enero de 1962, p. 19.)
- ¿Cuál es el origen del "pegado estático", un fenómeno que a veces se presenta en la ropa que se saca del secador?
- Una distancia  $d$  separa dos cargas puntuales de magnitud y signo desconocidos. En la línea que las une, el campo eléctrico es cero en un punto entre ellas. ¿Qué conclusión puede extraerse acerca de las cargas?
- Separamos por una distancia  $d$  dos cargas puntuales de magnitud y signo desconocidos a) Si es posible tener  $E = 0$  en cualquier punto no entre las cargas sino en la línea que las une, ¿qué condiciones se requieren y dónde se localiza el punto? b) En un arreglo cualquiera de dos cargas puntuales es posible encontrar dos puntos (ninguno en el infinito) donde  $E = 0$ . De ser así, ¿En qué circunstancias?
- Dos cargas puntuales de magnitud y signo desconocidos se encuentran fijas a una distancia  $d$ . ¿Podemos tener  $E = 0$  en

- los puntos fuera del eje (sin incluir el infinito)? Explique su respuesta.
- En el problema resuelto 26-3, una carga colocada en el punto  $P$  de la figura 26-4 está en equilibrio, porque ninguna fuerza opera sobre ella. ¿Es estable el equilibrio a) en los desplazamientos a lo largo de la línea que las une y b) en los que forman ángulo recto con esta línea?
  - En la figura 26-12, la fuerza en la carga inferior apunta hacia arriba y es finita. No obstante, el apiñamiento de las líneas de campo indica que  $E$  es infinitamente grande en el sitio de la carga (puntual). Una carga inmersa en un campo infinitamente grande debería recibir sobre ella una fuerza también infinitamente grande. ¿Cómo se resuelve este dilema?
  - Liberamos del reposo una carga puntual  $q$  de masa  $m$  en un campo no uniforme. a) ¿Seguirá necesariamente la línea del campo eléctrico que pasa por el punto liberado? b) ¿En qué circunstancias, si las hay, seguirá una partícula cargada las líneas del campo eléctrico?
  - Una carga positiva y otra negativa de la misma magnitud se hallan en una larga línea recta. ¿Qué dirección sigue  $\vec{E}$  en los puntos de esta línea que se encuentran a) entre las cargas positivas, b) fuera de las cargas en dirección de la carga positiva, c) fuera de las cargas en dirección de la carga negativa y d) fuera de la línea, pero en el plano mediano de las cargas?
  - En el plano mediano de un dipolo eléctrico, ¿es el campo eléctrico paralelo o antiparalelo al momento dipolar eléctrico  $\vec{p}$ ?
  - ¿En qué forma la ecuación 26-12 no logra representar las líneas del campo de la figura 26-12, si atenúamos el requisito de que  $x \gg d$ ?
  - a) Se colocan dos dipolos eléctricos idénticos en una línea recta como se ve en la figura 26-25a. ¿Qué dirección de la fuerza eléctrica de un dipolo se debe a la presencia del otro? b) Suponga que los dipolos se reordenan como en la figura 26-25b. ¿Cuál es ahora la dirección de la fuerza?



FIGURA 26-25. Pregunta 19.

20. Compare la forma en que  $E$  varía con  $r$  en a) una carga puntual, b) en un dipolo y c) en un cuadrupolo.
21. ¿Qué problemas matemáticos encontraría usted si tuviera que calcular el campo eléctrico de un anillo (o disco) cargado en puntos fuera del eje?
22. La ecuación 26-20 muestra que  $E_z$  tiene el mismo valor en todos los puntos frente a una hoja infinita con carga. ¿Es razonable esto? Uno podría pensar que el campo debería ser más fuerte cerca de la hoja, dado que las cargas no están muy cercanas.
23. Con sus propias palabras describa el propósito del experimento de las gotas de aceite de Millikan.
24. ¿De qué manera el signo de la carga en la gota de aceite afecta a la realización del experimento de Millikan?
25. ¿Por qué Millikan no intentó balancear los electrones en su aparato en vez de las gotas de aceite?
26. En un campo eléctrico uniforme giramos un dipolo extremo por extremo. ¿Por qué el trabajo que realizamos depende de la orientación inicial del dipolo respecto al campo?
27. ¿En qué orientaciones de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme es la energía potencial del dipolo a) máxima y b) mínima?
28. Se coloca un dipolo eléctrico en un campo eléctrico no uniforme. ¿Tiene una fuerza eléctrica neta?
29. Se coloca en reposo un dipolo eléctrico dentro de un campo eléctrico externo uniforme, como el de la figura 26-19a; después se le libera. Explique su movimiento.
30. Un dipolo eléctrico tiene su momento dipolar  $\vec{p}$  alineado con un campo eléctrico externo uniforme  $\vec{E}$ . a) ¿Es estable o inestable el equilibrio? b) Explique la naturaleza del equilibrio si  $\vec{p}$  y  $\vec{E}$  apuntan en dirección contraria.
31. En condiciones normales un átomo es neutro desde el punto de vista eléctrico. ¿Por qué entonces debería una partícula alfa ser desviada por un átomo en cualquier circunstancia?

## EJERCICIOS

### 26-1 ¿Qué es un campo?

#### 26-2 Campo eléctrico

1. Un campo eléctrico acelera un electrón hacia el este a  $1.84 \times 10^9 \text{ m/s}^2$ . Determine la magnitud y la dirección del campo.
2. El aire húmedo se divide (sus moléculas se ionizan) en un campo eléctrico de  $3.0 \times 10^6 \text{ N/C}$ . ¿Qué magnitud tiene la fuerza eléctrica en a) un electrón y b) en un ion (con un solo electrón faltante) en este campo?
3. Una partícula alfa, el núcleo de un átomo de helio, tiene una masa de  $6.64 \times 10^{-27} \text{ kg}$  y una carga de  $+2e$ . ¿Qué magnitud y dirección del campo eléctrico balancearán su peso?
4. En un campo eléctrico uniforme cerca de la superficie terrestre, una fuerza eléctrica de  $3.0 \times 10^{-6} \text{ N}$  hacia abajo actúa sobre una partícula con una carga de  $-2.0 \times 10^{-9} \text{ C}$ . a) Determine el campo eléctrico. b) ¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza eléctrica ejercida sobre un protón puesto en este campo? c) ¿Cuál es la fuerza gravitacional ejercida sobre el protón? d) ¿Cuál es la razón de la fuerza eléctrica a la gravitacional en este caso?

#### 26-3 Campo eléctrico de cargas puntuales

5. ¿Qué magnitud tiene una carga puntual elegida de modo que el campo eléctrico a 75.0 cm de distancia posea la magnitud 2.30 N/C?
6. Calcule el momento dipolar de un electrón y de un protón separados por una distancia de 4.30 nm.
7. Calcule la magnitud del campo eléctrico generado por un dipolo eléctrico, cuyo momento dipolar es  $3.56 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$ , en un punto situado a 25.4 nm a lo largo del eje bisectorial.
8. Determine el campo eléctrico en el centro del cuadrado de la figura 26-26. Suponga que  $q = 11.8 \text{ nC}$  y que  $a = 5.20 \text{ cm}$ .
9. La carátula de un reloj tiene las cargas puntuales negativas  $-q, -2q, -3q, \dots, -12q$  fijadas en las posiciones de los numerales correspondientes. Las manecillas no perturban el campo. ¿A qué hora el horario apuntará en la misma dirección que el campo eléctrico en el centro de la carátula? (Sugerencia: suponga cargas diametralmente opuestas.)

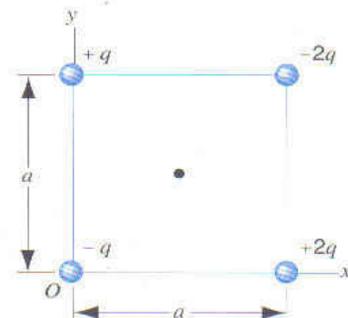


FIGURA 26-26. Ejercicio 8.

10. En la figura 26-5 suponga que ambas cargas son positivas. Demuestre que, suponiendo  $x \gg d$ , la magnitud de  $E$  en el punto  $P$  está dada por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{x^2}$$

11. Un tipo de cuadrupolo eléctrico se compone de cuatro cargas ubicadas en los vértices de un cuadrado de lado  $2a$ . El punto  $P$  está a una distancia  $x$  del centro del cuadrupolo en una línea paralela a ambos lados del cuadrado, según se aprecia en la figura 26-27. Cuando  $x \gg a$ , demuestre que el campo eléctrico en  $P$  está dado aproximadamente por

$$E = \frac{3(2qa^2)}{2\pi\epsilon_0 x^4}$$

(Sugerencia: trata el cuadrupolo como dos dipolos.)

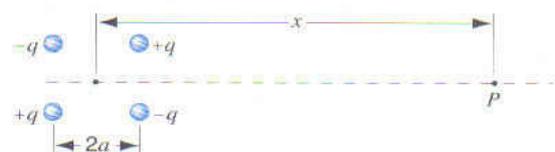


FIGURA 26-27. Ejercicio 11.

### 26-4 Campo eléctrico de distribuciones continuas de carga

12. Demuestre que, en el campo eléctrico de un disco cargado de radio  $R$  en puntos a lo largo de su eje, la ecuación 26-19 se reduce a una carga puntual cuando  $z \gg R$ .
13. ¿A qué distancia en el eje de un disco cargado de radio  $R$  es la magnitud del campo eléctrico igual a la mitad del valor del campo en la superficie del disco en el centro?
14. ¿A qué distancia en el eje de un anillo cargado de radio  $R$  alcanza su máximo la magnitud axial del campo eléctrico?
15. a) ¿Qué carga total  $q$  debe transportar un disco de radio 2.50 cm, para que el campo eléctrico de su superficie en el centro sea igual al valor que tiene el aire cuando se divide eléctricamente y produce chispas? (Tabla 26-1). b) Suponga que los átomos de una superficie tienen un área transversal efectiva de  $0.015 \text{ nm}^2$ . ¿Cuántos átomos se encuentran en la superficie del disco? c) La carga en a) proviene de algunos de los átomos superficiales que portan un electrón en exceso. ¿Qué fracción de ellos ha de tener esta carga?
16. Se dobla una delgada varilla de vidrio en un semicírculo de radio  $r$ . Una carga  $+q$  se distribuye uniformemente en la mitad superior, y una carga  $-q$  se distribuye uniformemente en la mitad inferior, como se observa en la figura 26-28. Calcule el campo eléctrico  $\vec{E}$  en  $P$ , el centro del semicírculo.



FIGURA 26-28. Ejercicio 16.

17. En el cuadro anexo se incluyen los valores medidos del campo eléctrico  $E$  situado a una distancia  $z$  en el eje de un disco de plástico cargado:

$z$ (cm)	$E$ ( $10^7$ N/C)
0	2.043
1	1.732
2	1.442
3	1.187
4	0.972
5	0.797

Calcule a) el radio del disco y b) la carga en él.

18. Una varilla aislante de longitud  $L$  tiene una carga  $-q$  uniformemente distribuida a lo largo de su longitud, como se muestra en la figura 26-29. a) ¿Qué densidad de carga lineal tiene la varilla? b) ¿Determine el campo eléctrico en el punto  $P$  situado a una distancia  $a$  del extremo de ella. c) Si  $P$  estuviera mucho más lejos de la varilla que  $L$ , ésta parecería una carga puntual. Demuestre que su respuesta a b) se reduce al campo eléctrico de una carga puntual  $a \gg L$ .



FIGURA 26-29. Ejercicio 18.

19. Bosqueje cualitativamente las líneas del campo asociadas a tres largas líneas paralelas de carga en un plano perpendicular. Suponga que las intersecciones de las líneas de carga con este plano forman un triángulo equilátero (Fig. 26-30) y que las líneas de carga tienen la misma densidad de carga lineal  $\lambda$ .

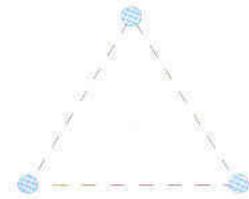


FIGURA 26-30. Ejercicio 19.

### 26-5 Las líneas del campo eléctrico

20. La figura 26-31 muestra las líneas del campo de un campo eléctrico; el espaciamiento entre ellas, perpendicular a la página, es igual en todas partes. a) Si la magnitud del campo en  $A$  es  $40 \text{ N/C}$ , ¿qué fuerza experimenta un electrón allí? b) ¿Qué magnitud tiene el campo en  $B$ ?

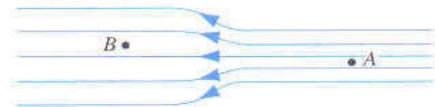


FIGURA 26-31. Ejercicio 20.

21. Bosqueje cualitativamente las líneas de campo asociadas a un disco delgado, circular y cargado uniformemente de radio  $R$ . (Sugerencia: suponga como casos límite los puntos muy cercanos al disco, donde el campo eléctrico es perpendicular a la superficie, y los muy lejanos de él, donde se parece al campo de una carga eléctrica puntual.)
22. Bosqueje cualitativamente las líneas de campo asociadas a dos cargas puntuales separadas  $+q$  y  $-2q$ .
23. Tres cargas están dispuestas en un triángulo equilátero como en la figura 26-32. Considere las líneas de campo debidas a  $+Q$  y a  $-Q$ ; a partir de ellas identifique la dirección de la fuerza que opera sobre  $+q$  por la presencia de las otras dos cargas. (Sugerencia: vea la figura 26-12.)

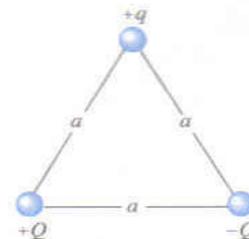


FIGURA 26-32. Ejercicio 23.

24. a) En la figura 26-33, localice el punto (o puntos) donde el campo eléctrico es cero. b) Bosquee cualitativamente las líneas de campo.



FIGURA 26-33. Ejercicio 24.

25. En el eje  $x$  dos cargas puntuales están fijas y separadas por una distancia  $d$  (Fig. 26-34). Grafique  $E_x(x)$  suponiendo que  $x = 0$  en la carga de la izquierda. Incluya valores positivos y negativos de  $x$ . Grafique  $E_x$  como positivo si  $\vec{E}$  apunta hacia la derecha y como negativo si apunta a la izquierda. Suponga que  $q_1 = +1.0 \times 10^{-6} \text{ C}$ ,  $q_2 = +3.0 \times 10^{-6} \text{ C}$  y  $d = 10 \text{ cm}$ .

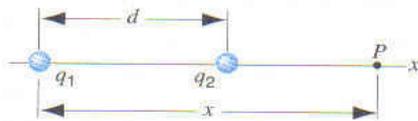


FIGURA 26-34. Ejercicio 25.

26. Las cargas  $+q$  y  $-2q$  están fijas y separadas a una distancia  $d$  como se ve en la figura 26-35. a) Encuentre  $\vec{E}$  en los puntos A, B y C. b) Bosquee aproximadamente las líneas del campo eléctrico.

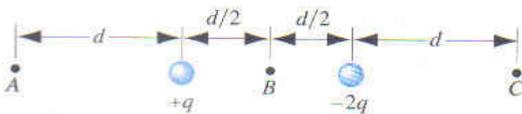


FIGURA 26-35. Ejercicio 26.

### 26-6 Una carga puntual en un campo eléctrico

27. Un electrón que se desplaza con una velocidad  $4.86 \times 10^6 \text{ m/s}$  se dispara paralelamente a un campo eléctrico uniforme de magnitud  $1030 \text{ N/C}$ , dispuesto de modo que retrase el movimiento. a) ¿Qué distancia recorrerá el electrón en el campo antes de detenerse (momentáneamente) y b) cuánto tiempo transcurrirá? c) Si el campo eléctrico termina de modo abrupto al cabo de  $7.88 \text{ mm}$ , ¿qué fracción de su energía cinética perderá el electrón al atravesarlo?
28. Un arma, considerada en la defensa antimisiles, utiliza haces de partículas. Por ejemplo, un haz de protones que golpea un misil enemigo podría anularla por completo. Los haces pueden producirse en "armas" que se sirven de campos eléctricos para acelerar las partículas cargadas. a) ¿Qué aceleración experimentará un protón si el campo eléctrico es  $2.16 \times 10^4 \text{ N/C}$ ? b) ¿Qué velocidad alcanzará el protón si el campo actúa en una distancia de  $1.22 \text{ cm}$ ?
29. Se mantienen a una distancia de  $15.2 \text{ cm}$  dos cargas iguales y opuestas de magnitud  $1.88 \times 10^{-7} \text{ C}$ . a) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de  $\vec{E}$  en un punto intermedio entre las cargas? b) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) operaría en un electrón puesto allí?
30. Un campo eléctrico uniforme existe en una región entre dos placas con carga contraria. Se libera del reposo un electrón en la

superficie de una placa de carga negativa y  $14.7 \text{ ns}$  más tarde golpea la superficie de la placa contraria, a  $1.95 \text{ cm}$  de distancia. a) ¿Qué velocidad lleva el electrón al chocar contra la segunda placa? b) ¿Qué magnitud tiene el campo eléctrico?

31. En el experimento de Millikan, se balancea una gota de radio  $1.64 \mu\text{m}$  y de una densidad  $0.851 \text{ g/cm}^3$  cuando se aplica un campo eléctrico de  $1.92 \times 10^5 \text{ N/C}$ . Calcule la carga en la gota en términos de  $e$ .
32. Una distancia de  $11.7 \text{ cm}$  separa dos cargas puntuales de magnitud  $q_1 = 2.16 \mu\text{C}$  y  $q_2 = 85.3 \text{ nC}$ . a) Obtenga la magnitud del campo eléctrico que una produce en el sitio de la otra. b) Obtenga la magnitud de la fuerza en ellas.
33. En una de las primeras sesiones (1911), Millikan observó que las siguientes cargas medidas, entre otras, aparecían en varios momentos en un sola gota:

$6.563 \times 10^{-19} \text{ C}$	$13.13 \times 10^{-19} \text{ C}$	$19.71 \times 10^{-19} \text{ C}$
$8.204 \times 10^{-19} \text{ C}$	$16.48 \times 10^{-19} \text{ C}$	$22.89 \times 10^{-19} \text{ C}$
$11.50 \times 10^{-19} \text{ C}$	$18.08 \times 10^{-19} \text{ C}$	$26.13 \times 10^{-19} \text{ C}$

¿Qué valor del cuanto de la carga  $e$  puede deducirse de los datos anteriores?

34. Un campo uniforme vertical  $\vec{E}$  se crea en el espacio entre dos grandes placas paralelas. En el campo una pequeña esfera conductora de masa  $m$  se suspende de una cuerda de longitud  $L$ . Determine el periodo del péndulo cuando a la esfera se le coloca una carga  $+q$  si la placa inferior a) tiene carga positiva y b) si tiene carga negativa.
35. En el problema resuelto 26-6 encuentre la deflexión total de la gota de tinta al chocar contra el papel a  $6.8 \text{ mm}$  del extremo de las placas de deflexión (Fig. 26-16).

### 26-7 Dipolo en un campo eléctrico

36. Un dipolo, compuesto por cargas de  $1.48 \text{ nC}$  y a una distancia de  $6.23 \mu\text{m}$ , está en un campo eléctrico de magnitud  $1100 \text{ N/C}$ . a) ¿Qué magnitud tiene el momento del dipolo eléctrico? b) ¿Qué diferencia hay entre la energía potencial correspondiente a las orientaciones dipolares paralelas y a las antiparalelas del campo?
37. Un dipolo consta de las cargas  $+2e$  y  $-2e$  separadas por  $0.78 \text{ nm}$ . Se halla en un campo eléctrico de magnitud  $3.4 \times 10^6 \text{ N/C}$ . Calcule la magnitud del par de torsión en el dipolo cuando el momento dipolar es a) paralelo, b) en ángulo recto y c) opuesto al campo eléctrico.
38. Una carga  $q = 3.16 \mu\text{C}$  se halla a  $28.5 \text{ cm}$  de un pequeño dipolo en el bisector perpendicular. La fuerza en la carga es  $5.22 \times 10^{-16} \text{ N}$ . Demuestre en un diagrama a) la dirección de la fuerza en la carga y b) su dirección en el dipolo. Determine c) la magnitud de la fuerza en el dipolo y d) el momento dipolar del dipolo.

### 26-8 El modelo nuclear del átomo

39. En un trabajo publicado en 1911, Ernest Rutherford señalaba, a fin de hacerse una idea de las fuerzas necesarias para desviar una partícula alfa a través de un gran ángulo: consideremos un átomo que contenga una carga puntual positiva  $Ze$  en su centro y que esté rodeado de una distribución de electricidad negativa,  $-Ze$  distribuida uniformemente en una esfera de radio  $R$ . El campo eléctrico  $E \dots$  a una distancia  $r$  del centro en un punto dentro del átomo (es)

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right).$$

Verifique la ecuación anterior.

4. La figura 26-36 muestra un modelo del átomo de helio, propuesto por Thomson ( $Z = 2$ ). Dos electrones en reposo están incorporados en el interior de una esfera uniforme de carga positiva  $2e$ . Calcule la distancia  $d$  entre los electrones de modo que la configuración presente equilibrio estático.

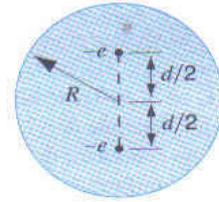


FIGURA 26-36. Ejercicio 40.

## P ROBLEMAS

1. En la figura 26-5 considere un punto a una distancia  $z$  del centro de un dipolo a lo largo del eje. a) Demuestre que, con valores grandes de  $z$ , la magnitud del campo eléctrico está dada por

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}$$

(Compare lo anterior con el campo en un punto del bisector perpendicular.) b) ¿Qué dirección sigue  $\vec{E}$ ?

2. Demuestre que en puntos lejanos los componentes de  $\vec{E}$  debidos al dipolo están dados por

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pxz}{(x^2 + z^2)^{5/2}}, \quad E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(2z^2 - x^2)}{(x^2 + z^2)^{5/2}}$$

donde  $x$  y  $y$  son coordenadas del punto  $P$  en la figura 26-37. Demuestre que este resultado general incluye los resultados especiales de la ecuación 26-12 y del problema 1.

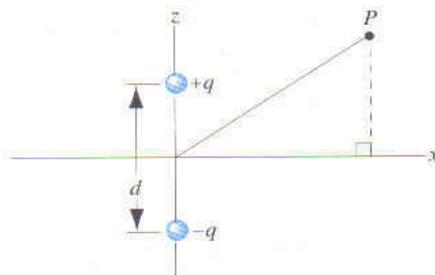


FIGURA 26-37. Problema 2.

3. Considere el anillo con carga de la sección 26-4. Suponga que la carga  $q$  no se distribuye uniformemente en el anillo, pero que la carga  $q_1$  se distribuye uniformemente en la mitad de la circunferencia y que la carga  $q_2$  se distribuye uniformemente en la otra mitad. Supóngase que  $q_1 + q_2 = q$ . a) Encuentre el componente del campo eléctrico en un punto cualquiera del eje dirigido a lo largo del eje y compárelo con el caso uniforme. b) Encuentre el componente del campo eléctrico en un punto del eje perpendicular a él y compárelo con el caso uniforme.
4. La figura 23-38 muestra un tipo de cuadrupolo eléctrico. Lo constituyen dos dipolos cuyos efectos en los puntos externos no se cancelan del todo. Demuestre que el valor de  $E$  sobre el eje del cuadrupolo en los puntos a una distancia  $z$  de su centro (suponga que  $z \gg d$ ) está dado por

$$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 z^4}$$

donde  $Q (= 2qd^2)$  es el momento cuadrupolar de la distribución de carga.

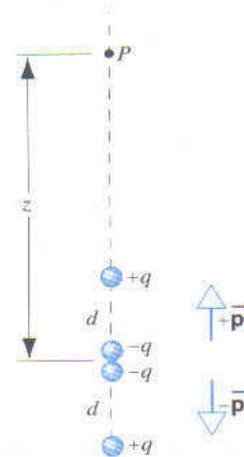


FIGURA 26-38. Problema 4.

5. Construya una distribución de cargas puntuales a lo largo del eje  $x$ , de modo que lejos de ellas el campo eléctrico a lo largo del eje varíe como  $1/r^6$ .
6. Una varilla aislante "semi-infinita" (Fig. 26-39) transporta una carga constante por unidad de longitud de  $\lambda$ . Demuestre que el campo eléctrico en el punto  $P$  forma un ángulo de  $45^\circ$  con ella y que este resultado no depende de la distancia  $R$ .



FIGURA 26-39. Problema 6.

7. Una delgada varilla no conductora de longitud finita  $L$  transporta una densidad uniforme de carga lineal  $+\lambda$  en la mitad supe-

rior y de una densidad  $-\lambda$  en la mitad inferior; compare esto con la figura 26-6. *a)* Mediante el argumento de simetría determine la dirección del campo eléctrico en  $P$  generado por la varilla. *b)* Determine  $\vec{E}$  en  $P$ . *c)* Tome el límite de esta expresión con  $y$  grande. ¿Por qué depende de  $y$ ? ¿Qué nos recuerda?

8. Un vaso hemisférico no conductor de radio interno  $R$  posee una carga total  $q$  distribuida uniformemente a través de la superficie interna. Calcule el campo eléctrico en el centro de la curvatura. (Sugerencia: considere el vaso como un conjunto de anillos.)
9. Suponga que el exponente en la ley de Coulomb no es 2 sino  $n$ . Demuestre que con  $n \neq 2$  es imposible construir líneas que tengan las propiedades de las líneas del campo eléctrico mencionadas en la sección 26-5. Para simplificar el procedimiento tome una carga puntual aislada.
10. Dos grandes placas paralelas de cobre están separadas por una distancia de 5.00 cm y tienen un campo eléctrico uniforme entre ellas, como se indica en la figura 26-40. Se libera un electrón de la placa negativa al mismo tiempo que se libera un protón de la placa positiva. Prescinda de la fuerza que las partículas ejercen entre sí y determine la distancia desde la placa positiva cuando una pasa al lado de la otra. ¿Le sorprende que no necesite conocer el campo eléctrico para resolver este problema?

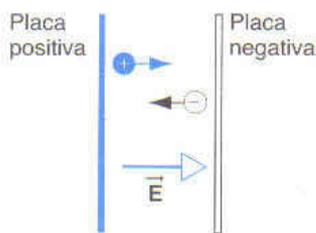


FIGURA 26-40. Problema 10.

11. Como se ve en la figura 26-41, se proyecta un electrón a una velocidad de  $v_0 = 5.83 \times 10^6$  m/s y en un ángulo de  $\theta = 39.0^\circ$ ;

$E = 1870$  N/C (dirigido hacia arriba),  $d = 1.97$  cm y  $L = 6.20$  cm. ¿Golpeará a una de las placas? Si lo hace, ¿cuál de ellas golpeará y a qué distancia del lado izquierdo?

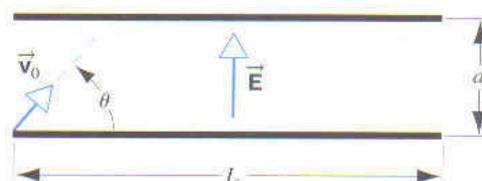


FIGURA 26-41. Problema 11.

12. Un electrón se ve forzado a moverse en el eje del anillo con carga mencionado en la sección 26-4, demuestre que el electrón puede efectuar pequeñas oscilaciones a través del centro del anillo, con una frecuencia dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 mR^3}}$$

13. Calcule el trabajo requerido para girar un extremo de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ , en función del momento dipolar  $\vec{p}$  y del ángulo inicial  $\theta_0$  entre  $\vec{p}$  y  $\vec{E}$ .
14. Determine la frecuencia de oscilación de un dipolo eléctrico, de momento  $p$  y de inercia rotacional  $I$  en amplitudes pequeñas de oscilación alrededor de su posición de equilibrio dentro de un campo eléctrico uniforme  $E$ .
15. Dos cargas puntuales positivas e iguales  $+q$  se hallan en  $z = +a/2$  y en  $z = -a/2$ . *a)* Obtenga una expresión con  $dE_z/dz$  para los puntos a lo largo del eje  $z$  y evalúe  $dE_z/dz$  en el límite  $z \ll a/2$ . *b)* Demuestre que la fuerza ejercida sobre un dipolo pequeño o colocado en este punto, con su eje en la línea que une las cargas, está dada por  $F = p(dE_z/dz)$ , donde  $p$  es el momento dipolar, y  $dE_z/dz$  es el valor límite obtenido en la parte *a)*.

## PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Un anillo de radio  $r = 1.0$  m tiene una densidad uniforme de carga dada por  $\lambda = (2.0 \mu\text{C}/\text{m})(2 + \sin \theta)$ . Con operaciones numéricas encuentre las coordenadas de un punto donde desaparezca el campo eléctrico.
2. La densidad de carga en una varilla de longitud  $L$  centrada en el eje  $x$  está dada por  $\lambda = (1.0 \mu\text{C}/\text{m}) \sin^2(\pi x/L)$ . Con operaciones numéricas genere una gráfica de las líneas del campo eléctrico en el plano  $xy$ .
3. Considere dos partículas que ejercen fuerzas eléctricas recíprocas. Una acelera en respuesta al campo eléctrico de la otra, y al cambiar su posición también ellas se alteran. Dos partículas idénticas, con una carga  $q = +1.9 \times 10^{-9}$  C y con una masa  $m = 6.1 \times 10^{-15}$  kg cada una, comienzan con velocidades idénticas de  $3.0 \times 10^4$  m/s en la dirección positiva  $x$ . Al inicio una

se halla en  $x = 0$ ,  $y = 6.7 \times 10^{-3}$  m y la otra en  $x = 0$ ,  $y = -6.7 \times 10^{-3}$  m. Ambas están en el plano  $xy$  y continúan desplazándose por él. Considere sólo las fuerzas eléctricas que ejercen una sobre otra. *a)* Con un programa de computadora grafique las trayectorias del tiempo  $t = 0$  a  $t = 1.0 \times 10^{-6}$  s. Por tratarse de una situación simétrica, deberá calcular únicamente la posición y la velocidad de una de las cargas. Use la simetría para determinar la posición y la velocidad de la otra al principio de cada intervalo de integración. Utilice  $\Delta t = 1 \times 10^{-8}$  s con el intervalo de integración. *b)* Ahora suponga que una de las partículas posee la carga  $q = -1.9 \times 10^{-9}$  C, pero que el resto de las condiciones son iguales. Grafique las trayectorias de  $t = 0$  a  $t = 5.0 \times 10^{-7}$  s.

## LEY DE GAUSS

**L**a ley de Coulomb siempre puede usarse para calcular el campo eléctrico  $\vec{E}$  de cualquier distribución de cargas en reposo discreta o continua. Las sumas o las integrales podrían complicarse (y podría necesitarse una computadora para evaluarlas numéricamente), pero invariablemente puede calcularse el campo eléctrico resultante.

En algunos casos estudiados en el capítulo anterior, se emplearon argumentos de simplificación basados en la simetría de la situación física. Por ejemplo, al calcular el campo eléctrico en los puntos del eje de una espira circular cargada, nos servimos de un argumento de simetría para deducir que deben desaparecer los componentes de  $\vec{E}$  perpendiculares al eje. En el presente capítulo vamos a estudiar una alternativa a la ley de Coulomb, llamada ley de Gauss, la cual ofrece un método más útil e instructivo para determinar el campo eléctrico en situaciones con ciertas simetrías.

Son pocas las situaciones que pueden analizarse directamente por medio de la ley de Gauss, pero es posible resolverlas con una facilidad extraordinaria. Aunque las dos leyes ofrecen resultados idénticos en los casos en que pueden aplicarse, la ley de Gauss se considera una ecuación más fundamental que la de Coulomb. Conviene puntualizar que, mientras que ésta representa el caballo de batalla de la electrostática, aquélla representa la parte conceptual.

### 27-1 ¿A QUÉ SE REFIERE LA LEY DE GAUSS?

Hasta ahora todo lo que hemos hecho en electrostática se basa en la ley de Coulomb, ecuación 25-4, la cual nos da la fuerza electrostática entre cargas puntuales. A partir de esta ley, que en esencia es la representación matemática de una observación experimental, hemos *definido* el campo eléctrico de una carga puntual  $q$  de modo que  $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ , donde  $\vec{F}$  es la fuerza que  $q$  ejerce sobre  $q_0$ . Al generalizar las distribuciones de carga, que pueden considerarse como conjuntos de muchas cargas puntuales infinitesimales, pudimos determinar el campo eléctrico de varias distribuciones de carga, como las de una línea o de un disco.

La ley de Gauss proporciona otra manera de calcular los campos eléctricos. Equivale a la de Coulomb para cargas puntuales; ello significa que cuanto hemos hecho hasta ahora aplicando la ley de Coulomb pudimos haberlo realizado partiendo de la ley de Gauss.

¿Por qué necesitamos la ley de Gauss si la ley de Coulomb es suficiente para calcular los campos eléctricos en cualquier arreglo estático de cargas? Una respuesta es la siguiente: ofrece una forma mucho más simple de calcularlos en situaciones con alto grado de simetría; por ejemplo, una distribución de carga esférica. Otra consiste en que, al escribirla, en vez de la de Coulomb, como ley fundamental de la electrostática, es posible diseñar un sistema de ecuaciones para todos los fenómenos electrostáticos que ilustran más claramente la relación entre el campo eléctrico y el magnético. Una tercera respuesta es que la ley de Gauss es válida en el caso de cargas de movimiento rápido, mientras que la ley de Coulomb se aplica sólo a las cargas que se hallan en reposo o que se desplazan con lentitud. Finalmente, como veremos más adelante en el capítulo, la ley de Coulomb puede obtenerse como caso especial, de la de Gauss; por tanto, esta última es más general que la primera. Por las razones que acabamos de mencionar, a la ley de Gauss se le considera más funda-

mental y se le incluye como una de las cuatro ecuaciones básicas del electromagnetismo (las ecuaciones de Maxwell que estudiaremos en el Cap. 38).

Antes de presentar la ley de Gauss, hay que definir y explicar una nueva magnitud: el *flujo del campo eléctrico*. Éste es una propiedad matemática de cualquier campo, se representa por vectores y depende de la *integral de superficie* del campo vectorial en un área particular. Existe también una interpretación geométrica del flujo, la cual se basa en el número de líneas del campo que atraviesan el área.

## 27-2 EL FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL

El término “flujo” es una palabra de origen latino y significa “fluir”; el flujo de un campo vectorial puede concebirse como una medida del flujo o de la penetración de los vectores del campo a través de un elemento fijo e imaginario de una superficie en el campo. Más adelante nos ocuparemos del flujo del campo eléctrico; por ahora vamos a considerar un ejemplo más común: el campo de vectores velocidad de un fluido que fluye.

Imagine una corriente de flujo estacionario, en la cual representamos el flujo especificando el vector de velocidad en cada punto. La figura 27-1 muestra un flujo uniforme; los vectores de velocidad son paralelos a lo largo de él. Supóngase que ponemos en la corriente un alambre doblado en una espira cuadrada de superficie  $A$ . En la figura 27-1a, la espira se pone de modo que su plano es perpendicular a la dirección del flujo. Definimos el flujo  $\Phi$  del campo de velocidad de manera que su magnitud está dada por

$$|\Phi| = vA, \quad (27-1)$$

donde  $v$  es la magnitud de la velocidad en el sitio de la espira. El flujo tiene unidades de  $\text{m}^3/\text{s}$  y podríamos decir que representa la velocidad con la que el fluido atraviesa la espira; sin embargo, atendiendo al concepto de campo (y para introducir la ley de Gauss) conviene considerar el flujo como una medida del *número de líneas del campo que atraviesan la espira*.

En la figura 27-1b se ha girado la espira de modo que su plano ya no es perpendicular a la dirección de la velocidad. Nótese que el número de las líneas del campo de velocidad que pasan por la espira es menor en esta figura que en la 27-1a. La superficie proyectada del cuadrado es  $A \cos \theta$ ; con sólo examinar la figura 27-1b, el lector se convencerá de que el número de las líneas del campo que cruzan la espira inclinada de superficie  $A$  es igual al que atraviesa la espira más pequeña, de superficie  $A \cos \theta$  perpendicular a la corriente. Por tanto, la magnitud del flujo en la situación de la figura 27-1b es

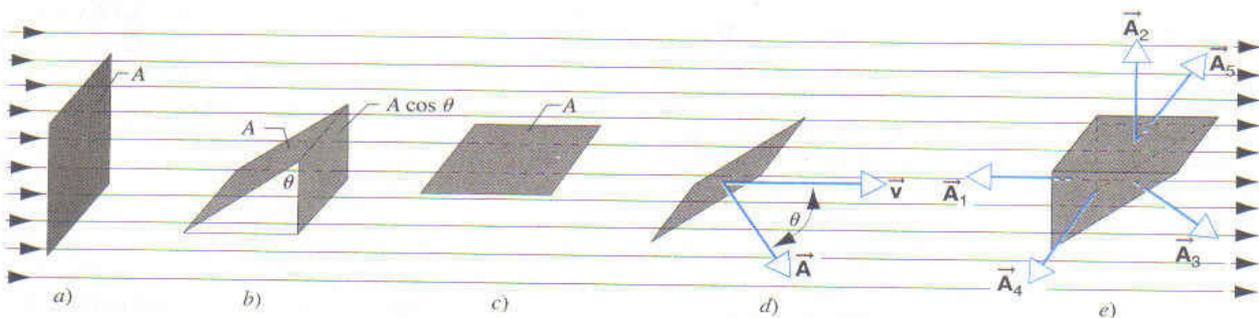
$$|\Phi| = vA \cos \theta. \quad (27-2)$$

Si se girara la espira de modo que la velocidad del fluido fuese paralela a su superficie, como en la figura 27-1c, el flujo sería cero y correspondería a  $\theta = 90^\circ$  en la ecuación 27-2. Nótese que en este caso ninguna línea del campo atraviesa por la espira.

Como veremos, la ley de Gauss se refiere al flujo neto que atraviesa una superficie *cerrada*. Por tanto, hay que distinguir entre el flujo positivo y negativo que penetra en una superficie. El lado derecho de la ecuación 27-2 puede expresarse en función del producto punto entre  $\vec{v}$  y un vector  $\vec{A}$ , cuya magnitud es el área de la superficie y cuya dirección es perpendicular a la superficie (Fig. 27-1d). Pero como la normal a la superficie puede señalar en la dirección, que aparece en la figura 27-1d, o en dirección opuesta, se necesita una forma de especificar esa dirección; de lo contrario el signo de  $\Phi$  no estaría definido claramente. Por convención decidimos que la dirección de  $\vec{A}$  es la de la *normal hacia afuera* de una superficie cerrada. Por tanto, el flujo que *sale* del volumen delimitado por la superficie se considera positivo, y el que *entra* en él, negativo. Con esta elección, podemos escribir el flujo de una superficie cerrada compuesta por varias superficies individuales (Fig. 27-1e, por ejemplo) así

$$\Phi = \sum \vec{v} \cdot \vec{A}, \quad (27-3)$$

donde  $\vec{v}$  es la velocidad del vector velocidad en la superficie. La suma se efectúa en todas las superficies individuales que constituyen la superficie cerrada. El flujo es una magnitud es-



**FIGURA 27-1.** Se sumerge una espira de alambre de superficie  $A$  en una corriente que fluye, la que representamos como un campo de velocidad. a) La espira forma ángulos rectos con el flujo. b) La giramos por un ángulo  $\theta$ ; la proyección del área perpendicular al flujo es  $A \cos \theta$ . c) Cuando  $\theta = 90^\circ$ , ninguna de las líneas del flujo atraviesa por el plano de la espira. d) La superficie de la espira se representa con un vector  $\vec{A}$  perpendicular al plano de ella. El ángulo entre  $\vec{A}$  y la velocidad del flujo  $\vec{v}$  es  $\theta$ . e) Superficie cerrada formada por cinco superficies planas. El área  $\vec{A}$  de cada una se representa con la normal hacia afuera.

calar porque se define en función del producto punto de dos vectores.

**PROBLEMA RESUELTO 27-1.** Consideremos la superficie cerrada de la figura 27-1e, la cual muestra un volumen delimitado por cinco superficies (1, 2 y 3, que son paralelas a la de las Figs. 27-1a, 27-1c, 27-1b respectivamente, junto con las superficies 4 y 5, que son paralelas a las líneas de corriente). Calcule el flujo total que pasa por una superficie cerrada, suponiendo que el campo de velocidad es uniforme y que por ello tiene la misma magnitud y dirección en todas partes.

**Solución** Si se utiliza la ecuación 27-3, puede escribirse el flujo total como la suma de los valores del flujo que pasa por las cinco superficies separadas:

$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A}_1 + \vec{v} \cdot \vec{A}_2 + \vec{v} \cdot \vec{A}_3 + \vec{v} \cdot \vec{A}_4 + \vec{v} \cdot \vec{A}_5.$$

Nótese que en la superficie 1 el ángulo entre la normal hacia afuera  $\vec{A}_1$  y la velocidad  $\vec{v}$  es  $180^\circ$ , de manera que el producto punto  $\vec{v} \cdot \vec{A}_1$  puede escribirse  $-vA_1$ . Desaparecen en su totalidad las contribuciones de las superficies 2, 4 y 5, porque en todos los casos (como se aprecia en la Fig. 27-1e) el vector  $\vec{A}$  es perpendicular a  $\vec{v}$ . En la superficie  $A_3$ , el flujo puede escribirse  $vA_3 \cos \theta$  y, en consecuencia, el flujo total será

$$\Phi = -vA_1 + 0 + vA_3 \cos \theta + 0 + 0 = -vA_1 + vA_3 \cos \theta.$$

Pero de la geometría de la figura 27-1e, puede deducirse que  $A_3 \cos \theta = A_1$  y como resultado se obtiene

$$\Phi = 0.$$

Es decir, el flujo total que atraviesa la superficie cerrada es cero.

El resultado del problema resuelto anterior no debería sorprendernos si recordamos que el campo de velocidad es una forma equivalente de representar el flujo real de las partículas materiales en la corriente. Todas las líneas del campo que entran en la superficie cerrada de la figura 27-1e por la superficie 1 salen a través de la superficie 3. De modo equivalente, puede afirmarse que, en la superficie cerrada de la figura 27-1e, la cantidad neta de fluido que entra en el volumen delimitado por la superficie es igual a la cantidad neta que sale de allí. Cabe esperar esto en una *superficie cerrada cualquiera*, siempre que en el volumen no haya *fuentes* ni *sumideros* de líquido, o sea sitios donde se cree un flujo neto o quede atrapado el fluido que fluye. Si existiera una fuente dentro del volumen (digamos un cubo de hielo que introduce más líquido en la corriente), el fluido que sale de la superficie sería mayor que el que entra en ella, y el flujo total sería positivo. Si hubiera un sumidero en el volumen, la cantidad de fluido que entraría sería mayor que el que sale y el flujo neto sería negativo. El flujo, positivo o negativo, neto que se desplaza por la superficie depende de la intensidad de la fuente o del sumidero (es decir, de la rapidez volumétrica a la que el fluido sale de la fuente o entra en la fuente). Por ejemplo, si el sólido que se derrite en la superficie libera  $1 \text{ cm}^3$  de fluido por segundo hacia la corriente, descubriríamos que el flujo neto en la superficie cerrada es  $+1 \text{ cm}^3/\text{s}$ .

La figura 27-1 indica el caso especial de un campo uniforme y de superficies planas. Es fácil generalizar los conceptos anteriores a un campo no uniforme y a superficies de

forma y orientación arbitrarias. Cualquier superficie arbitraria puede dividirse en elementos infinitesimales de área  $dA$ , que son aproximadamente superficies planas. La dirección del vector  $d\vec{A}$  sigue la de la normal hacia afuera de este elemento infinitesimal. El campo posee un valor  $\vec{v}$  en el sitio del elemento; el flujo neto se obtiene sumando las contribuciones de todos esos elementos, es decir, integrando sobre la superficie entera.

$$\Phi = \int \vec{v} \cdot d\vec{A}. \quad (27-4)$$

Las conclusiones antes obtenidas conservan su validez en este caso general: si la ecuación 27-4 se evalúa en un superficie cerrada, el flujo será 1) *cero* si la superficie no delimita fuentes ni sumideros, 2) *positivo* y de igual magnitud que su intensidad si la superficie contiene fuentes exclusivamente o 3) *negativo* y de igual magnitud que su intensidad sólo si contiene sumideros. Cuando la superficie delimita *tanto* fuentes *como* sumideros, el flujo neto es cero, positivo o negativo, según la intensidad relativa de las fuentes y sumideros.

En la siguiente sección aplicaremos consideraciones parecidas al flujo de otro campo vectorial: el campo eléctrico  $\vec{E}$ . Como cabe suponer, al hablar de la electrostática, las fuentes o sumideros del campo son cargas positivas o negativas; y la intensidad de ambos es proporcional a la magnitud de estas cargas. La ley de Gauss relaciona el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada, calculado por analogía con la ecuación 27-4, con la carga eléctrica neta delimitada por la superficie.

## 27-3 EL FLUJO DE UN CAMPO ELÉCTRICO

Imagine que las líneas del campo de la figura 27-1 representan un campo eléctrico de cargas en reposo, y no un campo de velocidad. Seguiremos utilizando el concepto de flujo, pese a que nada fluye en el caso electrostático. Su definición se asemeja a la del flujo de velocidad, sólo que  $\vec{E}$  reemplaza a  $\vec{v}$ , siempre que ésta aparece. En analogía con la ecuación 27-3, definimos el flujo de un campo eléctrico en los siguientes términos:

$$\Phi_E = \sum \vec{E} \cdot \vec{A}. \quad (27-5)$$

Igual que en el caso del flujo de velocidad, el flujo  $\Phi_E$  puede considerarse una medida del número de líneas del campo eléctrico que cruzan por la superficie. El subíndice  $E$  en  $\Phi_E$  nos recuerda que estamos hablando del flujo *eléctrico* y sirve para distinguir el flujo eléctrico y el magnético, que se estudiará en el capítulo 34. La ecuación 27-5 se aplica, como se hizo en la ecuación 27-3, únicamente a casos donde  $\vec{E}$  presenta magnitud y dirección constantes en cada superficie  $\vec{A}$  incluida en la suma.

A semejanza del flujo de velocidad, el flujo del campo eléctrico constituye una magnitud escalar. De acuerdo con la ecuación 27-5, sus unidades son  $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ .

La ley de Gauss se ocupa del flujo de un campo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada. Para definir  $\Phi_E$  en términos más generales, sobre todo en los casos en que  $\vec{E}$  no

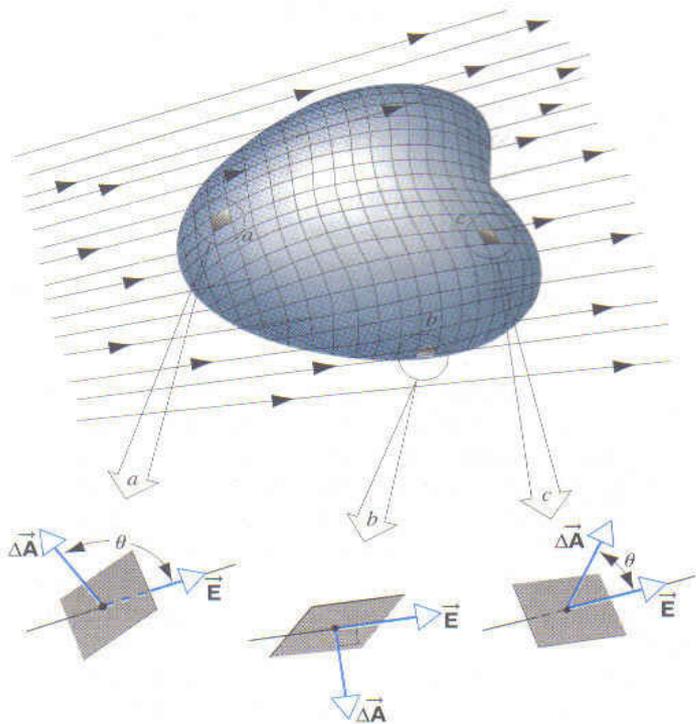
es uniforme, examinemos con detenimiento la figura 27-2, la cual muestra una superficie arbitraria cerrada que está en medio de un campo eléctrico no uniforme. Dividamos la superficie en pequeños cuadrados de superficie  $\Delta A$ , tan pequeños que pueden considerarse planos. Cada elemento de la superficie puede representarse como un vector  $\Delta \vec{A}$ , cuya magnitud es la superficie  $\Delta A$ . Se supone que la dirección de  $\Delta \vec{A}$  es la normal, trazada hacia afuera, a la superficie, como se ve en la figura 27-1.  $\vec{E}$  puede considerarse como constante en todos los puntos de un cuadrado, pues se los ha hecho muy pequeños.

Los vectores  $\vec{E}$  y  $\Delta \vec{A}$  que caracterizan a cada cuadrado forman un ángulo  $\theta$  entre sí. La figura 27-2 muestra una vista ampliada de tres cuadrados en la superficie, denotados  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Nótese que en  $a$ ,  $\theta > 90^\circ$  ( $\vec{E}$  el cuadrado apunta hacia adentro); en  $b$ ,  $\theta = 90^\circ$  ( $\vec{E}$  es paralelo a la superficie); y en  $c$ ,  $\theta < 90^\circ$  ( $\vec{E}$  apunta hacia afuera).

En analogía con la ecuación 27-5, una definición provisional del flujo total del campo eléctrico en una superficie es

$$\Phi_E = \sum \vec{E} \cdot \Delta \vec{A}, \quad (27-6)$$

que nos indica sumar la magnitud escalar  $\vec{E} \cdot \Delta \vec{A}$  de todos los elementos del área en que ha sido dividida la superficie. En los puntos como  $a$  de la figura 27-2, la contribución al flujo es negativa; en  $b$ , cero y en  $c$ , positiva. Por tanto, si  $\vec{E}$  se dirige hacia afuera en todas partes ( $\theta < 90^\circ$ ), cada  $\vec{E} \cdot \Delta \vec{A}$  es positivo y también lo será  $\Phi_E$  en la superficie entera. Si en to-



**FIGURA 27-2.** Superficie de forma arbitraria inmersa en un campo eléctrico no uniforme  $\vec{E}$ . La superficie se divide en pequeños elementos de área  $\Delta \vec{A}$ . La relación entre los vectores  $\vec{E}$  y  $\Delta \vec{A}$  se muestra en tres elementos diferentes ( $a$ ,  $b$  y  $c$ ).

das partes  $\vec{E}$  se dirige hacia adentro ( $\theta > 90^\circ$ ), cada  $\vec{E} \cdot \Delta \vec{A}$  será negativo y  $\Phi_E$  en la superficie será negativo. Siempre que en todas partes  $\vec{E}$  sea paralelo a una superficie ( $\theta = 90^\circ$ ), cada  $\vec{E} \cdot \Delta \vec{A}$  será cero, y también lo será  $\Phi_E$  en la superficie.

La definición exacta del flujo eléctrico se encuentra en el límite diferencial de la ecuación 27-6. Al reemplazar la suma en la superficie por la integral en ella se obtiene

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (27-7)$$

Esta *integral de superficie* indica que la superficie en cuestión ha de dividirse en elementos infinitesimales de área ( $d\vec{A}$ ) y que la magnitud escalar  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$  ha de evaluarse en cada elemento y sumarse en la superficie entera. En el caso de la ley de Gauss, queremos evaluar esta integral en una superficie *cerrada*. En tal caso el signo de la integral se escribe con un círculo  $\oint$  a manera de recordatorio.

**PROBLEMA RESUELTO 27-2.** La figura 27-3 muestra un cilindro hipotético, cerrado de radio  $R$ , inmerso en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ ; su eje es paralelo al campo. ¿Cuál es  $\Phi_E$  en esta superficie cerrada?

**Solución** El flujo  $\Phi_E$  puede escribirse como la suma de tres términos: una integral en  $a$ ) la tapa del cilindro de la izquierda,  $b$ ) la superficie cilíndrica y  $c$ ) la tapa del lado derecho. Por tanto, conforme a la ecuación 27-7 escrita para una superficie cerrada, tenemos

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{A}. \end{aligned}$$

En la tapa de la izquierda, el ángulo  $\theta$  es  $180^\circ$  en todos los puntos,  $\vec{E}$  posee un valor constante y los vectores  $d\vec{A}$  son todos paralelos. En consecuencia,

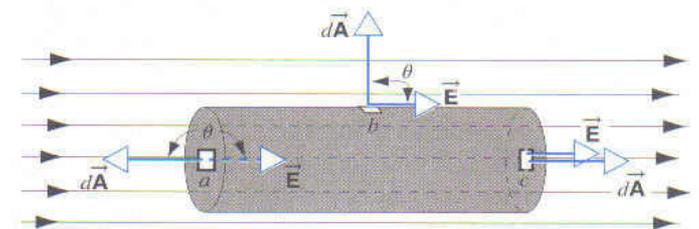
$$\int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E dA \cos 180^\circ = -E \int dA = -EA,$$

donde  $A (= \pi R^2)$  es la superficie de la tapa de la izquierda. Asimismo, en la tapa de la derecha

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{A} = +EA,$$

aquí el ángulo  $\theta$  es cero en todos los puntos. Por último, en la pared del cilindro,

$$\int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0,$$



**FIGURA 27-3.** Problema resuelto 27-2. Un cilindro cerrado está inmerso en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  paralelo a su eje.

ya que  $\theta = 90^\circ$ : por tanto,  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$  en todos los puntos de la superficie cilíndrica. Así pues, el flujo total será

$$\Phi_E = -EA + 0 + EA = 0.$$

Se esperaba el resultado anterior, puesto que no existen cargas dentro de la superficie cerrada de la figura 27-5. Las líneas de  $\vec{E}$  (constante) entran por la izquierda y salen por la derecha, como se observa en la figura 27-1e.

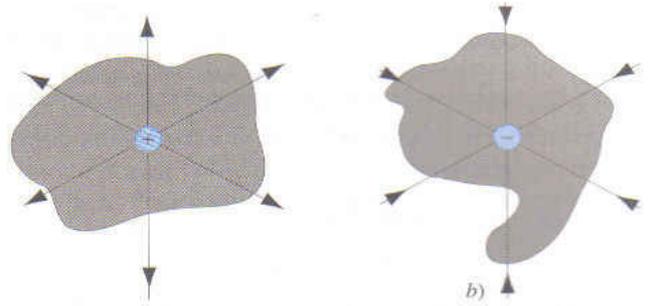
## Flujo y líneas del campo

Para explicar la relación entre el flujo y el número de líneas del campo eléctrico que cruzan una superficie cerrada, suponemos que cada unidad de carga  $q$  se representa con un número específico de líneas —seis por ejemplo—, como se muestra en la figura 27-4.\* Seis líneas del campo salen alejándose de una carga  $+q$  y seis terminan en una carga  $-q$ . Si cada carga está rodeada por una superficie cerrada, el flujo eléctrico que atraviesa la superficie que rodea la carga positiva es de  $+6$  unidades, y el flujo eléctrico que atraviesa la superficie que rodea la carga negativa es de  $-6$  unidades. (Contamos  $+1$  unidad arbitraria de flujo por las líneas que se dirigen hacia afuera por las superficies y  $-1$  unidad por las que se dirigen hacia adentro.) Sin importar el tamaño de la superficie que rodea a las cargas, las seis líneas del campo siempre penetran en la superficie, y el flujo es de seis unidades.

En la figura 27-4b, las líneas del campo en el fondo del dibujo atraviesan la superficie tres veces. Desplazándose hacia la carga desde afuera de la superficie, la primera vez las líneas del campo entran en la superficie que contamos  $-1$ , porque se dirige hacia adentro por la superficie; la segunda vez contamos  $+1$ , porque ahora se dirige hacia afuera y la tercera pasada hacia adentro por la superficie nos da otro  $-1$ . La aportación neta del flujo en esta línea del campo es  $-1$ , y el flujo neto de la superficie entera es  $-6$  unidades. Sin importar la forma de la superficie ni cómo se estire ni se deforme, el flujo neto a través de ella es el mismo y depende sólo de cuánta carga encierre la superficie.

La figura 27-5 muestra una superficie cerrada que encierra las cargas  $+q$  y  $-q$ . El flujo neto por la superficie es cero, porque en todas las líneas del campo desde la carga positiva que se dirigen hacia afuera por la superficie hay una línea que va de la carga negativa hacia el interior. Como ambas cargas poseen la misma magnitud, el número total de líneas del campo será cero y, por lo mismo, también el flujo neto.

Supóngase ahora que nos dicen que hay  $+30$  líneas de campo (o  $+30$  unidades de flujo) que cruzan una superficie arbitraria cerrada. ¿Podemos determinar cuánta carga está con-

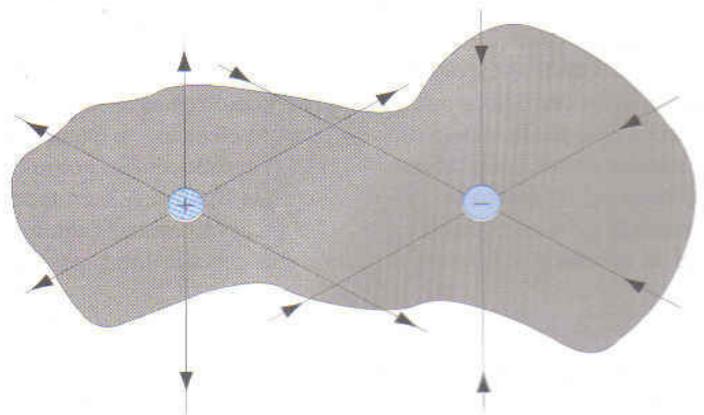


**FIGURA 27-4.** a) Seis líneas del campo pasan por una superficie cerrada arbitraria que rodea una carga positiva  $+q$ . b) Seis líneas del campo entran en la superficie que rodea una carga negativa  $-q$ .

tenida dentro de la superficie y dónde se ubica dentro de ella? Sabemos que la carga *neta* en el interior de ella es  $+5q$ , pero no si una partícula contiene la carga entera ni si existen dos partículas de carga  $+6q$  y  $-q$ , tres partículas de  $+8q$ ,  $+4q$  y  $-7q$ , ni alguna de un número infinito de posibilidades. Además, la carga o cargas pueden encontrarse en cualquier parte del interior de la superficie y, aun así, producir las mismas  $+30$  unidades de flujo. Si conocemos sólo el flujo, conoceremos la magnitud neta de la carga en el interior, pero no podremos deducir nada respecto al tamaño ni al lugar de las cargas; por tanto, tampoco podremos deducir nada sobre el campo eléctrico en la superficie o en otra parte del espacio.

Pero, si trazamos una superficie esférica, y si sabemos que el flujo se distribuye uniformemente en ella, estaremos en condiciones de concluir que toda la carga se halla en el centro de la esfera de una partícula simple de carga  $+5q$ ; y si conocemos la magnitud y la ubicación de esta partícula cargada, deduciremos el campo eléctrico en cualquier sitio. En consecuencia, concluimos que

*La relación entre el flujo total que atraviesa una superficie cerrada y la carga neta delimitada por ella siempre es válida, y podemos usarla para deducir el campo eléc-*



**FIGURA 27-5.** Si la carga neta encerrada por una superficie es cero, también lo será el número de las líneas del campo (y el flujo eléctrico total) que atraviesa la superficie.

\* Para facilitar la explicación representamos los diagramas de líneas del campo no en tres dimensiones sino en dos. En tres dimensiones, a menudo son más complejas y debe procurarse representar el patrón de campo relacionado con las cargas. Una exposición muy completa se encuentra en "Electric Field Line Diagrams Don't Work" de A. Wolf, S. J. Van Hook y E. R. Weeks, *American Journal of Physics*, junio de 1996, p. 714.

trico en puntos del espacio sólo si la geometría de la carga y de la superficie poseen un alto grado de simetría.

La ley de Gauss da la relación entre el flujo a través de una superficie cerrada y la carga neta encerrada por esta superficie.

## 27-4 LEY DE GAUSS\*

Ahora que hemos definido el flujo del vector del campo eléctrico a través de una superficie *cerrada*, estamos en condiciones de escribir la ley de Gauss. Supóngase que tenemos una colección de cargas positivas y negativas, la cual genera un campo eléctrico  $\vec{E}$  en cierta región del espacio. En esta región construimos una superficie imaginaria cerrada, llamada *superficie gaussiana*, que puede encerrar o no algunas cargas. La ley de Gauss, que relaciona el flujo total  $\Phi_E$  a través de esta superficie con la carga *neta*  $q$  encerrada por ella, puede expresarse así

$$\epsilon_0 \Phi_E = q \quad (27-8)$$

o así

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q. \quad (27-9)$$

El círculo en el símbolo de la integral indica que ésta debe calcularse sobre una superficie *cerrada*. Vemos que la ley de Gauss predice que  $\Phi_E$  es cero en la superficie mencionada en el problema resuelto 27-2, porque no encierra carga alguna.

Como vimos en la sección 26-5, la magnitud del campo eléctrico es proporcional al número de líneas del campo que atraviesan un elemento de área perpendicular al campo. La integral de la ecuación 27-9 explica esencialmente el número de líneas que atraviesan la superficie. Es lógico que ese número sea proporcional a la carga neta encerrada por la superficie, tal como lo exige la ecuación 27-9.

La elección de la superficie de Gauss es arbitraria. Suelen escogerse de manera que la simetría de la distribución dé, por lo menos en parte de la superficie, un campo eléctrico de magnitud constante que después por factorización se extrae de la integral de la ecuación 27-9. En tal situación puede aplicarse la ley de Gauss para evaluar el campo eléctrico.

En la figura 27-6 se incluyen las líneas de fuerza (y, por tanto, del campo eléctrico) de un dipolo. Se dibujaron cuatro superficies cerradas gaussianas, cuya sección transversal aparecen en ella. En la superficie  $S_1$ , el campo eléctrico se encuentra en todas partes hacia afuera de ella; en consecuencia, como en el caso del elemento de superficie  $c$  de la figura 27-2, en todas partes  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$  es positivo en  $S_1$ . Cuando evaluamos la integral de la ecuación 27-9 en una superficie cerrada total, obtene-

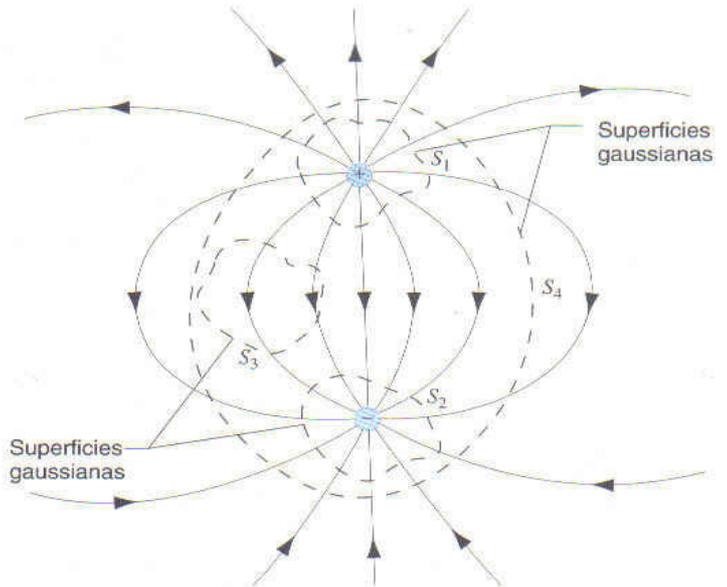


FIGURA 27-6. Dos cargas iguales y opuestas y las líneas que representan el campo eléctrico en su cercanía. Se muestran las secciones transversales de cuatro superficies gaussianas cerradas.

mos un resultado positivo. Entonces la ecuación 27-9 exige que la superficie debe encerrar una carga positiva neta como ocurre en realidad. En la terminología de Faraday, salen más líneas de fuerza que las que entran en ella; así que debe encerrar una carga positiva neta.

Por el contrario, en la superficie  $S_2$  de la figura 27-6 el campo eléctrico se halla en todas partes entrando en ella. A semejanza del elemento de superficie  $a$  de la figura 27-2,  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$  es negativo en todos los elementos de área, y la integral de la ecuación 27-9 produce un valor negativo; esto indica que la superficie encierra una carga negativa neta (como sucede en realidad). En esta superficie entran más líneas que las que salen de ella.

La superficie  $S_3$  no encierra carga alguna, por lo cual, según la ley de Gauss, el flujo total por ella ha de ser cero. Esto concuerda con la figura 27-6, donde se muestra que en la parte superior de la superficie entran el mismo número de líneas que las que salen del fondo. No es mera casualidad; en la figura 27-6 puede dibujarse una superficie de cualquier forma irregular; mientras no encierre ninguna de las cargas, el número de líneas del campo que entren en dicha superficie será igual al de las que salgan.

Tampoco, la superficie  $S_4$  encierra carga *neta* alguna, pues supusimos que la magnitud de las dos cargas es igual. Una vez más, el flujo total que la atraviesa ha de ser cero. Algunas de las líneas del campo están encerradas totalmente dentro de la superficie; así que no contribuyen al flujo que la *atraviesa*. Pero como todas las líneas del campo que salen de la carga positiva terminan finalmente en la carga negativa, las líneas provenientes de la carga positiva que atraviesan la superficie hacia afuera tienen una línea correspondiente que la atraviesa hacia adentro mientras busca la carga negativa. Por consiguiente, el flujo total es cero.

\* Karl Friedrich Gauss (1777-1855) fue un matemático alemán que realizó importantes descubrimientos en la teoría de números, en la geometría y en la probabilidad. Hizo, además, aportaciones a la astronomía y a la medición del tamaño y la forma de la Tierra. Consúltese en "Gauss" de Ian Stewart, *Scientific American*, julio de 1977, p. 122 un fascinante relato de la vida de este notable matemático.

## Ley de Gauss y ley de Coulomb

La ley de Coulomb puede deducirse de la de Gauss y de consideraciones de simetrías. Para ello vamos a aplicar la ley de Gauss a una carga puntual positiva y aislada  $q$ , como en la figura 27-7. Aunque la ley de Gauss es válida con cualquier superficie, escogemos una superficie esférica de radio  $r$  centrada en la carga. Esta superficie ofrece la ventaja de que, por simetría,  $\vec{E}$  debe ser perpendicular a la superficie, de modo que el ángulo  $\theta$  entre  $\vec{E}$  y  $d\vec{A}$  sea cero en toda la superficie. Más aún,  $\vec{E}$  posee la misma magnitud en todas partes de ella. *Construir una superficie gaussiana que se sirva de esta simetría es muy importante cuando se aplica la ley de Gauss.*

En la figura 27-7  $\vec{E}$  y  $d\vec{A}$ , en cualquier punto de la superficie gaussiana, se dirigen radialmente hacia afuera, por lo cual la magnitud  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$  se convierte simplemente en  $E dA$ . Así pues, la ley de Gauss (Ec. 27-9) se reduce a

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \oint E dA = q.$$

Como  $E$  posee la misma magnitud en todos los puntos de la esfera, puede factorizarse extrayéndose del símbolo de la integral, lo cual nos da

$$\epsilon_0 E \oint dA = q.$$

La integral es simplemente el área superficial total de la esfera,  $4\pi r^2$ , así que obtenemos

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = q$$

o bien

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (27-10)$$

La ecuación 27-10 contiene la magnitud del campo eléctrico  $\vec{E}$  en cualquier punto, a una distancia  $r$  de la carga puntual aislada  $q$ , y es idéntica a la ecuación 26-6, que se obtuvo de la ley de Coulomb. Así, al escoger una superficie gaussiana con la simetría apropiada, se deduce la ley de Coulomb de la de Gauss. Estas dos leyes pueden considerarse equivalentes en nuestras aplicaciones, pero (como vimos en la Sec. 27-1) esta última tiene mayor aplicabilidad y, por lo mismo, es una ecuación más fundamental del electromagnetismo.

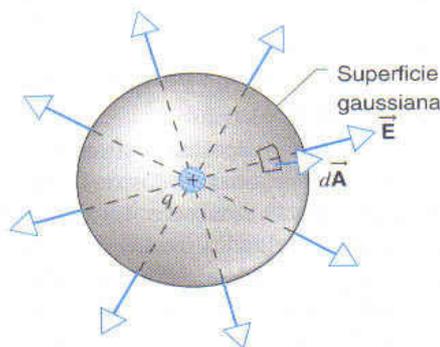


FIGURA 27-7. Superficie gaussiana esférica de radio  $r$  que rodea una carga puntual positiva  $q$ .

Es interesante señalar que, al escribir como  $1/4\pi\epsilon_0$  la constante de proporcionalidad en la ley de Coulomb, es posible simplificar la ley de Gauss. Si hubiéramos escrito la constante de la primera simplemente como  $K$ , podríamos haber expresado la segunda como  $(1/4\pi K)\Phi_E = q$ . Preferimos dejar el factor  $4\pi$  en la ley de Coulomb, de modo que no aparezca en la de Gauss ni en otras relaciones de uso frecuente que se derivan más adelante.

## 27-5 APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS

Esta ley sirve para calcular  $\vec{E}$  cuando la simetría de una distribución de carga es grande. Un ejemplo de este cálculo —el campo de una carga puntual, ya se explicó al ocuparnos de la ecuación 27-10. Ahora vamos a presentar otros ejemplos.

### Línea infinita de carga

En la figura 27-8 se incluye una sección de una línea infinita de carga con una densidad constante de carga lineal positiva (carga por unidad de longitud)  $\lambda$ . Nos gustaría determinar el campo eléctrico a una distancia  $r$  de la línea.

En la sección 26-4 expusimos los argumentos de simetría que nos permiten concluir que en este caso el campo eléctrico tiene un solo componente radial. Así pues, el problema presenta simetría cilíndrica y, por lo mismo, como en la superficie gaussiana seleccionamos un cilindro circular de radio  $r$  y de longitud  $h$ , cerrado en los extremos por tapas planas normales al eje.  $E$  es constante en la superficie cilíndrica y perpendicular a ella. El flujo de  $\vec{E}$  a través de esta superficie es  $E(2\pi rh)$ , donde  $2\pi rh$  es el área de la superficie. No pasa flujo por las tapas circulares porque aquí  $\vec{E}$  es paralelo a la superficie en todos los puntos, de manera que  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$  en todos los puntos de las tapas.

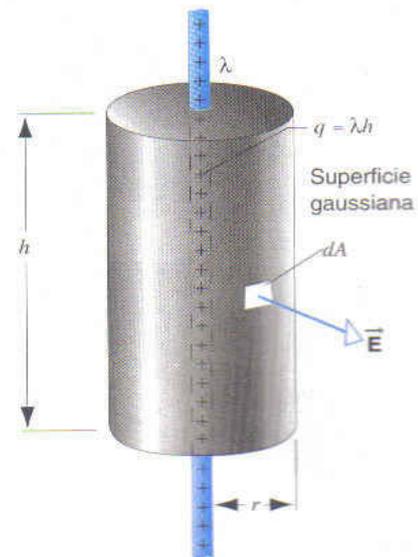


FIGURA 27-8. Una superficie gaussiana con la forma de un cilindro cerrado rodea una parte de una línea infinita de carga positiva.

La carga  $q$  encerrada por la superficie gaussiana de la figura 27-8 es  $\lambda h$ . Entonces la ley de Gauss (Ec. 27-9) nos da

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q$$

$$\epsilon_0 E(2\pi rh) = \lambda h,$$

o bien

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (27-11)$$

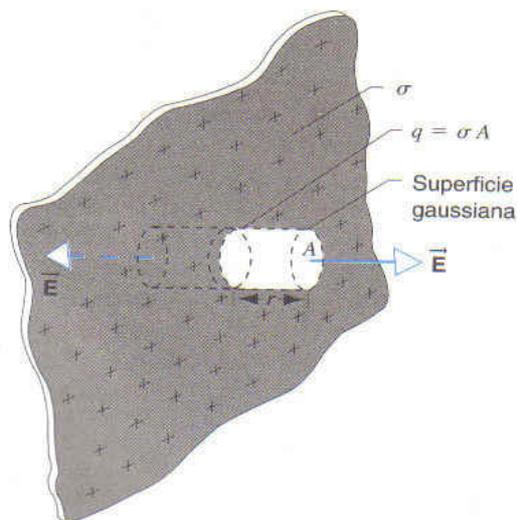
en concordancia con la ecuación 26-17.

Nótese que es mucho más simple la solución usando la ley de Gauss que la que usando métodos de integración, como en el capítulo 26. Nótese asimismo que es posible usar la ley de Gauss sólo si escogemos la superficie gaussiana adecuada para aprovechar la simetría cilíndrica del campo eléctrico creado por una larga línea de carga. Existe la opción de seleccionar como superficie gaussiana cualquier superficie cerrada; por ejemplo, un cubo o una esfera (Ej. 24). Aunque la ley de Gauss se cumple a todas las superficies de este tipo, no todas son útiles en el problema en cuestión; sólo la superficie cilíndrica de la figura 27-8 es la apropiada.

La ley de Gauss tiene la propiedad de ofrecer una técnica útil de cálculo únicamente en los problemas que presentan cierto grado de simetría, y en ellos la solución es extraordinariamente simple.

## Hoja infinita de carga

La figura 27-9 contiene una parte de una delgada hoja infinita no conductora cargada con una densidad constante de carga superficial positiva  $\sigma$  (carga por unidad de superficie). El campo eléctrico lo calculamos en los puntos cercanos a la hoja.



**FIGURA 27-9.** Una superficie gaussiana con la forma de un pequeño cilindro cerrado intersecta una parte pequeña de una hoja de carga positiva. El campo es perpendicular a la hoja y, por ello, sólo las tapas terminales de la superficie gaussiana contribuyen al flujo.

Una superficie gaussiana adecuada es un cilindro cerrado de superficie transversal  $A$ , dispuesto de modo que atraviesa el plano como se indica. De la simetría se deduce que  $\vec{E}$  apunta en ángulos rectos hacia las tapas extremas y alejándose del plano. Dado que  $\vec{E}$  no traspasa la superficie cilíndrica, no contribuye al flujo proveniente de la pared curva del cilindro. Suponemos que las tapas extremas equidistan de la hoja. Por simetría el campo posee la misma magnitud en ellas. El flujo por cada una es  $EA$  y positivo en ambas. La ley de Gauss nos da

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q$$

$$\epsilon_0(EA + EA) = \sigma A,$$

donde  $\sigma A$  es la carga encerrada. Al resolver para  $E$  obtenemos

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (27-12)$$

Nótese que  $E$  es igual en todos los puntos de los lados de la hoja.

Aunque desde el punto de vista físico no puede existir una hoja infinita con carga; este resultado sigue siendo útil porque la ecuación 27-12 proporciona resultados aproximadamente correctos de las hojas reales (no infinitas) con carga, si consideramos sólo los puntos lejanos de los bordes y cuya distancia de la hoja es pequeña en comparación con las dimensiones de la hoja. De hecho, la figura 27-12 concuerda con la ecuación 26-20, que obtuvimos al tomar los puntos cercanos a un disco circular con carga.

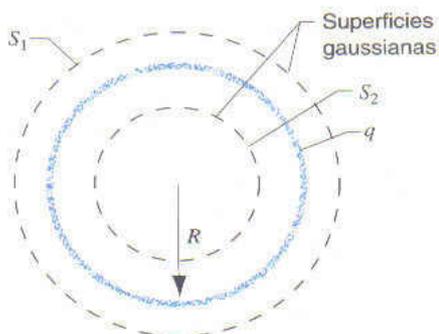
## Un cascarón esférico con carga

En la sección 25-5 nos servimos de la semejanza entre las fuerzas electrostáticas y gravitacionales para demostrar dos propiedades de las fuerzas ejercidas por cascarones esféricos de carga uniforme. Después en la sección 26-4 aprovechamos las propiedades de la fuerza electrostática para deducir el campo eléctrico que un cascarón esférico con carga uniforme produce en puntos dentro o fuera del cascarón.

Podemos resumir los *teoremas de cascarones* para los campos eléctricos así:

1. En los puntos externos un cascarón esférico uniforme con carga se comporta como si toda su carga se concentrara en su centro.
2. Un cascarón esférico uniforme con carga no ejerce fuerza eléctrica sobre una partícula con carga colocada dentro del mismo.

Veamos cómo la ley de Gauss simplifica el cálculo del campo eléctrico y las pruebas de los dos teoremas de cascarón en esta geometría tan simétrica. La figura 27-10 muestra un cascarón esférico delgado, donde la carga  $q$  se distribuye uniformemente. Está rodeado por dos superficies esféricas concéntricas gaussianas,  $S_1$  y  $S_2$ . A partir de un argumento de simetría concluimos que el campo puede tener sólo un componente radial  $E_r$ . (Suponga que hay un componente radial y que alguien gira el cascarón en un ángulo alrededor de un diá-



**FIGURA 27-10.** Sección transversal de un cascarón uniformemente cargado con carga total  $q$ . El cascarón está rodeado por dos superficies gaussianas esféricas cerradas, una dentro de él, y la otra en su exterior.

metro cuando volvemos la espalda. En esta posición podríamos sondear el campo eléctrico —digamos con una carga de prueba— para averiguar que el campo eléctrico cambió de dirección, a pesar de que la distribución de carga era la misma que antes de la rotación. Claro que es una contradicción. ¿Sería válido el argumento de simetría si la carga no se distribuyese uniformemente por la superficie?) Al aplicar la ley de Gauss a la superficie  $S_1$ , donde  $r > R$ , se obtiene

$$\epsilon_0 E_r (4\pi r^2) = q,$$

o bien

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{cascarón esférico, } r > R), \quad (27-13)$$

lo mismo que en relación con la figura 27-7. En consecuencia, el cascarón de carga uniforme se comporta como una carga puntual en todos los puntos fuera de él. Con ello queda demostrado el primer teorema de los cascarones.

Al aplicar la ley de Gauss a la superficie  $S_2$ , donde  $r < R$ , se obtiene directamente

$$E_r = 0 \quad (\text{cascarón esférico, } r < R), \quad (27-14)$$

porque esta superficie gaussiana no encierra carga alguna y porque  $E_r$  (por otro argumento de simetría) posee el mismo valor en todas las partes de la superficie. Por tanto, el campo eléctrico desaparece dentro de un cascarón uniforme con carga; una carga de prueba colocada en cualquier punto del interior no sentirá fuerza eléctrica alguna. Se demuestra así el segundo teorema del cascarón.

Estos dos teoremas se aplican exclusivamente en el caso de un cascarón con carga uniforme. No se aplicarían si las cargas se dispersasen de manera no uniforme por la superficie, de modo que la densidad de carga variara en ella. Se perdería la simetría y, como resultado,  $\vec{E}$  no podría extraerse de la integral en la ley de Gauss. El flujo se mantendría en  $q/\epsilon_0$  en todas las superficies exteriores y sería cero en todas las interiores; pero no se podría establecer una conexión directa con  $\vec{E}$  como se hace en el caso uniforme. En contraste con el cascarón uniformemente cargado, el campo *no* sería cero en todo el interior.

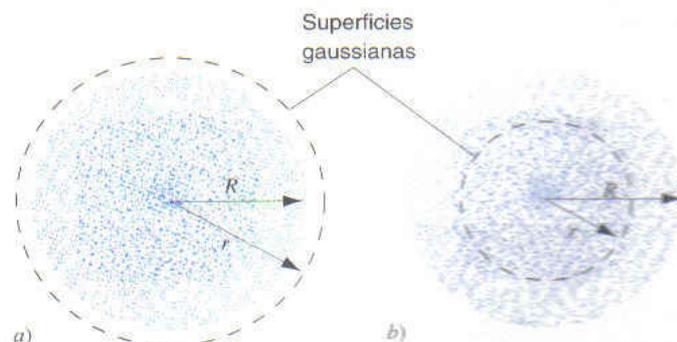
## Distribución de carga esféricamente simétrica

La figura 27-11 contiene una sección transversal de una distribución de carga esférica de radio  $R$ . Aquí, la carga se distribuye por todo el volumen de la esfera. No suponemos que la densidad de carga volumétrica  $\rho$  (la carga por unidad de volumen) sea constante; sin embargo, imponemos la restricción de que  $\rho$  en todos los puntos depende sólo de la distancia del punto con el centro, condición denominada *simetría esférica*. En otras palabras,  $\rho$  puede ser una función de  $r$ , pero no de una coordenada angular cualquiera. Vamos a obtener una expresión de  $E$  para los puntos situados afuera (Fig. 27-11a) y dentro (Fig. 27-11b) de la distribución de carga.

Toda distribución de carga con simetría esférica, como la de la figura 27-11, puede considerarse como un nido de cascarones concéntricos delgados. La densidad de carga volumétrica  $\rho$  puede variar de un cascarón al siguiente pero se puede hacer tan delgado que podemos suponer que  $\rho$  es uniforme en cualquier cascarón. Con los resultados de la subsección anterior se calcula la contribución de cada cascarón al campo eléctrico total. El campo eléctrico proveniente de los cascarones delgados tienen únicamente un componente radial; así que el campo eléctrico total de la esfera también puede tener un solo componente radial. (Esta conclusión se extrae también de un argumento de simetría, pero no será válida si la distribución de carga carece de simetría esférica, esto es, si  $\rho$  depende de la dirección.)

Calculemos el componente radial del campo eléctrico en los puntos situados a una distancia  $r$  mayor que el radio  $R$  de la esfera, como se advierte en la figura 27-11a. Cada cascarón concéntrico, con una carga  $dq$ , aporta un componente radial  $dE_r$  al campo eléctrico, según la ecuación 27-13. El campo total es la suma de todos los componentes; como todos son radiales, hay que obtener únicamente la suma algebraica, y no la suma vectorial. Entonces, la suma en todos los cascarones da

$$E_r = \int dE_r = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$



**FIGURA 27-11.** Sección transversal de una distribución de carga con simetría esférica, en que la densidad de carga volumétrica puede variar con  $r$  en este material supuestamente no conductor. Las superficies gaussianas esféricas cerradas se dibujaron a) afuera de la distribución y b) en su interior.

o como  $r$  es constante en la integral sobre  $q$ ,

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (27-15)$$

donde  $q$  es la carga total de la esfera. Por tanto, en los puntos fuera de una distribución de carga con simetría esférica, el campo eléctrico posee el valor que tendría si la carga se concentrara en su centro. Este resultado se parece al caso gravitacional de la sección 14-5. Ambos resultados se deducen de que las leyes correspondientes de fuerza son del tipo de cuadrado inverso.

A continuación analizaremos el campo eléctrico en los puntos dentro de la distribución de carga. La figura 27-11b muestra una superficie esférica gaussiana de radio  $r < R$ . La ley de Gauss nos da

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 E_r (4\pi r^2) = q'$$

o bien

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^2}, \quad (27-16)$$

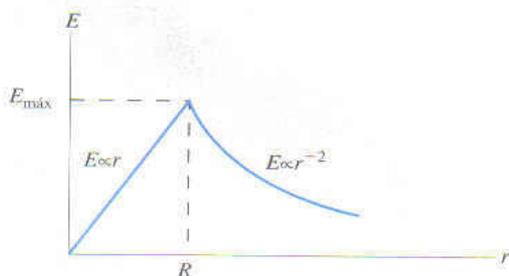
donde  $q'$  es la parte de  $q$  contenida dentro de la esfera de radio  $r$ . Conforme al segundo teorema de los cascarones, la parte  $q$  situada afuera de la esfera no aporta nada a  $\vec{E}$  en el radio  $r$ .

Si queremos proseguir con el cálculo hay que conocer la carga  $q'$  que se halla dentro del radio  $r$ , es decir, conocer  $\rho(r)$ . Vamos ahora a abordar el caso especial en que la esfera está cargada uniformemente; así, la densidad de carga  $\rho$  posee el mismo valor en todos los puntos dentro de una esfera de radio  $R$  y es cero en todos los que están fuera de ella. En los puntos internos de ella, la fracción de carga dentro de  $r$  es igual a la del volumen en el interior de  $r$ , de modo que

$$\frac{q'}{q} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

o bien

$$q' = q \left( \frac{r}{R} \right)^3.$$



**FIGURA 27-12.** Variación con el radio del campo eléctrico debido a una distribución de carga esférica uniforme, de radio  $R$ . La variación para  $r > R$  se aplica a cualquier distribución de carga con simetría esférica, en tanto que  $r < R$  se aplica sólo a una distribución uniforme.

donde  $\frac{4}{3}\pi R^3$  es el volumen de la distribución de carga esférica. Entonces, la expresión correspondiente a  $E_r$  se transforma en

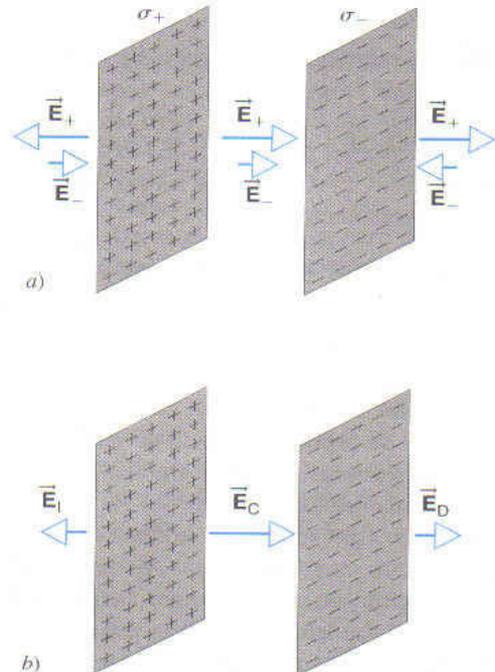
$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3} \quad (\text{esfera uniforme, } r < R). \quad (27-17)$$

en concordancia con la ecuación 26-24. Según lo previsto, esta ecuación se vuelve cero cuando  $r = 0$ . La ecuación 27-17 se aplica *exclusivamente* si la densidad de carga es uniforme independientemente de  $r$ . Adviértase que las ecuaciones 27-15 y 27-17 arrojan el mismo resultado, como deberían, con los puntos en la superficie de la distribución de carga (es decir, cuando  $r = R$ ). La figura 27-12 muestra el campo eléctrico en los puntos con  $r < R$  (dado por la Ec. 27-17) y en los puntos con  $r > R$  (dado por la Ec. 27-15).

**PROBLEMA RESUELTO 27-3.** La figura 27-13a muestra porciones de dos grandes hojas cargadas con densidades uniformes de carga superficial de  $\sigma_+ = +6.8 \mu\text{C}/\text{m}^2$  y  $\sigma_- = -4.3 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Encuentre el campo eléctrico  $\vec{E}$  situado a la izquierda de las hojas, entre ellas y a su derecha.

**Solución** Nuestra estrategia consiste en ocuparnos de cada hoja por separado y sumar luego los campos eléctricos resultantes, aplicando el principio de superposición. De acuerdo con la ecuación 27-12, en la hoja positiva tenemos

$$E_+ = \frac{\sigma_+}{2\epsilon_0} = \frac{6.8 \times 10^{-6} \text{ C}/\text{m}^2}{(2)(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)} = 3.84 \times 10^5 \text{ N/C}.$$



**FIGURA 27-13.** Problema resuelto 27-3. a) Dos grandes hojas paralelas transportan distintas distribuciones de carga  $\sigma_+$  y  $\sigma_-$ . Los campos  $\vec{E}_+$  y  $\vec{E}_-$  deben ser producidos por cada hoja si los otros no están presentes. b) Campos netos en las regiones vecinas a la izquierda (I), al centro (C) y a la derecha (D) de las hojas, calculados a partir de la suma vectorial de  $\vec{E}_+$  y  $\vec{E}_-$  en cada región.

De manera semejante en la hoja negativa la magnitud del campo es

$$E_- = \frac{|\sigma_-|}{2\epsilon_0} = \frac{4.3 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2}{(2)(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)} = 2.43 \times 10^5 \text{ N/C.}$$

En la figura 27-13a se ven estos campos a la izquierda de las hojas, entre ellas y a la derecha de las hojas.

Los campos resultantes en las tres regiones se obtienen de la suma vectorial de  $\vec{E}_+$  y  $\vec{E}_-$ . En la parte izquierda de las hojas tenemos (suponiendo que los componentes de  $\vec{E}$  en la figura 27-13 son positivos si  $\vec{E}$  apunta hacia la derecha y que son negativos si  $\vec{E}$  apunta hacia la izquierda).

$$E_L = -E_+ + E_- = -3.84 \times 10^5 \text{ N/C} + 2.43 \times 10^5 \text{ N/C} \\ = -1.4 \times 10^5 \text{ N/C.}$$

El campo eléctrico resultante (negativo) en esta región apunta hacia la izquierda como se indica en la figura 27-13b. A la derecha de las hojas, el campo eléctrico posee la misma magnitud, pero apunta hacia la derecha en la figura.

Entre las hojas la suma de los dos campos nos da

$$E_C = E_+ + E_- = 3.84 \times 10^5 \text{ N/C} + 2.43 \times 10^5 \text{ N/C} \\ = 6.3 \times 10^5 \text{ N/C.}$$

Fuera de las hojas, el campo eléctrico se comporta como el producido por una hoja simple cuya densidad de carga superficial es  $\sigma_+$  o  $\sigma_-$  o  $2.5 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$ . Así lo confirma el patrón de campo de la figura 27-13b. En los ejercicios 14 y 15 podrá investigar el caso en que dos densidades de este tipo poseen la misma magnitud y signo opuesto, así como el caso en que tienen magnitud y signo iguales.

## 27-6 LEY DE GAUSS Y LOS CONDUCTORES

Hemos visto que, al usar la ley de Gauss, se obtiene el campo eléctrico en varias distribuciones de carga muy asimétrica. También nos sirve para deducir las propiedades de los conductores que transportan una carga neta. He aquí una de las propiedades:

*Un exceso de carga puesta en un conductor aislado se dirige en su totalidad hacia la superficie externa del conductor. Ninguna parte del exceso se encuentra en el cuerpo del conductor.*

Veamos ahora lo que sucede cuando colocamos una cantidad de carga eléctrica en un conductor aislado. En teoría, las cargas pueden depositarse en cualquier parte de él, aun en lo profundo de su interior. En un principio hay un campo eléctrico dentro del conductor debido a las cargas. Produce fuerzas en ellas que las hacen redistribuirse. Muy pronto (en un lapso de  $10^{-9}$  s), el campo eléctrico se vuelve cero y las cargas dejan de moverse. Es el estado que llamamos *equilibrio electrostático*. Si el campo del interior fuera no cero, los electrones de conducción en el metal experimentarían una fuerza y se observarían cargas en movimiento (una corriente eléctrica). Puesto que no las observamos, concluimos que el campo eléctrico es cero en el interior.

No olvide que aquí estamos considerando sólo un conductor "aislado", es decir, un conductor libre de influencias externas. Un alambre que lleve una corriente no puede considerarse conductor aislado, pues ha de conectarse a un agente externo como una batería. El campo eléctrico en el alambre no es cero, el alambre *no* está en equilibrio electrostático y las conclusiones extraídas de esta sección no se aplican al alambre.

Si aceptamos que el campo eléctrico en el interior del conductor es cero en condiciones electrostáticas, la ley de Gauss afirma que la carga en el conductor ha de hallarse en su superficie externa. La figura 27-14a muestra un conductor de forma arbitraria, quizá una masa de cobre, que tiene una carga neta  $q$  y que cuelga de un hilo aislante. Se dibujó una superficie gaussiana dentro de la superficie externa del conductor.

Si el campo eléctrico es cero en todo el interior del conductor, también lo será en todas las partes de la superficie gaussiana que se encuentra enteramente dentro del conductor. Ello significa que el flujo a través de estas superficies es cero. Entonces la ley de Gauss nos permite concluir que la carga neta encerrada por la superficie gaussiana ha de ser cero. En caso de que no haya carga en el interior de esta superficie, deberá estar fuera de ella; en otras palabras, la carga ha de hallarse en la superficie externa del conductor.

¿Por qué es cero el campo eléctrico dentro del conductor? Supóngase que de alguna manera pudiésemos "congelar" las cargas en la superficie —quizá introduciéndolas en una delgada capa de plástico—, mientras eliminamos el conductor por completo dejando sólo una delgada capa de carga. El campo eléctrico no cambiará en absoluto; seguirá siendo cero en todo el interior del cascarón. Esto demuestra que el campo eléctrico proviene de las cargas y no del conductor. Éste se limita a ofrecer una trayectoria para que las cargas puedan moverse fácilmente a la posición donde generan un campo eléctrico neto de cero dentro del conductor.

### La carga en las superficies interiores

Hasta ahora nos hemos ocupado de la carga en la superficie externa de un conductor sólido. Supóngase que éste tiene una cavidad interna como la que se aprecia en la figura 27-14b. ¿Aparecerá la carga también en la superficie de la cavidad?

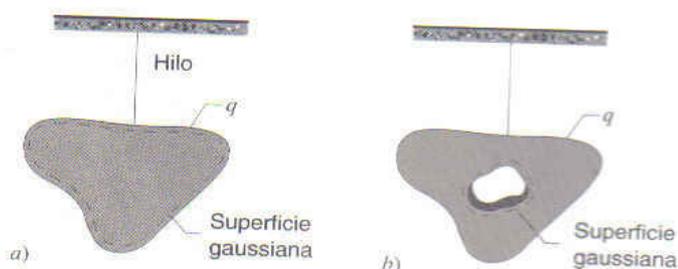


FIGURA 27-14. a) Un conductor metálico aislado que tiene una carga  $q$  cuelga de un hilo. Se dibujó una superficie gaussiana dentro de la superficie del conductor. b) Una cavidad interna del conductor está rodeada por una superficie gaussiana diferente.

Es lógico suponer lo siguiente: si se excava material eléctricamente neutro para formar la cavidad, no se modificará la distribución de carga en la superficie externa ni el campo eléctrico del interior. La ley de Gauss puede usarse en una prueba cuantitativa.

Dibujamos una superficie gaussiana que rodee la cavidad, cerca de la superficie pero dentro del conductor, como se indica en la figura 27-14b. Como  $\vec{E} = 0$  en todo el interior del conductor, no puede haber flujo en ella. Por tanto, conforme a la ley de Gauss la superficie no puede encerrar carga neta alguna; así que tampoco puede haber carga en la superficie de la cavidad interior del conductor aislado.

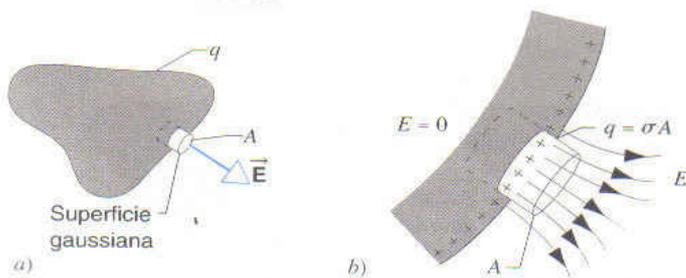
Si introducimos un objeto con carga  $q'$  en la cavidad (de modo que el conductor ya no pueda ser calificado de aislado), la ley de Gauss requiere todavía que la carga neta dentro de la superficie gaussiana sea cero. En este caso, la carga  $-q'$  ha de ser atraída a la superficie de la cavidad para que la carga neta siga siendo cero en ella. Si el conductor externo transporta inicialmente una carga neta  $q$ , una carga de  $q + q'$  aparecerá en su superficie externa y, por lo mismo, la carga neta no cambiará.

## El campo eléctrico fuera de un conductor

Aunque el exceso de carga en un conductor aislado se mueve enteramente en su superficie, en general, no se distribuye uniformemente por ella salvo en un conductor esférico aislado. Dicho de otra manera, la densidad de carga superficial  $\sigma (= dq/dA)$  varía de punto en punto a lo largo de esta superficie.

Podemos recurrir a la ley de Gauss para encontrar una relación —en cualquier punto superficial— entre la densidad de carga superficial  $\sigma$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$  fuera de la superficie en ese mismo punto. La figura 27-15a muestra una superficie cilíndrica gaussiana corta y gruesa; el área (pequeña) de sus dos tapas extremas es  $A$ . Las tapas que están en los extremos son paralelas a la superficie: una se encuentra enteramente dentro del conductor, y la otra completamente afuera. Las paredes cilíndricas cortas son perpendiculares a la superficie del conductor. Una vista ampliada de la superficie gaussiana se muestra en la figura 27-15b.

El campo eléctrico fuera del conductor aislado y cargado en equilibrio electrostático debe formar ángulos rectos con la



**FIGURA 27-15.** a) Una pequeña superficie gaussiana se colocó sobre la superficie de un conductor cargado. b) Vista ampliada de la superficie gaussiana que encierra una carga  $q$  igual a  $\sigma A$ .

superficie del conductor. De no ser así, habría un componente de  $\vec{E}$  situado en la superficie y produciría corrientes superficiales que redistribuirían las cargas superficiales. Por tanto,  $\vec{E}$  es perpendicular a la superficie del conductor, y el flujo a través de la tapa terminal de la superficie gaussiana de la figura 27-15b es  $EA$ . El que pasa por el interior de la tapa es cero, ya que  $\vec{E} = 0$  en todos los puntos del conductor. El flujo a través de las paredes cilíndricas también es cero, porque las líneas de  $\vec{E}$  son paralelas a la superficie, de modo que no pueden atravesarla. La carga  $q$  encerrada por la superficie gaussiana es  $\sigma A$ .

Entonces el flujo total puede calcularse así

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_{\text{tapa exterior}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{tapa interior}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{paredes laterales}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= EA + 0 + 0 = EA.\end{aligned}$$

Ahora el campo eléctrico se obtiene aplicando la ley de Gauss:

$$\epsilon_0 \Phi_E = q,$$

y, al sustituir los valores del flujo y las cargas encerradas  $q (= \sigma A)$ , obtenemos

$$\epsilon_0 EA = \sigma A$$

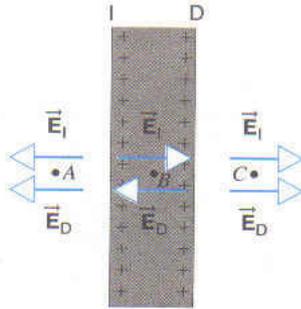
o

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (27-18)$$

Compare el resultado anterior con la ecuación 27-12 referente al campo eléctrico cercano a una hoja de carga:  $E = \sigma/2\epsilon_0$ . El campo eléctrico que se encuentra cerca de un conductor es el *doble* de que esperaríamos obtener, si consideráramos que el conductor es una hoja con carga, incluso en puntos muy cercanos a la superficie, donde el ambiente inmediato *no* se parece a una hoja con carga. ¿Cómo podemos interpretar la diferencia entre los dos casos?

Una hoja con carga se construye esparciendo cargas en un lado de una capa delgada de plástico. Las cargas se adhieren donde llegan y no pueden moverse. No es posible cargar un conductor en la misma forma. Podemos imaginar que la superficie del conductor está dividida en dos secciones: la región cercana al sitio donde queremos encontrar el campo eléctrico y el resto del conductor. Si nos aproximamos lo bastante a él en la figura 27-15, la región cercana a la superficie gaussiana puede considerarse como una hoja cargada y aportará una cantidad  $E = \sigma/2\epsilon_0$  al campo eléctrico. No obstante, puede demostrarse que la carga en el resto del conductor aporta esa misma cantidad. El campo eléctrico total es la suma de las dos contribuciones, o sea  $\sigma/\epsilon_0$ .

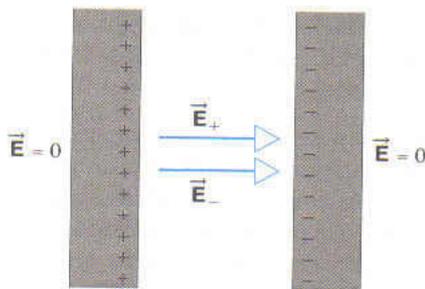
Esto podemos verlo muy directamente en el caso de una placa delgada de un conductor. Si esparcimos la carga  $q$  por todas partes del plano, se distribuirá en *ambas* superficies de ella como se aprecia en la figura 27-16. Cabe, pues, esperar



**FIGURA 27-16.** Carga eléctrica cerca de una hoja conductora delgada. Nótese que ambas superficies tienen carga. Los campos  $\vec{E}_I$  y  $\vec{E}_D$  generados, respectivamente, por las cargas de las superficies izquierda y derecha se refuerzan en los puntos A y C; se cancelan en los puntos B del interior de las hojas.

encontrar la carga  $q/2$  y una densidad de carga  $\sigma = q/2A$  en las superficies de la placa. Podemos considerar cada superficie como un hoja con carga, la cual (de acuerdo con la Ec. 27-12) crea un campo eléctrico  $E = \sigma/2\epsilon_0 = q/4A\epsilon_0$ . Cerca de la placa (en los puntos A o C de la figura 27-16), los campos debido a las superficies izquierda y derecha son iguales y se suman para darnos un campo eléctrico total de  $E = q/4A\epsilon_0 + q/4A\epsilon_0 = q/2A\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0$ . En el interior de la placa (punto B), los campos se hallan en dirección opuesta y suman cero, como cabe esperar en el interior de un conductor.

Supóngase que acercamos a la primera placa una segunda que transporta una carga  $-q$ . Ahora el conductor original ya no puede considerarse “aislado”, y la carga en su superficie externa deja de estar distribuida uniformemente. Existe una atracción entre las cargas positivas en una placa y las negativas en la otra que aproxima las cargas a la superficie de las placas que están una frente a otra (Fig. 27-17). Las superficies tienen carga  $q$  (en vez de  $q/2$ ), y la densidad de carga  $\sigma = q/A$ . Consideradas como hojas de carga, producen un campo eléctrico  $E = \sigma/2\epsilon_0 = q/2A\epsilon_0$  de acuerdo con la ecuación 27-12. En la región situada entre ellas, las placas positiva y negativa generan campos eléctricos de igual magnitud y dirección idéntica, de manera que el campo eléctrico neto entre las placas es  $E = \sigma/\epsilon_0 = q/A\epsilon_0$ . Esto es el campo eléctrico de un capacitor de placas paralelas que se observa en la figura 27-17.



**FIGURA 27-17.** Dos placas delgadas conductoras tienen cargas iguales y opuestas.  $\vec{E}_+$  es el campo producido por la placa de carga positiva y  $\vec{E}_-$  es el producido por la placa de carga negativa.

**PROBLEMA RESUELTO 27-4.** El campo eléctrico situado arriba de la superficie del tambor cargado de una fotocopiadora tiene una magnitud  $E$  de  $2.3 \times 10^5$  N/C. ¿Cuál es la densidad de carga superficial en el tambor si es un conductor?

**Solución** Con base en la ecuación 27-18 tenemos

$$\sigma = \epsilon_0 E = (8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2.3 \times 10^5 \text{ N/C}) = 2.0 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2 = 2.0 \mu\text{C/m}^2.$$

**PROBLEMA RESUELTO 27-5.** El campo eléctrico promedio que normalmente se encuentra en la atmósfera terrestre por encima de su superficie posee una magnitud aproximada de 150 N/C, que se dirige hacia abajo (radialmente hacia el interior apuntando al centro de la Tierra). ¿Qué carga superficial neta total tiene la Tierra? Suponga que ésta es un conductor?

**Solución** Las líneas de fuerza terminan en cargas negativas; por eso, si el campo eléctrico de la Tierra apunta hacia abajo, su densidad promedio de carga superficial  $\sigma$  debe ser negativa. A partir de la ecuación 27-18 obtenemos

$$\sigma = \epsilon_0 E = (8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(-150 \text{ N/C}) = -1.33 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2.$$

La carga total de la Tierra  $q$  es la densidad de carga superficial multiplicada por  $4\pi R^2$ , el área superficial de la Tierra (supuestamente esférica). Por tanto,

$$q = \sigma 4\pi R^2 = (-1.33 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2)(4\pi)(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 = -6.8 \times 10^5 \text{ C} = -680 \text{ kC}.$$

**PROBLEMA RESUELTO 27-6.** Un largo conductor cilíndrico hueco (radio interno  $a$  y de radio externo  $b$ ) está rodeado por una larga capa coaxial cilíndrica conductora (radio interno  $c$  y radio externo  $d$ ), como se aprecia en la figura 27-18. El conductor interno lleva una carga positiva  $2q$  y el externo una carga  $-3q$ . Calcule la carga que se encuentra en la superficie de los dos conductores.

**Solución** La ley de Gauss da resultados similares en las geometrías cilíndrica y esférica. En particular, el campo eléctrico generado por el conductor externo en la región  $r < c$  es cero, como hemos demostrado en el caso del cascarón esférico de carga. Las cargas del conductor externo no producen un campo eléctrico en el sitio del conductor interno, que por ello puede considerarse “aislado” dentro de este contexto. Si tratamos como aislado al conductor interno, concluir-



**FIGURA 27-18.** Problema resuelto 27-6. Dos cascarones conductores cilíndricos coaxiales.

mos que la carga ha de hallarse enteramente en su superficie externa. En consecuencia, no hay carga en la superficie  $a$  y una carga positiva  $2q$  en la superficie  $b$ .

Si dibujáramos una superficie coaxial cilíndrica gaussiana por el interior del cilindro externo ( $c < r < d$ ), podríamos aplicar la ley de Gauss y concluir que el flujo a través de ella es cero. El flujo que cruza la parte curva de la superficie es cero, porque  $E = 0$  en todo el interior del conductor; el que cruza los extremos planos también lo es, porque el campo para  $b < r < c$  debe ser radial y, por lo mismo, paralelo a las superficies planas. Conforme a la ley de Gauss, ello significa que la carga total dentro de la superficie gaussiana será cero. Sabemos que hay una carga  $2q$  en el conductor interno, por lo cual, para hacer cero la carga neta, tiene que existir una carga  $-2q$  en la superficie  $c$ . Dado que la carga total en el cilindro externo es  $-3q$ , la carga restante de  $-q$  debe aparecer en la superficie  $d$ .

Nótese que en el conductor externo influye la carga del conductor interno y no puede considerarse aislado; así que la carga del conductor no se encuentra toda en su superficie externa.

## 27-7 PRUEBAS EXPERIMENTALES DE LA LEY DE GAUSS Y DE LA DE COULOMB

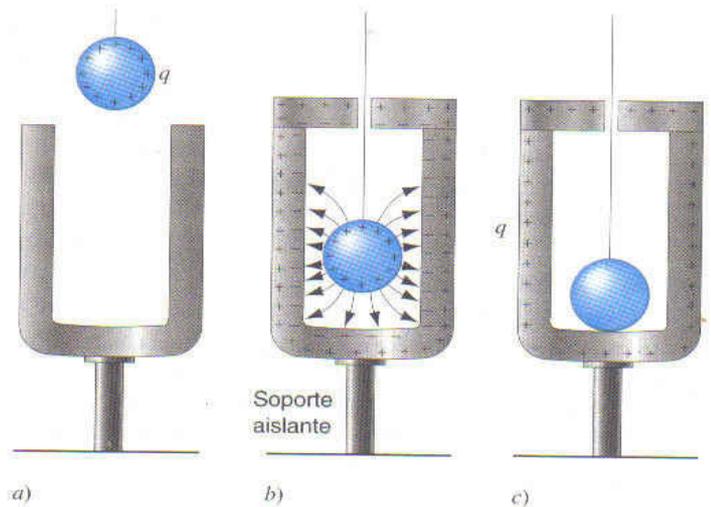
En la sección 27-6 dedujimos que el exceso de carga en un conductor ha de encontrarse sólo en su superficie externa. No puede existir carga dentro de su volumen ni en la superficie de una cavidad interna vacía. Este resultado se consiguió directamente de la ley de Gauss. Por consiguiente, probar si toda la carga efectivamente se encuentra en la superficie externa es una forma de demostrar la ley de Gauss. Si la carga está dentro del conductor o en una superficie interior (como la cavidad de la Fig. 27-14b), entonces no se cumple la ley de Gauss. En la sección 27-4 se demostró que la ley de Coulomb se deduce directamente de la de Gauss. Por eso, si ésta no se cumple, lo mismo sucede con la de Coulomb. En concreto, la ley de la fuerza, quizá, no sea exactamente una ley de cuadrados inversos. El exponente de  $r$  podría diferir de 2 en una magnitud pequeña  $\delta$ , por lo cual, quizá, el campo eléctrico radial sería

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^{2+\delta}}, \quad (27-19)$$

donde  $\delta$  es exactamente cero, si se cumplen las leyes de Coulomb y de Gauss.

La medición directa de la fuerza entre dos cargas, descritas en el capítulo 25, no ofrece suficiente precisión para probar si  $\delta$  es cero más allá de un pequeño porcentaje. La observación de la carga dentro de un conductor nos da los medios para realizar una prueba que es mucho más precisa, según veremos luego.

En teoría, el experimento sigue el procedimiento descrito gráficamente en la figura 27-19. Un bola metálica cargada cuelga de un hilo aislante; se baja y se introduce en una lata metálica que se halla sobre una base aislante. Cuando se hace que entren en contacto la bola y el interior de la lata, los dos objetos forman un *conductor simple*; si la ley de Gauss es válida,



**FIGURA 27-19.** Arreglo concebido por Benjamín Franklin para demostrar que la carga colocada en un conductor se dirige a su superficie. *a)* Una bola metálica se baja y se introduce en una lata metálica sin carga. *b)* La bola se halla dentro de la lata y se le pone una cubierta. Se muestran las líneas del campo entre la bola y la lata sin carga. La bola atrae las cargas de signo contrario hacia el interior de la lata. *c)* Cuando la bola toca la lata, las dos forman un solo conductor y la carga neta fluye en dirección de la superficie externa. Entonces la bola puede quitarse de la lata y se demuestra que está completamente descargada, con lo cual se prueba que la carga ha de haber sido transferida a la lata.

toda la carga proveniente de la bola ha de dirigirse al exterior del conductor combinado, como se indica en la figura 27-19c. Al quitar la bola, ya no debería portar carga alguna. Si se ponen en contacto otros objetos metálicos aislados con el interior de la lata, no debería transferirse carga alguna a ellos. Sólo en el exterior de la lata será posible la transferencia de carga.

Al parecer, Benjamin Franklin fue el primero en observar que no había carga en el interior de una lata metálica aislada. En 1755 escribió a un amigo:

Electrifiqué una lata de plata en una base eléctrica; después la baje y la introduje en una bola de corcho, de una pulgada de diámetro aproximadamente, que colgaba de un hilo de seda, hasta que el corcho tocó el fondo de la lata. La bola no era atraída hacia el interior de ella como hubiera sido atraída al exterior. Y aunque tocaba el fondo, al sacarla no estaba electrificada con el contacto, como debería haber ocurrido al entrar en contacto con el exterior. El hecho es extraordinario. Debe tener una explicación; yo todavía no la sé....

Unos 10 años más tarde Franklin mencionó este "hecho extraordinario" a su amigo Joseph Priestley (1733-1804). En 1767 (unos 20 años antes de los experimentos de Coulomb), Priestley comprobó la observación de Franklin y, con admirable penetración, descubrió que la ley de fuerza de cuadrados inversos se deducía de ella. Así pues, el método indirecto no sólo es más exacto que el directo expuesto en la sección 25-4, sino que además se llevó a cabo antes.

Razonando por analogía con la gravitación, Priestley señaló lo siguiente: el hecho de que ninguna fuerza eléctrica operase sobre la bola de corcho de Franklin cuando estaba rodeada por una gran lata metálica recuerda el hecho (Sec. 14-15) de que ninguna fuerza gravitacional actúa sobre una partícula dentro de un cascarón esférico de materia; si la gravitación obedece una ley de cuadrados inversos, quizá la fuerza eléctrica también. Teniendo en cuenta el experimento de Franklin, Priestley razonó así:

¿Podemos inferir de esto que la atracción de la electricidad está sujeta a las mismas leyes que la gravitación y que, por tanto, a los cuadrados de la distancia; como se demuestra fácilmente que si la Tierra tuviera la forma de un cascarón, un cuerpo en su interior no sería atraído a un lado más que a otro?

Nótese que el conocimiento de un tema (la gravitación) ayuda a entender otro (electrostática).

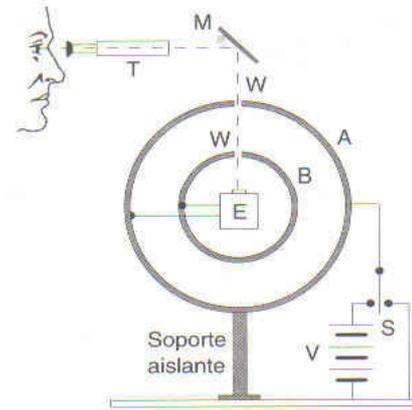
Michael Faraday también llevó a cabo experimentos diseñados para demostrar que el exceso de carga se encuentra en la superficie externa de un conductor. Más concretamente, construyó una gran caja cubierta de metal, que montó en soportes aislantes y cargó con un potente generador electrostático. En su propias palabras:

Me metí en el cubo y viví allí; usé velas iluminadas, electrómetros y otras pruebas de los estados eléctricos, pero no pude observar la mínima influencia en ellos... aunque el exterior del cubo siempre presentaba una potente carga y grandes chispas y escobillas se desprendían en toda su superficie externa.

La ley de Coulomb es importantísima en física; si  $\delta$  en la ecuación 27-19 no es cero, nos será muy difícil entender el electromagnetismo y la física cuántica. La mejor manera de medir  $\delta$  consiste en averiguar mediante experimentos si un exceso de carga, colocada en un conductor aislado, se desplaza, o no, *enteramente* hacia la superficie externa.

Los experimentos modernos, realizados con notable precisión, han demostrado que, si  $\delta$  en la ecuación 27-19 no es cero, será sin duda, pequeña en extremo. En la tabla 27-1 se resumen los resultados de los experimentos más importantes.

En la figura 27-20 se incluye el dibujo del aparato con que Plimpton y Lawton midieron  $\delta$ . Consta fundamentalmen-



**FIGURA 27-20.** Versión moderna y más precisa del aparato de la figura 27-19, también diseñada para verificar que la carga se encuentra sólo en la superficie externa de un conductor. Se pone la carga en una esfera A colocando el interruptor S a la izquierda; se emplea el electrómetro sensible E para buscar una carga que pudiera desplazarse hacia la esfera interna B. Se prevé que toda la carga permanecerá en la superficie externa (esfera A).

te de dos cascarones metálicos concéntricos, A y B; el segundo mide 1.5 m de diámetro. El cascarón interno contiene un electrómetro sensible E conectado de modo que indique si una carga se mueve entre los cascarones A y B. Si éstos se conectan eléctricamente, cualquier carga colocada en ellos debería encontrarse enteramente en el cascarón A, si se formuló correctamente la ley de Gauss y, por tanto, la de Coulomb.

Al mover el interruptor S a la izquierda, la batería V podría poner una carga importante en el conjunto de esferas. Cuando una parte de ella se desplaza hacia la capa B, pasaría por el electrómetro y causaría una deflexión observable ópticamente por medio de un telescopio T, un espejo M y unas ventanas W.

Pero no se observa efecto alguno cuando movemos el interruptor S alternativamente de derecha a izquierda, conectando el conjunto de cascarones a la batería o a tierra. Como Plimpton y Lawton conocían la sensibilidad de su electrómetro, calcularon que  $\delta$  en la ecuación 27-19 no es cero por menos de  $2 \times 10^{-9}$ , un valor efectivamente muy pequeño. Pero desde su experimento los límites en  $\delta$  han sido mejorados no más de siete órdenes de magnitud por investigadores que utilizaron versiones más detalladas y precisas de este aparato básico.

**TABLA 27-1** Pruebas de la ley de cuadrados inversos de Coulomb

Experimentadores	Fecha	$\delta$ (Ec. 27-19)
Franklin	1755	
Priestley	1767	... según los cuadrados ...
Robson	1769	< 0.06
Cavendish	1773	< 0.02
Coulomb	1785	... un pequeño porcentaje a lo máximo
Maxwell	1873	< $5 \times 10^{-5}$
Plimpton y Lawton	1936	< $2 \times 10^{-9}$
Bartlett, Goldhagen y Phillips	1970	< $1.3 \times 10^{-13}$
Williams, Faller y Hill	1971	< $1.0 \times 10^{-16}$

## OPCIÓN MÚLTIPLE

### 27-1 ¿A qué se refiere la ley de Gauss?

#### 27-2 El flujo de un campo vectorial

- Un campo de velocidad  $\vec{v}$  existe en una región del espacio. Una superficie cerrada  $S$  se divide en cuatro secciones,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$ . Una fuente se encuentra fuera de ella y cerca de  $S_1$ ; pueden haber otras fuentes o sumideros cerca de las superficies  $S_n$ , pero ninguna dentro de  $S$ .
  - ¿Qué puede concluirse respecto a  $\Phi_1$ , el flujo que atraviesa  $S_1$ ?
    - $\Phi_1 > 0$
    - $\Phi_1 = 0$
    - $\Phi_1 < 0$
  - Nada puede concluirse respecto a  $\Phi_1$  sin información adicional.
  - ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta en relación con el flujo que atraviesa las cuatro superficies?
    - Por lo menos uno de los flujos  $\Phi_n$  ha de ser negativo.
    - Por lo menos uno de los flujos  $\Phi_n$  ha de ser positivo.
    - Por lo menos uno de los flujos  $\Phi_n$  ha de ser cero.
    - Si A es correcto también lo es B.
    - Puede ser correcto A o B, pero no ambos.
  - Las mediciones indican que  $\Phi_1 + \Phi_2 > 0$ . A partir de esta información se concluye que
    - $\Phi_3 = \Phi_4$ .
    - $\Phi_3 = -\Phi_4$ .
    - $\Phi_3 > \Phi_4$ .
    - $\Phi_3 < -\Phi_4$ .

#### 27-3 El flujo del campo eléctrico

- El flujo a través de una superficie de área  $A$  en un campo uniforme  $\vec{E}$  alcanza su máximo cuando
  - la superficie es paralela a  $\vec{E}$ .
  - la superficie es perpendicular a  $\vec{E}$ .
  - la superficie tiene forma de rectángulo.
  - la superficie tiene forma de cuadrado.
- Una superficie esférica cerrada de radio  $a$  se halla en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ . ¿Qué flujo eléctrico  $\Phi_E$  atraviesa la superficie?
  - $\Phi_E = 4\pi a^2 E$
  - $\Phi_E = \pi a^2 E$
  - $\Phi_E = 0$
  - $\Phi_E = 0$  no puede determinarse sin conocimientos adicionales.

#### 27-4 Ley de Gauss

- Considere dos superficies esféricas concéntricas,  $S_1$  con radio  $a$  y  $S_2$  con radio  $2a$ , ambas centradas en el origen. Hay una carga  $+q$  en el origen y ninguna otra. Compare el flujo  $\Phi_1$  que atraviesa  $S_1$  con el flujo  $\Phi_2$  que atraviesa  $S_2$ .
  - $\Phi_1 = 4\Phi_2$ .
  - $\Phi_1 = 2\Phi_2$ .
  - $\Phi_1 = \Phi_2$ .
  - $\Phi_1 = \Phi_2/2$ .
- Una superficie esférica cerrada  $S$  imaginaria de radio  $R$  se centra en el origen. Una carga positiva se halla inicialmente en el origen y el flujo por la superficie es  $\Phi_E$ . La carga positiva se mueve con lentitud desde el origen hasta el punto  $R/2$  del origen. Al hacer el flujo en  $S$ 
  - aumenta a  $4\Phi_E$ .
  - aumenta a  $2\Phi_E$ .
  - no se altera.
  - disminuye a  $\Phi_E/2$ .
  - disminuye a  $\Phi_E/4$ .
- ¿En qué condiciones puede el flujo eléctrico  $\Phi_E$  obtenerse en una superficie cerrada?
  - Si la magnitud de  $\vec{E}$  se conoce en todas las partes de la superficie.

- Si se especifica la carga total dentro de la superficie.
- Si se especifica la carga total fuera de la superficie.
- Sólo si se especifica la ubicación de las cargas puntuales dentro de la superficie.

- Una superficie esférica cerrada imaginaria  $S$  de radio  $R$  se centra en el origen. Una carga positiva  $+q$  se halla inicialmente en el origen y el flujo por la superficie es  $\Phi_E$ . Se agregan tres cargas más en el eje  $x$ :  $-3q$  en  $x = -R/2$ ,  $+5q$  en  $x = R/2$  y  $+4q$  en  $x = 3R/2$ . Ahora el flujo que pasa por  $S$  es
  - $2\Phi_E$ .
  - $3\Phi_E$ .
  - $6\Phi_E$ .
  - $7\Phi_E$ .
  - $\Phi_E$  no puede determinarse por no ser ya simétrico el problema.

#### 27-5 Aplicaciones de la ley de Gauss

- Un dipolo se encuentra en el eje  $x$ , con la carga positiva  $+q$  en  $x = +d/2$  y la carga negativa en  $-d/2$ . El flujo eléctrico  $\Phi_E$  que cruza el plano  $yz$  en la mitad de la separación de las cargas
  - es cero.
  - depende de  $d$ .
  - depende de  $q$ .
  - depende de ambos, de  $q$  y de  $d$ .
- Acercamos la carga positiva a la superficie de la pregunta 8 de opción múltiple. A medida que la superficie se mueve, el flujo  $\Phi_E$  a través de ella
  - aumenta.
  - disminuye.
  - no se altera.
- Se hace girar la superficie de la pregunta 8 de opción múltiple, de manera que la normal a ella ya no es paralela al eje  $x$ . Conforme se mueve la superficie, el flujo  $\Phi_E$  a través de la superficie
  - aumenta.
  - disminuye.
  - no se altera.
- ¿En cuál de los siguientes problemas es útil la ley de Gauss?
  - Calcular el campo eléctrico en varios puntos de la superficie de un cilindro uniformemente cargado de longitud finita.
  - Calcular el flujo eléctrico que pasa por la superficie terminal de un cilindro de carga uniforme.
  - Calcular el campo eléctrico en varios puntos de la superficie de un cilindro de carga uniforme.
  - Calcular el flujo eléctrico que pasa por un lado de un cubo de carga uniforme.

#### 27-6 Ley de Gauss y los conductores

- Una bola conductora hueca lleva una carga positiva  $+q$  fija en el centro. La bola no tiene carga neta.
  - La carga en la superficie interna de la bola es
    - $+2q$ .
    - $+q$ .
    - $-q$ .
    - 0.
  - La carga en la superficie externa de la bola es
    - $+2q$ .
    - $+q$ .
    - $-q$ .
    - 0.
- Supóngase que una carga neta  $+q$  se coloca en la bola de la pregunta de opción múltiple 12; la carga puntual permanece en su centro.
  - La carga en la superficie interna de la bola es
    - $+2q$ .
    - $+q$ .
    - $-q$ .
    - 0.
  - La carga en la superficie externa de la bola es
    - $+2q$ .
    - $+q$ .
    - $-q$ .
    - 0.

14. La carga positiva en el centro de la bola de la pregunta de opción múltiple 13 es sacada del centro y acercada a la superficie interna, pero sin que la toque.

- a) La carga total de la superficie interna de la bola  
 A) aumenta. B) disminuye.  
 C) no se altera.  
 D) cambia según cuánto se acerque la bola a la superficie interna.

b) La carga total en la superficie externa de la bola

- A) aumenta. B) disminuye.  
 C) no se altera.  
 D) cambia según cuánto se acerque la bola a la superficie interna.

### 27-7 Pruebas experimentales de la ley de Gauss y de la de Coulomb

## PREGUNTAS

- ¿En qué se basa la afirmación de que las líneas de fuerza eléctrica comienzan y terminan sólo en cargas eléctricas?
- A las cargas positivas se les llama, en ocasiones, "fuentes" y a las negativas, "sumideros" del campo eléctrico. ¿Cómo justificaría esta terminología? ¿Tiene fuentes o sumideros el campo gravitacional?
- Por analogía con  $\Phi_E$ , ¿cómo definiría el flujo  $\Phi_g$  de un campo gravitacional? ¿Cuál es el flujo gravitacional a través de las fronteras de un cuarto, suponiendo que no contenga materia? ¿En la superficie esférica que rodea de cerca a la Tierra? ¿Y cuál sería en una superficie esférica del tamaño de la órbita lunar?
- Considere la superficie gaussiana que rodea parte de la distribución de carga que aparece en la figura 27-21. a) ¿Cuál de las cargas contribuye al campo eléctrico en el punto P? b) ¿El valor obtenido del flujo que pasa por la superficie, que se calculó usando solo el campo producido por  $q_1$  y  $q_2$ , será mayor, igual o menor que el conseguido empleando el campo total?

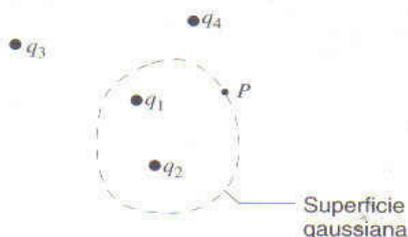


FIGURA 27-21. Pregunta 4.

- Suponga que en alguna región se descubre que el campo eléctrico tiene una dirección constante, pero cuya fuerza se reduce en esa dirección. ¿Qué concluirá respecto a la carga en la región? Dibuje las líneas de fuerza.
- ¿Es rigurosamente cierto que la ley de Gauss establece lo siguiente: el número total de líneas de fuerza que cruzan una superficie cerrada hacia fuera es proporcional a la carga positiva neta delimitada por la superficie?
- Se pone una carga puntual en el centro de una superficie esférica gaussiana. ¿Cambia  $\Phi_E$  a) si la superficie es sustituida por un cubo del mismo volumen; b) si la esfera es reemplazada por un cubo de una décima del volumen; c) si se mueve la carga fuera del centro en la esfera original, permaneciendo todavía en el in-

terior; d) si se mueve la carga fuera de la esfera original; e) si una segunda carga se coloca cerca y fuera de la esfera original; y f) si una segunda carga se pone dentro de la superficie gaussiana?

- En la ley de Gauss  $\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q$ , ¿es  $\vec{E}$  necesariamente el campo eléctrico atribuible a la carga  $q$ ?
- Una superficie encierra un dipolo eléctrico. ¿Qué puede decirse sobre  $\Phi_E$  en esta superficie?
- Suponga que una superficie gaussiana no encierra carga neta alguna. ¿Exige la ley de Gauss que  $\vec{E}$  sea cero en todos los puntos de la superficie? ¿Es verdad la afirmación contraria? Es decir, si  $\vec{E}$  es cero en todas las partes de la superficie, ¿requiere la ley de Gauss que no haya carga neta en el interior?
- ¿Es útil la ley de Gauss para calcular el campo originado por tres cargas situadas en los ángulos de un triángulo equilátero? Explique su respuesta afirmativa o negativa.
- Una carga total  $Q$  está distribuida uniformemente en un cubo con una longitud de lado  $a$ . ¿Está dado por  $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$  el campo eléctrico resultante en un punto externo P, a una distancia  $r$  del centro C del cubo? (Fig. 27-22). De no ser así, ¿puede  $E$  obtenerse construyendo una superficie cúbica concéntrica gaussiana? En caso contrario, explique por qué no. ¿Puede decir algo acerca de  $E$  si  $r \gg a$ ?

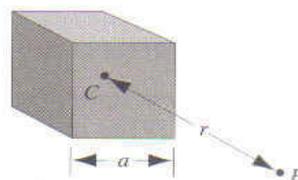


FIGURA 27-22 Pregunta 12.

- ¿Es  $\vec{E}$  necesariamente cero dentro de un globo de goma con carga eléctrica, si es a) esférico o b) tiene forma de salchicha? En cada forma suponga que la carga se distribuye uniformemente sobre la superficie. ¿Cómo cambiaría la situación si es que cambia, en caso de que el globo tuviera una capa delgada de pintura conductora en su superficie externa?
- Un globo esférico de goma tiene una carga que se distribuye uniformemente en su superficie. A medida que se infla el globo ¿cómo varía  $E$  en los puntos a) dentro del globo, b) en su superficie y c) fuera de él?

15. En la sección 27-4 hemos visto que la ley de Coulomb puede obtenerse de la de Gauss. ¿Significa eso necesariamente que ésta puede deducirse de aquélla?
16. ¿Se aplicará la ley de Gauss si el exponente de la de Coulomb no es exactamente 2?
17. Un gran conductor aislado y hueco tiene una carga positiva. Una pequeña bola metálica que lleva una carga negativa de la misma magnitud es bajada por un hilo a través de un orificio pequeño en la parte superior del conductor; se le permite tocar la superficie interna y luego se lo retira. ¿Cuál será entonces la carga en a) el conductor y en b) la bola?
18. ¿Podemos deducir del argumento de la sección 27-6 que los electrones de los alambres de la instalación eléctrica de una casa se desplazan por las superficies de ellos? Si su respuesta es negativa, explíquela.
19. En la sección 27-6 supusimos que  $\vec{E}$  es cero en todo el interior de un conductor aislado. Pero hay campos eléctricos muy grandes dentro del conductor en puntos cercanos a los electrones o a los núcleos. ¿Invalidó eso la prueba de la sección 27-4? Explique su respuesta.
20. ¿Requiere la ley de Gauss, tal como se aplicó en la sección 27-6, que todos los electrones de conducción en un conductor aislado estén en la superficie?
21. Una carga positiva  $q$  se halla en el centro de una esfera metálica hueca. ¿Qué carga aparece en a) su superficie interna y b) en su superficie externa? c) Si acercamos a ella un objeto metálico (sin carga), ¿cambiará esto sus respuestas a a) y b)? ¿Modificará la forma en que la carga se distribuye en la esfera?
22. Si una carga  $-q$  se distribuye uniformemente en la superficie de un delgado cascarón metálico esférico aislado de radio  $a$ , no habrá campo eléctrico en su interior. Si ahora ponemos una carga puntual  $+q$  en el centro de él tampoco habrá campo externo. Podemos desplazar esta carga una distancia  $d < a$  del centro, pero entonces el sistema adquiere un momento dipolar y crea un campo externo. ¿Cómo explica la energía que aparece en este campo?
23. ¿Cómo se elimina por completo el exceso de carga en un pequeño cuerpo conductor?
24. Explique por qué la simetría esférica de la figura 27-7 nos obliga a suponer que  $\vec{E}$  sólo tiene un componente radial en cualquier punto. (Sugerencia: imagine otros componentes, quizá a lo largo del equivalente de las líneas de longitud o latitud en la superficie terrestre. La simetría esférica exige que las líneas ofrezcan el mismo aspecto desde cualquier perspectiva. ¿Puede inventar algunas simetrías que cumplan con este criterio?)
25. Explique por qué la simetría de la figura 27-8 nos obliga a suponer que  $\vec{E}$  tiene sólo un componente radial en cualquier punto. Recuerde que en este caso el campo no sólo ha de presentar el mismo aspecto, sino que debe presentarlo aunque la figura se gire de un extremo a otro.
26. La carga total en una varilla cargada infinita es infinita. ¿Por qué no lo es también  $E$ ? Después de todo, según la ley de Coulomb si  $q$  es infinita, también lo es  $E$ .
27. Explique por qué la simetría de la figura 27-9 nos obliga a considerar que  $\vec{E}$  tiene un solo componente que se aleja de la hoja. ¿Por qué, por ejemplo, podría  $\vec{E}$  no tener un componente paralelo a la hoja? Recuerde que en este caso el campo no sólo ha de parecer el mismo desde cualquier punto de la hoja en cualquier dirección, sino que también debe parecerlo si la giramos alrededor de una línea perpendicular a ella.
28. El campo debido a una hoja infinita de carga es uniforme: tiene la misma fuerza en todos los puntos sin que importe su distancia de la carga superficial. Explique por qué es así, dado que la ley de Coulomb sigue la ley de cuadrados inversos.
29. Al penetrar nosotros una esfera uniforme de carga,  $E$  debería disminuir porque hay menos carga dentro de una esfera dibujada a través del punto de observación. En cambio,  $E$  podría aumentar porque estamos más cerca de la carga. ¿Qué efecto predomina y por qué?
30. Dada una distribución de carga esféricamente simétrica (no de densidad radial uniforme), ¿alcanza  $E$  necesariamente un máximo en la superficie? Comente las posibilidades?
31. ¿Es válida la ecuación 27-15 en la figura 27-11a, si a) hay una cavidad esférica concéntrica en el cuerpo, b) una carga puntual  $Q$  está en el centro de la cavidad y c) la carga  $Q$  se halla en su interior pero no en su centro?

## EJERCICIOS

### 27-1 ¿A qué se refiere la ley de Gauss?

### 27-2 El flujo de un campo vectorial

### 27-3 El flujo de un campo eléctrico

1. La superficie cuadrada de la figura 27-3 mide 3.2 mm por lado. Está inmersa en un campo eléctrico uniforme con  $E = 1800$  N/C. Las líneas del campo forman un ángulo de  $65^\circ$  con la normal "que apunta hacia afuera", como se muestra en la figura. Calcule el flujo que atraviesa la superficie.

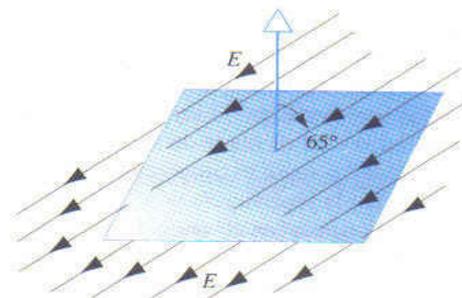


FIGURA 27-23. Ejercicio 1.

2. Un cubo con bordes de 1.4 m presenta la orientación que se indica en la figura 27-4, dentro de una región de un campo eléctrico uniforme. Calcule el flujo eléctrico que pasa por la cara derecha si el campo eléctrico está dado por *a*)  $(6 \text{ N/C})\hat{i}$ , *b*)  $(-2 \text{ N/C})\hat{j}$  y *c*)  $(-3 \text{ N/C})\hat{i} + (4 \text{ N/C})\hat{k}$ . *d*) Calcule el flujo total a través del cubo para esos campos.

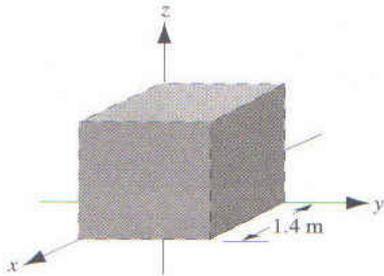


FIGURA 27-24. Ejercicio 2.

3. Calcule  $\Phi_E$  en *a*) la base plana y en *b*) la superficie curva de un hemisferio de radio  $R$ . El campo  $\vec{E}$  es uniforme y paralelo al eje del hemisferio; las líneas de  $\vec{E}$  entran por la base plana. (Utilice la normal que apunta hacia afuera.)

#### 27-4 Ley de Gauss

4. Separamos la carga de un conductor aislado originalmente sin carga sosteniendo muy cerca una varilla de carga positiva, como se indica en la figura 27-25. Calcule el flujo que pasa por las cinco superficies gaussianas mostradas. Suponga que la carga negativa inducida en el conductor es igual a la carga positiva  $q$  de la varilla.

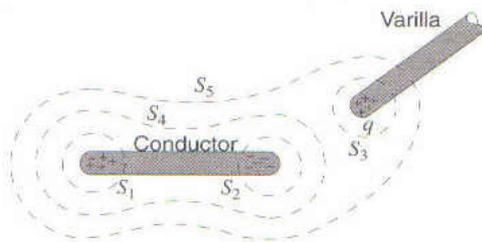


FIGURA 27-25. Ejercicio 4.

5. Una carga puntual de  $1.84 \mu\text{C}$  está en el centro de una superficie cúbica gaussiana, a 55 cm de un lado. Calcule  $\Phi_E$  a través de la superficie.
6. El flujo eléctrico neto que atraviesa las caras de un dado (un miembro de un par de dados) tiene una magnitud en unidades de  $10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$  igual al número  $N$  de puntos de la cara (1 a 6). El flujo se realiza hacia adentro con número  $N$  impares y hacia afuera con los números  $N$  pares. ¿Cuál es la carga neta dentro del dado?
7. Una carga puntual  $+q$  se halla a una distancia  $d/2$  de la superficie cuadrada de lado  $d$  y está arriba del centro del cuadrado como se indica en la figura 27-26. Determine el flujo eléctrico que atraviesa el cuadrado. (Sugerencia: imagine el cuadrado como la cara de un cubo con lado  $d$ .)

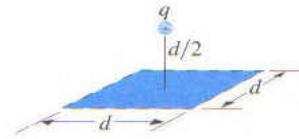


FIGURA 27-26. Ejercicio 7.

8. Una red para cazar mariposas se encuentra en un campo eléctrico uniforme como se ve en la figura 27-27. El borde, un círculo de radio  $a$ , está alineado de manera perpendicular al campo. Determine el campo eléctrico que cruza la red en relación con la normal hacia afuera.

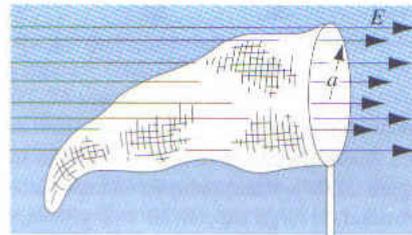


FIGURA 27-27. Ejercicio 8.

9. Con experimentos se descubre que el campo eléctrico en cierta región de la atmósfera terrestre se dirige verticalmente hacia abajo. En una altitud de 300 m el campo es de  $58 \text{ N/C}$  y a una altitud de 200 m es de  $110 \text{ N/C}$ . Calcule la magnitud neta de la carga contenida en un cubo de 100 m de lado que se encuentra a una altitud entre 200 y 300 m. No tenga en cuenta la curvatura de la Tierra.
10. Determine el flujo neto que atraviesa el cubo del ejercicio 2 y la figura 27-14 si el campo eléctrico está dado por *a*)  $\vec{E} = (3 \text{ N/C} \cdot \text{m})y\hat{j}$  y *b*)  $(-4 \text{ N/C})\hat{i} + [6 \text{ N/C} + (3 \text{ N/C} \cdot \text{m})y]\hat{j}$ . *c*) En cada caso, ¿cuánta carga contiene el cubo?
11. Una carga puntual  $q$  se coloca en un ángulo de un cubo de lado  $a$ . ¿Cuál es el flujo que pasa por las caras del cubo? (Sugerencia: aplique la ley de Gauss y los argumentos de simetría.)

#### 27-5 Aplicaciones de la ley de Gauss

12. Una línea infinita de carga produce un campo de  $4.52 \times 10^4 \text{ N/C}$  a una distancia de 1.96 m. Calcule la densidad de carga lineal.
13. *a*) El tambor de una fotocopiadora en el problema resuelto 27-4 tiene una longitud de 42 cm y un diámetro de 12 cm. ¿Cuál es su carga total? *b*) El fabricante desea producir una versión de escritorio de la máquina. Para ello hay que reducir el tamaño del tambor a una longitud de 28 cm y un diámetro de 8.0 cm. El campo eléctrico en la superficie del tambor debe permanecer inalterado. ¿Qué carga debe contener el nuevo tambor?
14. Dos hojas no conductoras grandes y delgadas de carga positiva están una frente a otra como se aprecia en la figura 27-28. ¿Qué magnitud tiene  $\vec{E}$  en los puntos *a*) a la izquierda de las hojas, *b*) entre ellas y *c*) a la derecha de las hojas? Suponga la misma densidad de carga superficial  $\sigma$  en las hojas. Considere sólo los puntos no cercanos a los bordes cuya distancia de ellas es pe-

queña comparada con las dimensiones de las hojas. (Sugerencia: consulte el Prob. res. 27-3.)

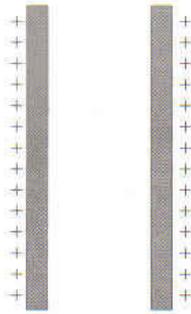


FIGURA 27-28. Ejercicio 14.

15. Dos grandes placas metálicas se encuentran una frente a otra como en la figura 27-29 y transportan en su superficie interna cargas con una densidad de carga superficial  $+\sigma$  y  $-\sigma$ , respectivamente. Calcule  $E$  en los puntos  $a$ ) a la izquierda de las placas,  $b$ ) entre ellas y  $c$ ) a la derecha de ellas. Considere sólo los puntos no cercanos a los bordes cuya distancia de las placas es pequeña comparada con las dimensiones de ellas. (Sugerencia: consulte el problema 27-3.)

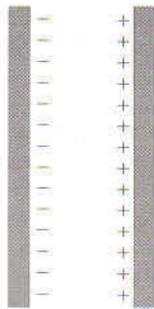


FIGURA 27-29. Ejercicio 15.

16. Un electrón permanece estacionario en un campo eléctrico dirigido hacia abajo en el campo gravitacional de la Tierra. Si el campo se debe a la carga en dos grandes placas conductoras paralelas, con carga opuesta y separadas por una distancia de 2.3 cm, ¿cuál es la densidad de carga superficial, supuestamente uniforme, en las placas?
17. Un alambre recto, delgado y muy largo transporta  $-3.60$  nC/m de carga negativa fija. Debe quedar rodeado por un cilindro uniforme de carga positiva, de radio 1.50 cm y coaxial con el alambre. La densidad de carga volumétrica  $\rho$  del cilindro debe escogerse de modo que el campo eléctrico neto fuera de él sea cero. Calcule la densidad de carga positiva que se requiere  $\rho$ .
18. En la figura 27-30 se muestra una carga puntual  $q = 126$  nC en el centro de una cavidad esférica de radio 3.66 cm en un trozo de metal. Con la ley de Gauss determine el campo eléctrico

$a$ ) en el punto  $P_1$ , a la mitad de distancia del centro de la superficie y  $b$ ) en el punto  $P_2$ .

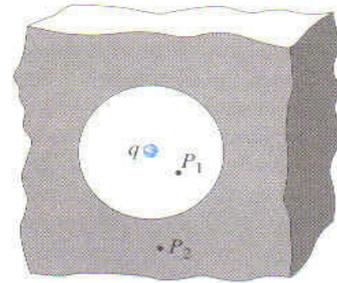


FIGURA 27-30. Ejercicio 18.

19. Un protón gira con una velocidad  $v = 294$  km/s fuera de una esfera cargada de radio  $r = 1.13$  cm. Determine la carga de la esfera.
20. Dos cascarones esféricos y concéntricos con carga eléctrica tienen un radio de 10.0 y de 15.0 cm. La carga en el cascarón interno es de 40.6 nC y la del cascarón externo es de 19.3 nC. Calcule el campo eléctrico  $a$ ) en  $r = 12.0$  cm,  $b$ ) en  $r = 22.0$  cm y  $c$ ) en  $r = 8.18$  cm del centro de los cascarones.
21. Dos grandes cilindros esféricos concéntricos cargados tienen un radio de 3.22 y de 6.18 cm. La densidad de carga superficial en el cilindro interno es de  $24.1 \mu\text{C}/\text{m}^2$  y la del cilindro externo es de  $-18.0 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Determine el campo eléctrico en  $a$ )  $r = 4.10$  cm y  $b$ )  $r = 8.20$  cm.
22. Una carga positiva se distribuye uniformemente a través de un cascarón cilíndrico largo no conductor de radio interno  $R$  y de radio externo  $2R$ . ¿A qué profundidad radial debajo de la superficie externa de la distribución de carga será la fuerza del campo eléctrico la mitad del valor superficial?
23. Un electrón de 115 keV se dispara hacia una gran hoja plana de plástico cuya densidad de carga superficial es de  $-2.08 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . ¿De qué distancia debemos dispararlo, para que no golpee la hoja? (Prescinda de los efectos relativistas.)
24. Construya una superficie esférica gaussiana centrada en una línea infinita de carga, calcule el flujo en la esfera y pruebe con ello que se cumple la ley de Gauss.
25. Una carga se distribuye uniformemente a través de un cilindro infinitamente largo de radio  $R$ .  $a$ ) Demuestre que  $E$  a una distancia  $r$  del eje del cilindro ( $r < R$ ) está dado por

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0},$$

donde  $\rho$  es la densidad de carga volumétrica.  $b$ ) ¿Qué resultados obtiene usted con  $r > R$ ?

## 27-6 Ley de Gauss y los conductores

26. Una esfera conductora cargada uniformemente de 1.22 m de radio tiene una densidad de carga superficial de  $8.13 \mu\text{C}/\text{m}^2$ .  $a$ ) Calcule su carga.  $b$ ) ¿Cuál es el flujo eléctrico total que sale de su superficie?  $c$ ) Calcule el campo eléctrico en la superficie de la esfera.
27. Unos vehículos espaciales que viajan por los cinturones de radiación terrestre chocan con los electrones atrapados. Puesto

que en el espacio no hay tierra, la acumulación resultante de la carga puede ser considerable y dañar los componentes electrónicos, ocasionando perturbaciones en los circuitos de control y anomalías en la operación. Un satélite esférico metálico de 1.3 m de diámetro acumula  $2.4 \mu\text{C}$  de carga en una revolución orbital. *a)* Calcule la densidad de carga superficial. *b)* Calcule el campo eléctrico resultante afuera de la superficie del satélite.

28. La ecuación 27-18 ( $E = \sigma/\epsilon_0$ ) nos da el campo eléctrico en puntos cercanos a una superficie conductora cargada. Aplíquela a una esfera conductora de radio  $r$  que tiene una carga  $q$  en su superficie; demuestre después que el campo eléctrico fuera de

ella es el mismo que el de una carga puntual en el centro de la esfera.

29. Una placa metálica de 8.0 cm de lado tiene una carga total de  $6.0 \mu\text{C}$ . *a)* Usando la aproximación de placa infinita, calcule el campo eléctrico situado 0.50 mm arriba de la superficie de la placa cerca de su centro. *b)* Estime el campo a una distancia de 30 m.

**27-7 Pruebas experimentales de la ley de Gauss y de la de Coulomb**

**P**ROBLEMAS

1. La ley de Gauss para la gravitación es

$$\frac{1}{4\pi G} \Phi_g = \frac{1}{4\pi G} \oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -m,$$

donde  $m$  es la masa encerrada y  $G$  es la constante de gravitación universal. Obtenga de la ecuación anterior la ley de gravitación de Newton. ¿Qué importancia tiene el signo negativo?

2. Los componentes del campo eléctrico, en la figura 27-31, son  $E_y = by^{1/2}$ ,  $E_x = E_z = 0$ , donde  $b = 8830 \text{ N/C} \cdot \text{m}^{1/2}$ . Calcule *a)* el flujo  $\Phi_E$  a través del cubo y *b)* la carga dentro de él. Suponga que  $a = 13.0 \text{ cm}$ .

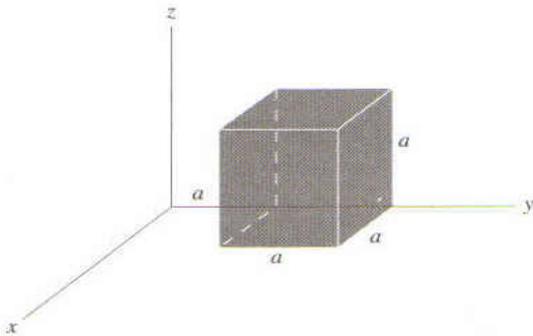


FIGURA 27-31. Problema 2.

3. Una esfera pequeña, cuya masa  $m$  es de 1.12 mg, tiene una carga  $q = 19.7 \text{ nC}$ . En el campo gravitacional de la Tierra pende de un hilo de seda que forma un ángulo  $\theta = 27.4^\circ$  con una

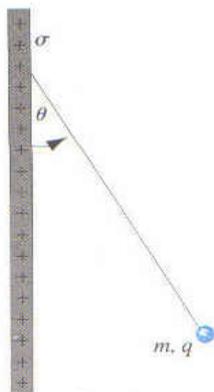


FIGURA 27-32. Problema 3.

gran hoja no conductora uniformemente cargada, como se observa en la figura 27-32. Calcule la densidad uniforme de carga  $\sigma$ .

4. La figura 27-33 muestra una carga  $+q$  formando en una esfera conductora uniforme de radio  $a$  y colocada en el centro de un cascarón conductor esférico de radio interno  $b$  y de radio externo  $c$ . El cascarón externo tiene una carga de  $-q$ . Determine  $E(r)$  en los sitios *a)* dentro de la esfera ( $r < a$ ), *b)* entre la esfera y el cascarón ( $a < r < b$ ), *c)* dentro del cascarón ( $b < r < c$ ) y *d)* fuera del cascarón ( $r > c$ ). *e)* ¿Qué cargas aparecen en las superficies interna y externa del cascarón?

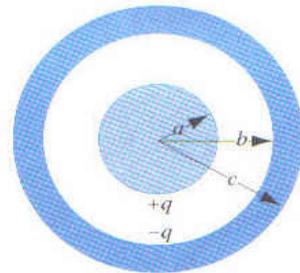


FIGURA 27-33. Problema 4.

5. Un cilindro conductor muy grande (longitud  $L$ ) que tiene una carga total  $+q$  está rodeado por un cascarón cilíndrico conductor (también de longitud  $L$ ), con una carga total  $-2q$ , como se muestra en la sección transversal de la figura 27-34. Use la ley de Gauss para determinar *a)* el campo eléctrico en los puntos fuera del cascarón conductor, *b)* la distribución de carga en él y *c)* el campo eléctrico en la región situada entre los cilindros.

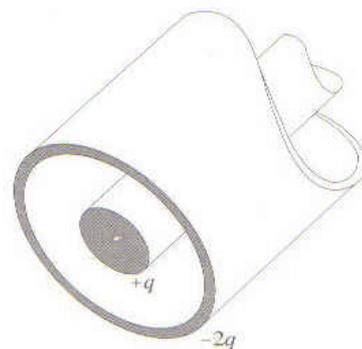


FIGURA 27-34. Problema 5.

6. Una gran superficie conductora plana tiene una densidad de carga uniforme  $\sigma$ . Un pequeño hoyo circular de radio  $R$  se cortó en la mitad de la hoja, como se aprecia en la figura 27-35. No tenga en cuenta la fragmentación de las líneas de campo alrededor de todos los bordes y calcule el campo eléctrico en el punto  $P$ , a una distancia  $z$  del centro del orificio en el eje. (Sugerencia: consulte la Ec. 26-19 y aplique el principio de superposición.)

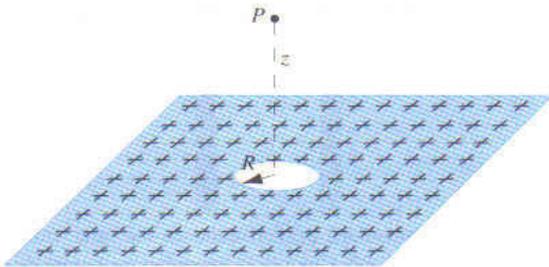


FIGURA 27-35. Problema 6.

7. La figura 27-36 muestra una sección a través de un tubo metálico largo de paredes delgadas y de radio  $R$ , el cual tiene una carga por unidad de longitud  $\lambda$  en su superficie. Obtenga la expresión de  $E$  para varias distancias  $r$  respecto al eje del tubo, considerando tanto a)  $r > R$  como b)  $r < R$ . c) Grafique sus resultados en el intervalo de  $r = 0$  a  $r = 5.0$  cm. Suponiendo que  $\lambda = 2.0 \times 10^{-8}$  C/m y  $R = 3.0$  cm. (Sugerencia: utilice superficies gaussianas, coaxiales con el tubo metálico.)



FIGURA 27-36. Problema 7.

8. La figura 27-37 muestra una sección a través de dos largos cilindros concéntricos delgados de radios  $a$  y  $b$ . Transportan cargas iguales y opuestas por unidad de longitud  $\lambda$ . Por medio de

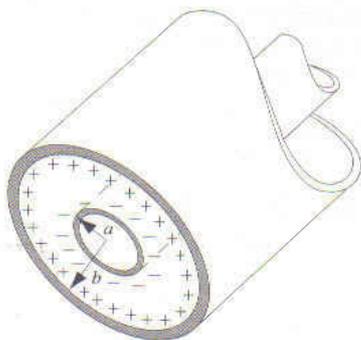


FIGURA 27-37. Problema 8.

la ley de Gauss pruebe que a)  $E = 0$  cuando  $r < a$  y que b) entre los cilindros  $E$  está dada por

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

9. En la geometría del problema 8 un positrón gira en una trayectoria circular entre los cilindros y concéntrica con ellos. Determine su energía cinética en electron-volts. Suponga que  $\lambda = 30$  nC/m. (¿Por qué no necesita conocer el radio de los cilindros?)
10. La figura 27-38 muestra un contador Geiger, que sirve para detectar la radiación por ionización. El contador consta de un delgado alambre central, que tiene una carga positiva; está rodeado por un cilindro circular concéntrico que lleva una carga negativa igual. Por tanto, se crea un fuerte campo eléctrico radial dentro del cilindro. Éste contiene un gas inerte de baja presión. Cuando una partícula de radiación entra en el tubo por las paredes del cilindro, ioniza unos cuantos átomos del gas. Los electrones libres resultantes son atraídos al alambre positivo. Sin embargo, el campo eléctrico es tan intenso que entre las colisiones con los átomos de gas, los electrones obtuvieron suficiente energía para ionizar también estos átomos. Por tanto se crean más electrones libres y el proceso se repite hasta que llegan al alambre. El alambre recoge la "avalancha" de electrones generando una señal que registra el paso de la partícula incidente de radiación. Supóngase que el radio del alambre central mide  $25 \mu\text{m}$ , que el radio del cilindro mide  $1.4$  cm y el tubo tiene una longitud de  $16$  cm. El campo eléctrico en la pared del cilindro es de  $2.9 \times 10^4$  N/C. Calcule la carga positiva en el alambre central. (Sugerencia: consulte el Prob. 8.)

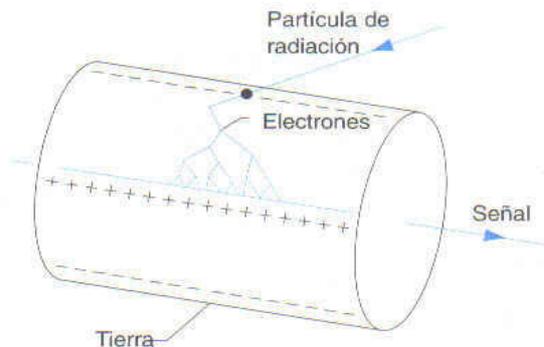


FIGURA 27-38. Problema 10.

11. Un cascarón esférico delgado metálico sin carga tiene una carga puntual  $q$  en su centro. Por medio de la ley de Gauss, obtenga las expresiones del campo eléctrico a) dentro del cascarón y b) fuera de él. c) ¿Tiene el cascarón algún efecto en el campo debido a  $q$ ? d) ¿Produce la presencia de  $q$  algún efecto en el cascarón? e) Si mantenemos una segunda carga puntual fuera del cascarón, ¿experimenta una fuerza? f) ¿Experimenta una fuerza la carga interna? g) Contradice esto a la tercera ley de Newton? Explique su respuesta afirmativa o negativa.
12. En el espacio interestelar unas partículas de polvo cargadas, que transportan un electrón en exceso y que tienen la misma masa, forman una nube esférica estable y uniforme. Calcule la masa de cada una.
13. La región esférica  $a < r < b$  tiene una carga por unidad de volumen de  $\rho = A/r$ , donde  $A$  es una constante. En el centro ( $r = 0$ ) de la cavidad encerrada hay carga puntual  $q$ . ¿Cuál debería ser

el valor de  $A$  para que el campo eléctrico en la región  $a < r < b$  tenga una magnitud constante?

14. Una región esférica tiene una carga uniforme por unidad de volumen  $\rho$ . Sea  $\vec{r}$  el vector que del centro de la esfera se dirige a un punto general  $P$  dentro de ella. *a)* Demuestre que el campo eléctrico en  $P$  está dado por  $\vec{E} = \rho\vec{r}/3\epsilon_0$ . *b)* Una cavidad esférica se crea en ella, como se aprecia en la figura 27-39. Mediante el concepto de superposición demuestre que en todos los puntos de la cavidad el campo eléctrico es  $\vec{E} = \rho\vec{a}/3\epsilon_0$  (campo uniforme), donde  $\vec{a}$  es el vector que conecta el centro de la esfera al de la cavidad. Nótese que ambos resultados no dependen del radio de la esfera ni del de la cavidad.

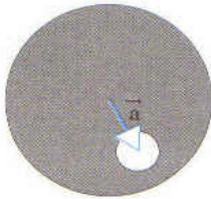


FIGURA 27-39. Problema 14.

15. Demuestre que el equilibrio estable bajo la acción exclusiva de las fuerzas electrostáticas es imposible. (Sugerencia: suponga que en cierto punto  $P$  del campo eléctrico  $\vec{E}$ , una carga  $+q$  presentaría equilibrio estable si la colocásemos allí. Dibuje una superficie esférica gaussiana alrededor del punto  $P$ , imagine cómo

debe ser  $\vec{E}$  en esta superficie y aplique la ley de Gauss para demostrar que la suposición da origen a una contradicción.) A este resultado se le conoce como teorema de Earnshaw.

16. Una losa plana de espesor  $d$  tiene una densidad uniforme de carga volumétrica  $\rho$ . Calcule la magnitud del campo eléctrico en todos los puntos del espacio tanto *a)* dentro de la losa como *b)* fuera de ella, en términos de  $x$ , la distancia medida desde el plano medio de la losa.
17. Una esfera conductora sólida de radio  $R$  tiene una distribución de carga uniforme, con una densidad  $\rho = \rho_S r/R$  donde  $\rho_S$  es una constante, y  $r$  la distancia del centro de la esfera. Demuestre que *a)* la carga total en la esfera es  $Q = \pi\rho_S R^3$  y *b)* el campo eléctrico dentro de la esfera está dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^4} r^2.$$

18. Un conductor aislado de forma arbitraria tiene una carga neta de  $+10 \mu\text{C}$ . En su interior hay una cavidad hueca donde se halla una carga puntual  $q = +3.0 \mu\text{C}$ . ¿Qué carga existe en la pared de la cavidad y *b)* en la superficie externa del conductor?
19. Una esfera conductora que lleva una carga  $Q$  está rodeada por un cascarón esférico conductor. *a)* ¿Cuál es la carga neta en la superficie interna del cascarón? *b)* Se coloca otra carga  $q$  fuera del cascarón. ¿Cuál es ahora la carga neta en su superficie interna? *c)* Si devolvemos  $q$  a su posición entre el cascarón y la esfera, ¿cuál será la carga neta en la superficie interna del cascarón? *d)* ¿Son sus respuestas válidas si la esfera y el cascarón no son concéntricos?

## PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

- Verifique la ley de Gauss con un cálculo numérico. Una carga puntual  $q = 1 \text{ nC}$  se halla a  $0.5 \text{ m}$  fuera de la superficie de una esfera de radio  $r = 1.0 \text{ m}$ . Calcule el flujo eléctrico que pasa por ella.
- Verifique la ley de Gauss con un cálculo numérico. Una carga puntual  $q = 1 \text{ nC}$  se encuentra en la mitad entre el centro y la superficie de una esfera de radio  $r = 1.0 \text{ m}$ . Calcule el flujo eléctrico a través de ella.
- Una carga puntual de  $q = 1.0 \mu\text{C}$  está en el eje de una superficie cilíndrica de radio  $r = 0.5 \text{ m}$  y de longitud  $L = 3.0 \text{ m}$ . La carga puntual está a  $1.0 \text{ m}$  de un extremo y a  $2.0 \text{ m}$  del otro. *a)* Obtenga con cálculo numérico el flujo eléctrico que atraviesa la parte curva del cilindro. *b)* Verifique analíticamente su respuesta. (Nota: no se requiere integración en este caso.)

# LA ENERGÍA ELÉCTRICA Y EL POTENCIAL ELÉCTRICO

## E

En los capítulos 11 a 13 vimos que los métodos basados en los conceptos de energía ofrecen nuevas ideas para entender la mecánica y a menudo permiten simplificar la solución de problemas en esa área. En el capítulo 14 utilizamos los métodos que se basan en la energía potencial en situaciones relativas a la fuerza gravitacional, con el fin de determinar propiedades como el movimiento de satélites y planetas.

En este capítulo abordamos el método de energía para estudiar la electrostática. Comenzamos con la energía potencial eléctrica, que, según veremos, puede caracterizar una fuerza electrostática del mismo modo que la energía gravitacional potencial puede caracterizar la fuerza gravitacional. Después definimos en forma general el concepto de potencial eléctrico y explicamos cómo calcularlo en varias distribuciones de carga discreta y continua.

### 28-1 ENERGÍA POTENCIAL

Muchos fenómenos eléctricos se relacionan con la transferencia de grandes cantidades de energía. Por ejemplo, cuando un relámpago proveniente de una nube choca contra la Tierra, se libera una energía de  $10^8$  J en forma de luz, sonido, calor y onda de choque. ¿De dónde procede esta energía y cómo se almacena en las nubes? Para entender esta pregunta hay que considerar la energía relacionada con las fuerzas eléctricas.

La ley de la fuerza electrostática se parece mucho a la de la fuerza gravitacional:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad \text{electrostática,} \quad (28-1a)$$

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{gravitacional,} \quad (28-1b)$$

Ambas fuerzas dependen del cuadrado inverso de la distancia que separa los dos objetos. Cuando un objeto se desplaza de un lugar a otro bajo la fuerza gravitacional de otro objeto (que suponemos que permanece en reposo), el trabajo realizado por la fuerza gravitacional en el primero dependerá sólo de los puntos inicial y final, no de la trayectoria seguida entre ellos. En la sección 12-1 describimos una fuerza que tiene esta propie-

dad especial como una *fuerza de conservación*, y en la sección 12-2 concluimos que a partir de esta fuerza podríamos determinar la *energía potencial*. La diferencia de la energía potencial  $\Delta U$  del sistema al pasar el objeto de su posición inicial a la final será igual al negativo del trabajo que ejecute la fuerza:

$$\Delta U = U_f - U_i = -W_{if} = -\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad (28-2)$$

donde  $W_{if}$  es el trabajo efectuado por la fuerza  $\vec{F}$  cuando el objeto se mueve de  $i$  a  $f$ . En el caso de la fuerza gravitacional, en la sección 14-16 demostramos que, cuando un objeto con masa  $m_2$  se desplaza desde una posición  $r_i$  respecto de la masa  $m_1$  hasta una posición  $r_f$  de  $m_1$ , la diferencia de energía potencial es

$$\Delta U = -Gm_1 m_2 \left( \frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right). \quad (28-3)$$

Esta diferencia de energía potencial se relaciona con el sistema entero constituido por  $m_1$  y  $m_2$ , no con ninguno de los objetos solos.

Dada la semejanza entre las leyes de fuerza electrostática y gravitacional, podemos llegar a la misma conclusión respecto a la fuerza electrostática que respecto a la gravitacional: *la fuerza electrostática es conservativa y, por tanto, una energía potencial se relaciona con la configuración (la posición rela-*

tiva de los objetos) de un sistema donde operan fuerzas electrostáticas.

¿Por qué este método es útil con las fuerzas electrostáticas? En mecánica aprendimos que existen dos formas de analizar un problema. Una se basa en la fuerza (un vector) y nos permite determinar la posición y la velocidad de un objeto en cualquier punto de su movimiento. La otra se basa en la energía (un escalar) y nos permite determinar cómo cambia un sistema al pasar de cierto estado inicial a cierto estado final. En forma similar descubriremos que los dos procedimientos son útiles al estudiar las interacciones entre objetos cargados.

Existe una propiedad importante que diferencia la fuerza electrostática de la gravitacional: ésta siempre es de atracción, en tanto que aquélla puede ser de atracción o de repulsión (según los signos relativos del cambio). Tal diferencia influye en el signo de la energía potencial, pero de ninguna manera modifica nuestro argumento basado en la semejanza de ambas fuerzas.

## 28-2 ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

En la presente sección vamos a servirnos de la fuerza electrostática explicada en el capítulo 25 para obtener la energía generada por la interacción entre dos cargas eléctricas; vamos asimismo a ampliar el cálculo para incluir el caso de una colección de más de dos cargas.

Si aceptamos la conclusión de la sección anterior de que la fuerza electrostática es conservativa, podremos calcular el cambio de energía potencial cuando una carga  $q_2$  pasa del punto  $a$  al punto  $b$ , sometida a la fuerza proveniente de otra carga  $q_1$  en reposo. Supongamos, por ahora, que ambas cargas son positivas. En la figura 28-1 se muestra la geometría del proceso. Hemos simplificado un poco el problema, suponiendo que el movimiento de  $a$  a  $b$  se realiza en la línea que conecta  $q_1$  y  $q_2$ . (Más adelante generalizaremos a otras clases de desplazamiento.) Suponemos que el origen está en la posición de  $q_1$  y con  $r$  representamos la posición de  $q_2$  en relación con este origen. En la ecuación 28-2, el vector  $d\vec{s}$  representa un desplazamiento infinitesimal en dirección del movimiento de  $a$  a  $b$ . La fuerza  $\vec{F}$  y el desplazamiento  $d\vec{s}$  siempre son paralelos en este movimiento, así que  $\vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds$ . En el movimiento indicado en la figura 28-1,  $ds = dr$ , porque el

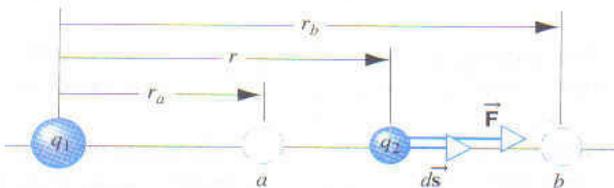


FIGURA 28-1. Una partícula cargada  $q_2$  se desplaza de  $a$  a  $b$  bajo la acción de la fuerza electrostática  $\vec{F}$  ejercida por  $q_1$ . Los puntos  $a$  y  $b$  se hallan en la línea que conecta  $q_1$  y  $q_2$ .

desplazamiento invariablemente sigue la dirección de  $r$ . Con estas sustituciones la ecuación 28-2 queda así

$$\Delta U = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_a^b F dr = - \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr. \quad (28-4)$$

Al realizar la integral obtenemos

$$\Delta U = U_b - U_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right). \quad (28-5)$$

La ecuación 28-5 es válida sin importar si  $q_2$  se acerca o se aleja de  $q_1$ . Cuando  $q_2$  se dirige a  $q_1$ , entonces  $r_b < r_a$  y  $\Delta U > 0$ , es decir, la energía potencial aumenta si las cargas se aproximan más entre sí. Cuando  $q_2$  se aleja de  $q_1$ , entonces  $r_b > r_a$  y  $\Delta U < 0$ , es decir, la energía potencial disminuye si las cargas se alejan más una de otra.

La ecuación 28-5 sigue siendo válida, sean positivos o negativos los signos de las cargas. Si ambas cargas son negativas, sin duda obtendremos el mismo resultado. Si tienen signo opuesto (una positivo y la otra negativo), la fuerza entre ellas será de atracción. Con el vector de fuerza en la figura 28-1 en dirección contraria, tenemos

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= -F ds = -F dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} dr \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr, \end{aligned} \quad (28-6)$$

donde el último paso se puede llevar a cabo porque  $q_1 q_2 = -|q_1||q_2|$  cuando una de las cargas es negativa y la otra positiva. Esto da exactamente el mismo integrando como el de la ecuación 28-4, y así la integral da el mismo resultado.

Cuando las cargas tienen signo opuesto de modo que  $q_1 q_2$  es negativo en la ecuación 28-5,  $\Delta U < 0$  si las cargas se aproximan una a otra y si  $\Delta U > 0$  cuando se alejan.

Supóngase que movemos  $q_2$  en una dirección que no sigue la línea que conecta  $q_1$  y  $q_2$ . En la figura 28-2 vemos que  $q_2$  se desplaza de  $a$  a  $b$  en un arco de un círculo de radio  $r$  centrado en  $q_1$ . A lo largo de esta trayectoria  $\vec{F}$  siempre es perpendicular a  $d\vec{s}$ , y así  $\vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$  en toda ella. La fuerza electrostática no opera en esta trayectoria, así que  $\Delta U = 0$ .

Para desplazar  $q_2$  entre los puntos arbitrarios  $a$  y  $b$  como en la figura 28-3, podemos escoger varias trayectorias posi-

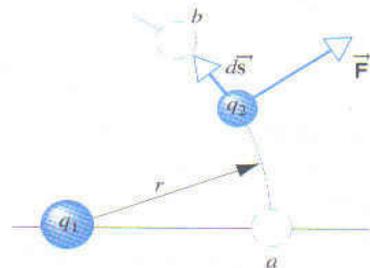


FIGURA 28-2. El movimiento de  $q_2$  desde  $a$  a  $b$  es ahora a lo largo de la trayectoria de radio constante  $r$ .

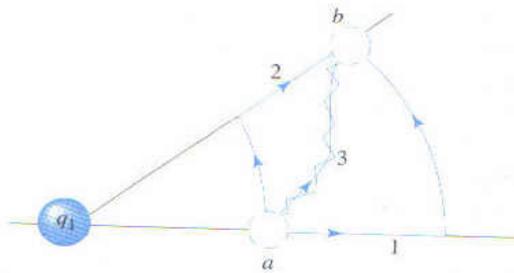


FIGURA 28-3.  $q_2$  se mueve entre puntos arbitrarios  $a$  y  $b$  en varias trayectorias posibles.

bles. En las trayectorias 1 y 2,  $\Delta U$  está dada por la ecuación 28-5 para las partes radiales (rectas) de ellas, y por  $\Delta U = 0$  para sus partes tangenciales (curvas). La trayectoria arbitraria 3 puede dividirse en una serie de cortos pasos radiales y tangenciales. En cada paso tangencial  $\Delta U = 0$ , mientras que la  $\Delta U$  total en los pasos radiales está dada por la ecuación 28-5. Concluimos que esta ecuación da  $\Delta U$  con cualquier trayectoria entre el punto  $a$ , que está a una distancia  $r_a$  de  $q_1$ , y el punto  $b$ , que está a una distancia  $r_b$  de  $q_1$ , sin importar dónde se encuentren. Esto coincide con la afirmación de que la fuerza electrostática es conservativa, lo cual significa que el trabajo y, por lo mismo, el cambio de energía potencial al pasar de  $a$  a  $b$ , no dependen de la trayectoria.

Hasta ahora nos hemos ocupado de la *diferencia* de energía potencial entre dos puntos  $\Delta U = U_b - U_a$ . Podemos ampliar la exposición para definir la energía potencial en un solo punto  $b$ , con sólo seleccionar un punto de referencia  $a$  de la energía potencial y asignarle un valor de referencia a la energía potencial  $U_a$  en ese punto. En ese punto a menudo conviene escoger un punto de referencia que corresponda a una separación infinita entre las cargas, y generalmente optamos por el valor de referencia  $U_a = 0$ . Después, representando con  $b$  cualquier punto donde la posición sea  $r$ , la ecuación 28-5 se convierte en

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \quad (28-7)$$

En esta expresión,  $U$  es positiva siempre que  $q_1$  y  $q_2$  tengan el mismo signo, correspondiente a una fuerza de repulsión, y  $U$  es negativa siempre que  $q_1$  y  $q_2$  tengan signo contrario, correspondiente a una fuerza de atracción. Si comparamos la ecuación 28-7 con la ecuación 14-17 para la energía gravitacional potencial,  $U(r) = -Gm_1 m_2 / r$ , nos daremos cuenta de que ésta invariablemente es negativa, porque la fuerza gravitacional siempre es de atracción. Esto concuerda con el valor negativo de la energía electrostática potencial cuando las cargas tienen signo contrario y la fuerza es de atracción.

### Conservación de la energía en electrostática

En un sistema aislado de dos cargas se conserva la energía mecánica total  $E = K + U$ . Supongamos que sostenemos  $q_1$  en una posición fija y que liberamos  $q_2$  del reposo a cierta dis-

tancia de  $q_1$ . Si las dos cargas tienen el mismo signo, entonces  $\Delta U < 0$  como  $q_2$  es empujada de  $q_1$  por la fuerza de repulsión. Esto es la conservación de la energía mecánica total exige que  $\Delta K > 0$ , por lo cual la rapidez de  $q_2$  debe aumentar. En cambio, si impulsamos  $q_2$  en dirección de  $q_1$  con cierta energía cinética inicial,  $\Delta U > 0$  al ir disminuyendo la separación; entonces la conservación de la energía requiere que  $\Delta K < 0$  y, por lo mismo, disminuye la rapidez de  $q_2$ . Las conclusiones anteriores se invierten si las cargas tienen signo opuesto, de modo que la fuerza es de atracción.

He aquí otra forma de ver la conservación de energía en un sistema de dos cargas. Supongamos que las dos cargas tienen el mismo signo. Comenzamos con ellas en reposo y separadas por una gran distancia; después movemos  $q_2$  y la ponemos en reposo a cierta distancia de  $q_1$ . Para realizar esto, el agente externo que desplaza a  $q_2$  ha de ejercer una fuerza que se oponga a la repulsión electrostática entre  $q_1$  y  $q_2$ . Al hacerlo, el agente realiza trabajo externo positivo sobre el sistema, de manera que aumenta la energía del sistema. El incremento de ésta es de  $\Delta U$  a consecuencia del trabajo efectuado por el agente externo. Dicho de otra manera, ha guardado energía en el sistema de la misma forma cuando un agente externo comprime un resorte. Al liberar las cargas, recuperaremos la energía almacenada como energía cinética de las cargas en movimiento.

En cambio, si las cargas tienen signo opuesto y, por lo mismo, la fuerza electrostática es de atracción, el agente realiza trabajo externo negativo sobre el sistema para mover  $q_2$  de una larga separación y colocarla en reposo en un lugar que presenta menor separación con  $q_1$ . Con este trabajo disminuye la energía almacenada en el sistema y, en consecuencia, no es recuperable. (Sin el agente externo  $q_2$  aceleraría por su cuenta en dirección de  $q_1$ , el agente debe gastar energía al restringir a  $q_2$  para ponerla en reposo en un lugar especificado.)

Si  $q_1$  y  $q_2$  tienen signos opuestos y están separados una distancia corta, el agente externo debe realizar trabajo positivo igual a  $\Delta U$  a fin de separar las cargas una gran distancia. Cuando el concepto anterior se aplica a átomos y moléculas, esta energía puede llamarse *energía de enlace*, *energía de ionización* o *energía de disociación*. Esta magnitud representa la energía externa que hay que suministrar para, por ejemplo, extraer un electrón de un átomo o para dividir una molécula como KCl en iones  $K^+$  y  $Cl^-$ .

**PROBLEMA RESUELTO 28-1.** Dos protones en el núcleo de un átomo  $^{238}\text{U}$  están separados por una distancia de 6.0 fm. ¿Cuál es la energía potencial relacionada con la fuerza eléctrica que opera entre las dos partículas?

**Solución** A partir de la ecuación 28-5, con  $q_1 = q_2 = +1.60 \times 10^{-19}$  C, obtenemos

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{6.0 \times 10^{-15} \text{ m}}$$

$$= 3.8 \times 10^{-14} \text{ J} = 2.4 \times 10^5 \text{ eV} = 240 \text{ keV},$$

donde suponemos que  $U = 0$  en la configuración donde los protones están muy separados. Los dos protones no se separan porque los mantiene juntos una *fuerza fuerte* de atracción que los une al núcleo.

A diferencia de la fuerza electrostática, no hay una función simple de energía potencial que represente la fuerza fuerte.

**PROBLEMA RESUELTO 28-2.** Dos objetos, uno con masa  $m_1 = 0.0022$  kg y carga  $q_1 = +32 \mu\text{C}$  y el otro con masa  $m_2 = 0.0039$  kg y carga  $q_2 = -18 \mu\text{C}$ , se hallan inicialmente separados por una distancia de 4.6 cm. Cuando mantenemos el objeto 1 en una posición fija, liberamos el otro del reposo. ¿Qué rapidez alcanza el objeto 2 cuando la separación entre ellos es 2.3 cm? Suponga que los objetos se comportan como cargas puntuales.

**Solución** A medida que las cargas se acercan entre sí y sólo opera la fuerza electrostática, la reducción de la energía potencial ha de ser equilibrada por un aumento correspondiente de la energía cinética. Supongamos que la condición inicial es el instante en que se libera al objeto 2 (con  $K_i = 0$ ) y que la condición final es el instante en que su separación es de 2.3 cm. Entonces la conservación de la energía nos da  $U_i + K_i = U_f + K_f$  o (con  $K_i = 0$ )

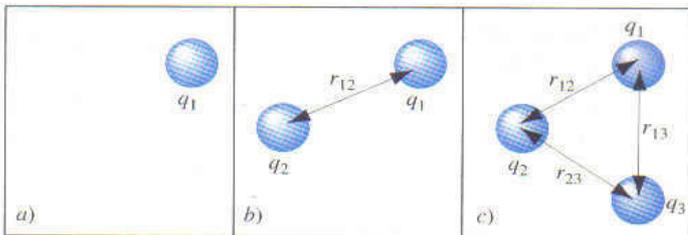
$$\begin{aligned} k_f &= U_i - U_f = -\Delta U = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \\ &= -(8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(32 \times 10^{-6} \mu\text{C}) \\ &\quad \times (-18 \times 10^{-6} \mu\text{C}) \left( \frac{1}{0.023 \text{ m}} - \frac{1}{0.046 \text{ m}} \right) \\ &= 113 \text{ J}, \\ v_f &= \sqrt{\frac{2K_f}{m_2}} = \sqrt{\frac{2(113 \text{ J})}{0.0039 \text{ kg}}} = 240 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

En cambio, si sostenemos fijo el objeto 2 y liberamos el objeto 1, cuando la separación alcance 2.3 cm, la energía cinética tendrá el mismo valor de 113 J, por ser una propiedad del sistema entero. Si liberamos ambas partículas del reposo y permitimos que caigan juntas, hasta una separación de 2.3 cm, su energía cinética total será de 113 J. Podremos calcular la velocidad de cada una recurriendo a la conservación del momento.

## La energía potencial de un sistema de cargas

Supóngase que tenemos tres cargas ( $q_1, q_2, q_3$ ) separadas por una distancia infinita. En esta configuración  $U = 0$ . Queremos obtener la energía potencial de la configuración después de acercar las tres cargas entre sí.

Traemos del infinito la primera carga  $q_1$  y la ponemos en reposo en el sitio que indica la figura 28-4a. Como esta carga



**FIGURA 28-4.** Se forma un sistema de tres cargas a partir de separaciones inicialmente infinitas.

no interactúa con ninguna otra en el proceso, la energía potencial no cambia; seguimos teniendo  $U = 0$  en el sistema, pues sigue habiendo distancias infinitas entre las cargas. En seguida introducimos la carga  $q_2$  y la fijamos a una distancia  $r_{12}$  de  $q_1$  (Fig. 28-4b). La energía potencial de esta configuración de  $q_1$  y  $q_2$  (en relación con  $U = 0$  en una separación infinita) es  $q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r_{12}$ . Por último, introducimos  $q_3$  y la ponemos a una distancia  $r_{13}$  de  $q_1$  y  $r_{23}$  de  $q_2$  (Fig. 28-4c). Dado que  $q_3$  interactúa con  $q_1$  y  $q_2$ , la energía potencial de esta configuración final recibe dos contribuciones más:  $q_1 q_3 / 4\pi\epsilon_0 r_{13}$  (interacción de  $q_1$  y  $q_3$ ) y  $q_2 q_3 / 4\pi\epsilon_0 r_{23}$  (interacción de  $q_2$  y  $q_3$ ). La energía potencial eléctrica total de todo el sistema es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \quad (28-8)$$

Como se aprecia claramente en la ecuación 28-8, la energía potencial es una propiedad del sistema y no de una carga individual.

Podríamos continuar el proceso y reunir cualquier distribución arbitraria de cargas. La energía potencial total resultante de ese sistema no dependerá del orden en que juntemos las cargas.

En el ejemplo anterior se advierte la ventaja de utilizar el método de energía para analizar este sistema: la suma en la ecuación 28-8 es una suma *algebraica* de escalares. Si intentásemos calcular el campo eléctrico asociado con el grupo de tres cargas, tendríamos que evaluar una suma *vectorial* más complicada.

En este proceso está implícita la suposición de que el principio de superposición es válido. En páginas anteriores, al analizar sumas vectoriales, aplicamos este principio, según el cual la interacción de dos cargas no depende de la presencia de otras. Aquí vemos que un resultado similar se obtiene con términos escalares; por ejemplo, el término de la energía potencial que describe la interacción de  $q_1$  y  $q_3$  no está subordinado a la presencia de  $q_2$ .

Como señalamos con anterioridad, si el agente externo efectúa trabajo positivo al desplazar las cargas desde una separación infinita (oponiéndose a una fuerza de repulsión al hacerlo), la energía potencial total calculada mediante la ecuación 28-8 es positiva. El agente no influye en la energía almacenada en el sistema de cargas. Si se las libera de su posición, tenderán a apartarse una de otra y la energía potencial disminuirá al incrementarse la energía cinética. Cuando la energía potencial es negativa, el agente habrá realizado trabajo al conjuntar el sistema de cargas. En este caso, el agente ha de suministrar más energía por medio del trabajo para desmembrar el sistema de cargas y colocarlas en una separación infinita.

Esta concepción de la energía potencial puede sintetizarse en los siguientes términos:

*La energía potencial eléctrica de un sistema de cargas puntuales fijas en reposo es igual al trabajo que debe ejecutar un agente externo para ensamblar el sistema, trayendo las cargas desde una distancia infinita donde se encuentran en reposo.*

En esta concepción está implícita la definición del punto de referencia de la energía potencial como la separación infinita de las cargas, donde suponemos que el valor de referencia de ella es cero.

**PROBLEMA RESUELTO 28-3.** En el sistema de la figura 28-4 suponga que  $r_{12} = r_{13} = r_{23} = d = 12$  cm, y que

$$q_1 = +q, \quad q_2 = -4q \quad \text{y} \quad q_3 = +2q,$$

donde  $q = 150$  nC. ¿Cuál es la energía potencial del sistema? Suponga que  $U = 0$  cuando una distancia infinita separa las cargas.

**Solución** Con el uso de la ecuación 28-8 obtenemos

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(+q)(-4q)}{d} + \frac{(+q)(+2q)}{d} + \frac{(-4q)(+2q)}{d} \right) \\ &= -\frac{10q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \\ &= -\frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(10)(150 \times 10^{-9} \text{ C})^2}{0.12 \text{ m}} \\ &= -1.7 \times 10^{-2} \text{ J} = -17 \text{ mJ}. \end{aligned}$$

La energía potencial negativa significa, en este caso, que un agente externo ha de efectuar trabajo negativo para realizar la estructura, comenzando con tres cargas separadas por una distancia infinita y en reposo. Dicho de otra manera, un agente tendrá que realizar  $+17$  mJ de trabajo para desmantelar la estructura por completo.

## 28-3 EL POTENCIAL ELÉCTRICO

Imagine una carga  $q$  fija en el origen de un sistema coordenado. Tomamos otra carga  $q_0$ , que denominamos "carga de prueba" y la pasamos de  $r_a$  a  $r_b$  bajo la influencia de la fuerza debida a  $q$ . El cambio de la energía potencial  $\Delta U$  de este sistema de dos cargas está dado por la ecuación 28-5.

Si quisiéramos aplicar una carga de prueba dos veces más grande, obtendríamos el doble del cambio de la energía potencial; una carga de prueba tres veces mayor nos daría el triple del cambio de la energía potencial.

La variación de la energía potencial es directamente proporcional a la magnitud de la carga de prueba. Dicho con otras palabras, la magnitud  $\Delta U/q_0$  no depende de la cantidad de la carga de prueba y caracteriza exclusivamente a la carga central  $q$ . Esta magnitud resulta ser de gran utilidad al analizar una extensa gama de problemas electrostáticos, inclusive los que contienen grupos más complicados de cargas. Definimos la *diferencia de potencial eléctrico*,  $\Delta V$ , como la *diferencia de la energía potencial eléctrica por unidad de carga de prueba*:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} \quad (28-9)$$

o bien

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0} \quad (28-10)$$

A semejanza de la **energía potencial**, el **potencial eléctrico** es un escalár. Por lo regular nos referiremos a él simplemente como "potencial".

Con el uso de la relación entre **trabajo y energía potencial** dada en la ecuación 28-2, podemos escribir la definición de la diferencia de potencial así

$$\Delta V = -\frac{W_{ab}}{q_0}, \quad (28-11)$$

donde  $W_{ab}$  es el trabajo efectuado por la fuerza electrostática que  $q$  ejerce sobre  $q_0$  cuando la carga de prueba pasa de  $a$  a  $b$ .

Definimos una elección apropiada del punto de referencia de la energía potencial (digamos  $U_a = 0$ ) con una separación inicial infinita entre las cargas; de ese modo obtuvimos en la sección previa una expresión (Ec. 28-7) para la energía potencial de una configuración en particular y no el cambio de la energía potencial para el cambio de una configuración. Lo mismo podemos hacer en el caso del potencial eléctrico. Sólo sus diferencias tienen importancia física, por lo cual podemos escoger a discreción el punto cero y su valor de referencia. Cuando se supone que el potencial es cero en los puntos separados de  $q$  por una distancia infinita, el potencial eléctrico es

$$V = \frac{U}{q_0}. \quad (28-12)$$

En un complicado sistema de muchas cargas, el potencial  $V$  puede ser positivo, negativo o cero. El potencial que se halla en un punto cercano a una carga positiva aislada es también positivo. Si quisiéramos pasar una carga positiva de prueba del infinito a ese punto, se desplazaría de un lugar donde  $V = 0$  a otro donde  $V > 0$ . Por tanto,  $\Delta V > 0$  y (conforme a la Ec. 28-9)  $\Delta V > 0$ , lo cual indica que la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga de prueba efectuó trabajo negativo. De modo parecido, el potencial en un punto cercano a una carga negativa aislada es negativo; la fuerza eléctrica efectúa trabajo positivo cuando trasladamos una carga positiva de prueba desde el infinito hasta ese punto.

Si el potencial es cero en un punto, la fuerza eléctrica no realiza trabajo neto alguno al pasar la carga de prueba del infinito a ese punto; ello a pesar de que puede atravesar regiones donde experimenta fuerzas eléctricas de atracción o de repulsión. *Un potencial cero en un punto no significa necesariamente que la fuerza eléctrica es cero allí.*

La unidad del SI para el potencial, que se deduce de la ecuación 28-9, es el joule por coulomb. A esta combinación se le da el nombre de *volt* (V).

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ joule/coulomb}. \quad (28-13)$$

"Voltaje" es el nombre con que a menudo se designa el potencial en un punto, y a veces hablamos de "diferencia de voltaje" en vez de diferencia de potencial. Cuando ponemos en contacto las dos puntas de prueba de un voltímetro con dos puntos de un circuito eléctrico, estamos midiendo la diferencia de voltaje o de potencial (en volts) entre ellos.

Ya hemos dicho que la fuerza eléctrica es conservativa, de modo de la diferencia de energía potencial al mover una carga entre dos puntos dependerá exclusivamente de la ubica-

ción de los puntos, y no de la trayectoria seguida para pasar de un punto a otro. En consecuencia, la ecuación 28-9 indica que la diferencia de potencial tampoco depende de la trayectoria: la que existe entre dos puntos en un campo eléctrico es independiente de la trayectoria por donde se desplaza la carga de prueba al ir de un punto a otro.

En cualquier diferencia arbitraria de potencial  $\Delta V$ , y sin importar el arreglo de las cargas que la produce, podemos escribir la ecuación 28-9 así

$$\Delta U = q \Delta V. \quad (28-14)$$

La ecuación anterior indica que, cuando una carga *cualquiera*  $q$ , se mueve entre dos puntos cuya diferencia de potencial es  $\Delta V$  la energía potencial  $\Delta U$  del sistema experimenta un cambio dado por la ecuación 28-14. Esa diferencia  $\Delta V$  la crean otras cargas que están fijas en reposo; así que el movimiento de  $q$  no altera  $\Delta V$ . Al utilizar la ecuación 28-14, vemos en la ecuación 28-13 que si  $\Delta V$  se expresa en volts y  $q$  en coulombs  $\Delta U$  se da en joules.

De la ecuación 28-14 se observa que el *electrón-volt*, unidad de energía a la que nos referimos con anterioridad, se deduce de la definición de potencial o diferencia de potencial. Si  $\Delta V$  se expresa en volts y  $q$  en unidades de la carga elemental  $e$ ,  $\Delta U$  se escribirá en electrón-volts (eV). Consideremos, por ejemplo, un sistema donde un átomo de carbono al cual se le extraen sus seis electrones ( $q = +6e$ ) se desplaza por un cambio de potencial de  $\Delta V = +20$  kV. La variación de la energía potencial es

$$\Delta U = q \Delta V = (+6e)(+20 \text{ kV}) = +120 \text{ keV}.$$

Conviene realizar estos cálculos en unidades de eV, cuando se trata de átomos o de núcleos cuya carga se expresa fácilmente en función de  $e$ .

No olvide que las *diferencias de potencial* son de gran importancia y que la ecuación 28-12 se basa en la asignación arbitraria del valor cero al potencial en la posición de referencia (el infinito); pudimos haber elegido sin problemas este potencial en cualquier otro valor, digamos  $-100$  V. Asimismo, cualquier otro punto aceptado podría seleccionarse como posición de referencia. En muchos problemas, la Tierra se toma como referencia de potencial y se le asigna el valor cero. El sitio del punto de referencia y el valor del potencial se escogen para facilitar los cálculos; otras opciones alterarían el potencial en cualquier lugar en la misma cantidad, pero no modificarían la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera.

**PROBLEMA RESUELTO 28-4.** Una partícula alfa ( $q = +2e$ ) en un acelerador nuclear pasa de una terminal con un potencial de  $V_a = +6.5 \times 10^6$  V a otra con un potencial de  $V_b = 0$ . a) ¿Cuál es el cambio correspondiente en la energía potencial del sistema? b) Suponiendo que las terminales y sus cargas no se mueven y que tampoco fuerzas externas operan sobre el sistema, ¿qué cambio de energía cinética presenta la partícula?

**Solución** a) Con base en la ecuación 28-14 tenemos

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_b - U_a = q(V_b - V_a) \\ &= (+2)(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0 - 6.5 \times 10^6 \text{ V}) \\ &= -2.1 \times 10^{-12} \text{ J}. \end{aligned}$$

b) Si ninguna fuerza externa actúa sobre el sistema, su energía mecánica  $E = U + K$  deberá permanecer constante. En otras palabras,  $\Delta E = \Delta U + \Delta K = 0$  y, por tanto,

$$\Delta K = -\Delta U = +2.1 \times 10^{-12} \text{ J}.$$

La partícula alfa adquiere energía cinética de  $2.1 \times 10^{-12}$  J, de la misma manera que la obtiene una partícula que cae en el campo gravitacional de la Tierra.

Si quiere visualizar las simplificaciones que se logran, intente resolver este problema otra vez expresando las energías en unidades de eV.

## 28-4 CÁLCULO DEL POTENCIAL A PARTIR DEL CAMPO

Hasta ahora hemos caracterizado las cargas eléctricas y sus interacciones empleando cuatro propiedades: fuerza eléctrica, campo eléctrico, energía potencial eléctrica y potencial eléctrico. En la tabla 28-1 se incluyen las cuatro. Dos de ellas son vectores (fuerza y campo) y las otras dos son escalares (energía potencial y potencial eléctrico). Dos caracterizan la interacción de dos partículas (fuerza y energía potencial) y dos representan el efecto en un punto del espacio debido a una carga simple o a un grupo de cargas (campo y potencial). Las flechas dobles de la tabla indican que las cantidades en las casillas vecinas pueden calcularse una a partir de la otra; por ejemplo,  $\vec{E}$  a partir de  $\vec{F}$  (Ec. 26-3),  $U$  a partir de  $\vec{F}$  (Ec. 28-4) y  $V$  a partir de  $U$  (Ec. 28-12). A continuación vamos a examinar la cuarta conexión, a saber, la que existe entre  $V$  y  $\vec{E}$ .

La conexión entre  $V$  y  $\vec{E}$  se deduce directamente de la definición de potencial dada en la ecuación 28-11:  $\Delta V = -W_{ab}/q_0$ . Supóngase que pasamos una carga de prueba  $q_0$  de  $a$  a  $b$  en un campo eléctrico  $\vec{E}$ . Al calcular el trabajo ejecutado por la fuerza eléctrica  $\vec{F} = q_0 \vec{E}$  obtenemos

$$\Delta V = \frac{-W_{ab}}{q_0} = \frac{-\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}}{q_0} = \frac{-\int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}}{q_0}$$

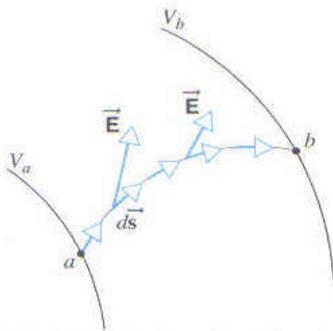
o bien

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (28-15)$$

Si el campo eléctrico sigue la dirección de  $d\vec{s}$ , la integral de la ecuación 28-15 será positiva, y negativa la diferencia de potencial, esto es,  $V_b > V_a$ . El campo eléctrico moverá la par-

**TABLA 28-1** Propiedades de las cargas eléctricas

	Descripción vectorial	Descripción escalar
Interacción entre dos cargas	Fuerza $\vec{F}$	Energía potencial $U$
Efecto que una carga o grupo de cargas tienen en un punto del espacio	Campo $\vec{E}$	Potencial $V$



**FIGURA 28-5.** La diferencia de potencial entre *a* y *b* puede obtenerse calculando la integral de línea  $\vec{E}$  a lo largo de la trayectoria *ab*.

tícula con carga positiva de una región de mayor potencial a otra de menor potencial o una partícula de carga negativa en dirección contraria.

Una integral como la de la ecuación 28-15 recibe el nombre de *integral de línea*. La figura 28-5 muestra el cálculo de una integral de línea. Integramos de *a* a *b* en una trayectoria adecuada; sabemos que la diferencia de potencial es una magnitud independiente de la trayectoria; así que obtenemos el mismo resultado con la ecuación 28-15 prescindiendo de la trayectoria que escojamos. En términos generales, la magnitud y la dirección de  $\vec{E}$  pueden cambiar de un punto a otro a lo largo de la trayectoria. En cada paso de ella encontramos el producto punto entre  $\vec{E}$  y la diferencial de la trayectoria  $d\vec{s}$  (que esencialmente nos da el componente de  $\vec{E}$  a lo largo de la trayectoria); y sumamos estos productos en toda la trayectoria.

Como lo hicimos en la sección 28-3, tal vez queramos calcular el potencial en un punto en relación con el potencial de referencia escogido y no la diferencia de potencial de la ecuación 28-15. Si decidimos que el punto de referencia se encuentra en el infinito y si definimos  $V = 0$  como referencia, la ecuación 28-15 nos dará el potencial en el punto *P*

$$V_p = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (28-16)$$

**PROBLEMA RESUELTO 28-5.** En la figura 28-6, una carga de prueba  $q_0$  se desplaza por un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ , desde *a* hasta *b* en la trayectoria *acb*. Determine la diferencia de potencial entre *a* y *b*.

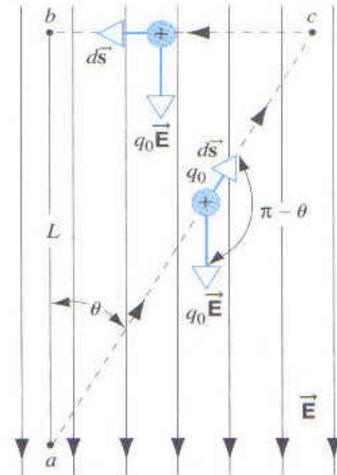
**Solución** De acuerdo con la ecuación 28-15, en la trayectoria *ac* tenemos

$$\begin{aligned} V_c - V_a &= - \int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_a^c E ds \cos(\pi - \theta) \\ &= E \cos \theta \int_a^c ds. \end{aligned}$$

La integral es la longitud de la línea *ac*, que es  $L/\cos \theta$ . Por tanto,

$$V_c - V_a = E \cos \theta \frac{L}{\cos \theta} = EL.$$

Los puntos *b* y *c* tienen el mismo potencial, porque no se efectúa trabajo al hacer pasar la carga entre ellos;  $\vec{E}$  y  $d\vec{s}$  forman ángulo recto en todos los puntos de la línea *cb*. Por consiguiente,



**FIGURA 28-6.** Problema resuelto 28-5. Una carga de prueba  $q_0$  se desplaza por la trayectoria *acb* en el campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ .

$$V_b - V_a = (V_b - V_c) + (V_c - V_a) = 0 + EL = EL.$$

El valor anterior es el mismo que se obtuvo para una trayectoria directa que conecta *a* con *b*, resultado previsto, ya que la diferencia de potencial entre los dos puntos no depende de la trayectoria.

## 28-5 POTENCIAL GENERADO POR CARGAS PUNTUALES

En la presente sección utilizamos resultados de la sección anterior para obtener el potencial en varios arreglos de cargas puntuales. En la siguiente sección nos ocuparemos del potencial debido a distribuciones de carga continua.

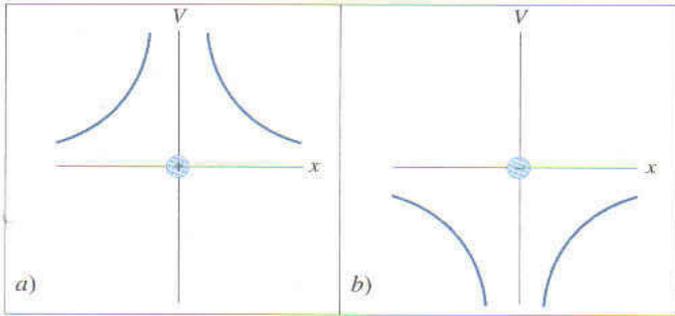
Ante todo vamos a estudiar el potencial proveniente de una carga puntual positiva  $q$ . Supongamos que una carga de prueba  $q_0$  pasa del punto *a* al punto *b* cerca de  $q$ . Queremos emplearla para calcular la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* debida a  $q$ . Podemos utilizar la geometría de la figura 28-1, donde  $q_1$  es reemplazada por  $q$  y  $q_2$  por  $q_0$ .

Ya hemos obtenido la diferencia de energía potencial  $\Delta U$  en esta situación, que ofrece la ecuación 28-5 en el caso de dos cargas puntuales. Si la escribimos para las cargas  $q$  y  $q_0$  y si con la ecuación 28-9 determinamos la diferencia de potencial, obtendremos

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right). \quad (28-17)$$

Según se mencionó en la sección 28-2, la ecuación 28-5 es válida aun cuando los puntos *a* y *b* no se encuentren en la misma línea. La ecuación 28-17 se aplica a la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera *a* y *b*.

En vez de la diferencia de potencial entre dos puntos, podemos determinar el potencial en un solo punto cerca de  $q$ . La ecuación 28-7 nos da la energía potencial  $U$  generada por la interacción de dos cargas puntuales. El punto de referencia en



**FIGURA 28-7.** Potencial en una dimensión (que se escoge como el eje  $x$ ) para *a*) una carga puntual positiva y *b*) en una carga puntual negativa. Su magnitud aumenta a infinito al convertirse en cero la distancia respecto a la carga. El potencial de una carga positiva simple es positivo en todas partes, y negativo en una carga negativa simple.

esta expresión se toma en el infinito, donde se define  $U = 0$ . Podemos emplear la ecuación 28-7, escrita para las cargas  $q$  y  $q_0$  para encontrar el potencial en un punto usando la ecuación 28-12 para el potencial

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (28-18)$$

en cualquier punto a una distancia  $r$  de  $q$ . Nótese que la ecuación 28-18, podría haberse conseguido directamente de la ecuación 28-17, con sólo imponer la condición de referencia con  $V_a = 0$  en  $r_a = \infty$ .

La ecuación 28-18 muestra que el potencial de una carga puntual positiva es cero a grandes distancias y que crece hasta alcanzar grandes valores positivos conforme nos acercamos a la carga ( $r \rightarrow 0$ ). Si  $q$  es negativa, el potencial aumenta alcanzando altos valores negativos al aproximarnos a la carga. Advuértase que los resultados anteriores no dependen en absoluto del signo de la carga de prueba  $q_0$  empleada en el cálculo. La figura 28-7 contiene el potencial en función desde la distancia de la carga para una carga puntual positiva y una negativa.

**PROBLEMA RESUELTO 28-6.** ¿Cuál debe ser la magnitud de una carga puntual positiva aislada para que el potencial eléctrico a 15 cm de distancia de la carga sea de +120 V? Supongamos que  $V = 0$  en el infinito.

**Solución** Resolviendo la ecuación 28-18 para  $q$  obtenemos

$$q = 4\pi\epsilon_0 rV = (4\pi)(8.9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(0.15 \text{ m})(120 \text{ V}) \\ = 2.0 \times 10^{-9} \text{ C} = 2.0 \text{ nC}.$$

Esta carga se asemeja a las cargas que pueden producirse por fricción, como cuando se frota un globo.

**PROBLEMA RESUELTO 28-7.** ¿Cuál es el potencial eléctrico en la superficie de un núcleo de oro? Su radio es  $7.0 \times 10^{-15} \text{ m}$ , y su número atómico  $Z$  es 79.

**Solución** El núcleo, supuestamente de simetría esférica, se comporta eléctricamente en los puntos externos como si fuese una carga

puntual. Así pues, podemos utilizar la ecuación 28-18 que con  $q = +79e$ , nos da

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{(9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(79)(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})}{7.0 \times 10^{-15} \text{ m}} \\ = 1.6 \times 10^7 \text{ V}.$$

Este gran potencial positivo no tiene efecto alguno fuera del átomo de oro, porque se compensa con un potencial negativo igualmente grande proveniente de los 79 electrones atómicos del oro.

## Potencial generado por una serie de cargas puntuales

Supóngase que tenemos un conjunto de cargas puntuales  $N$   $q_1, q_2, \dots, q_N$ , situadas en varios puntos fijos (Fig. 28-8). Queremos determinar el potencial en un punto arbitrario  $P$  debido a ellas. El procedimiento consiste en calcular el potencial en  $P$  producido por cada carga, como si no hubiera otras, y en sumar luego los potenciales resultantes para obtener el potencial total. Es decir,

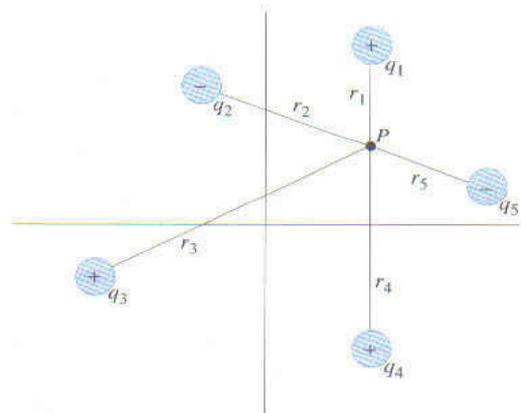
$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_N \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} + \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_N}{r_N}, \quad (28-19)$$

que puede escribirse en la forma compacta así

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{r_n}. \quad (28-20)$$

En estas expresiones,  $q_n$  es el valor (magnitud y signo) de la *enésima* carga y  $r_n$  es la distancia de ella respecto al punto  $P$  donde queremos obtener el potencial.

Podríamos emplear la ecuación 28-20 para, por ejemplo, determinar el trabajo hecho cuando colocamos en el punto  $P$  de la figura 28-8 una carga de prueba  $q_0$  originada en el infinito. En este cálculo vemos la ventaja de emplear el potencial (un escalar) en vez de la fuerza (un vector). Si queremos obtener la fuerza neta de una carga de prueba en  $P$ , habría que realizar una suma vectorial. El cálculo escalar del potencial es mucho más simple.



**FIGURA 28-8.** Conjunto de cargas puntuales.

En este cálculo descubrimos que la contribución que al potencial hace una carga es como si no hubiera otras. El anterior es un ejemplo más de la aplicación del principio de superposición, que se explicó al tratar las fuerzas eléctricas en el capítulo 25.

**PROBLEMA RESUELTO 28-8.** Calcule el potencial en el punto  $P$ , situado en el centro del cuadrado de cargas puntuales que aparece en la figura 28-9a. Suponga que  $d = 1.3$  m y que las cargas son

$$\begin{aligned} q_1 &= +12 \text{ nC}, & q_3 &= +31 \text{ nC}, \\ q_2 &= -24 \text{ nC}, & q_4 &= +17 \text{ nC}. \end{aligned}$$

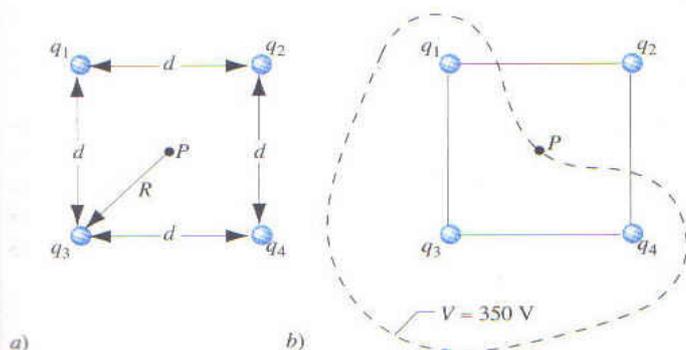
**Solución** De acuerdo con la ecuación 28-20 tenemos

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n \frac{q_n}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4}{R}$$

La distancia  $R$  de las cargas respecto al centro del cuadrado es  $d/\sqrt{2}$ , o sea 0.919 m; así que

$$\begin{aligned} V &= \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(12 - 24 + 31 + 17) \times 10^{-9} \text{ C}}{0.919 \text{ m}} \\ &= 3.5 \times 10^2 \text{ V}. \end{aligned}$$

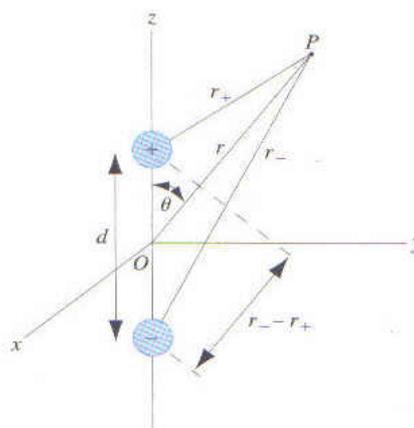
Cerca a cualquiera de las tres cargas positivas de la figura 28-9a, el potencial puede tener valores positivos muy grandes. Cerca a la carga negativa individual de la figura, el potencial puede tener grandes valores negativos. Debe haber entonces otros puntos dentro de los límites del cuadrado que posean el mismo potencial que en el punto  $P$ . La línea punteada de la figura 28-9b conecta otros puntos en el plano que presentan este mismo valor del potencial. Según veremos más adelante en la sección 28-8, tales superficies equipotenciales ofrecen un medio útil de visualizar los potenciales de varias distribuciones de carga.



**FIGURA 28-9.** Problema resuelto 28-8. a) Se mantienen cuatro cargas en los vértices de un cuadrado. b) La curva conecta los puntos que poseen el mismo potencial (350 V) como el punto  $P$  en el centro del cuadrado.

### Potencial generado por un dipolo eléctrico

Este potencial puede calcularse en forma simple por medio de la ecuación 28-20. La figura 28-10 contiene la geometría del cálculo. Ponemos el origen del sistema coordenado en el cen-



**FIGURA 28-10.** Geometría para calcular el potencial en el punto  $P$  producido por un dipolo eléctrico.

tro del dipolo y luego buscamos el potencial eléctrico en el punto  $P$ , situado a una distancia  $r$  del centro del dipolo y en un ángulo  $\theta$  del eje del mismo (el eje  $z$ ). Las distancias de las cargas positiva y negativa con  $P$  son, respectivamente,  $r_+$  y  $r_-$ . Si empleamos la ecuación 28-20 descubrimos que el potencial es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-} \right). \quad (28-21)$$

La ecuación 28-21 es la expresión exacta del potencial debido al dipolo. No obstante, en muchas aplicaciones (como la de los dipolos atómicos o moleculares) se consigue una relación más útil reconociendo que el punto de observación  $P$  está muy lejos del dipolo en comparación con la distancia  $d$  entre las cargas, es decir,  $r \gg d$ . En este caso

$$r_- - r_+ \approx d \cos \theta \quad \text{y} \quad r_- r_+ \approx r^2,$$

y al sustituir los resultados anteriores en la ecuación 28-21 queda

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}, \quad (28-22)$$

donde hemos usado la ecuación 26-8 ( $p = qd$ ) para el momento del dipolo. Con la ecuación 28-22 se obtiene el potencial debido a un dipolo en un punto cualquiera del espacio. El dipolo presenta simetría cilíndrica en las rotaciones alrededor del eje  $z$ , de manera que la ecuación 28-22 es válida en los puntos que no se hallen en el plano del diagrama de la figura 28-10.

Adviértase que el potencial generado por el dipolo varía como  $1/r^2$ . Ello contrasta con el potencial de una carga individual, el cual varía (Ec. 28-18) como  $1/r$ .

En la ecuación 28-22 se muestra que  $V = 0$  cuando  $\theta = 90^\circ$ , lo cual corresponde a los puntos en el plano  $xy$  de la figura 28-10. Eso significa que, si llevamos una carga de prueba del infinito a un punto en el plano  $xy$ , el dipolo no realiza trabajo neto sobre la carga de prueba. Con una  $r$  determinada, el potencial fluctúa entre valores positivos en el eje positivo  $z$  ( $\theta = 0$ ), cero en el plano  $xy$  ( $\theta = 90^\circ$ ) y valores negativos en el eje negativo  $z$  ( $\theta = 180^\circ$ ).

Nótese que, aunque  $V = 0$  en el plano  $xy$ , no es verdad que  $\vec{E} = 0$  en ese plano. En términos generales, no es posible suponer que  $V = 0$  signifique que  $\vec{E} = 0$  ni que  $\vec{E} = 0$  signifique que  $V = 0$ .

**PROBLEMA RESUELTO 28-9.** Una *cuadrupolo eléctrico* consta de dos dipolos dispuestos, de modo que casi se cancelan sus efectos eléctricos en puntos lejanos (Fig. 28-11). Calcule  $V(r)$  en los puntos de su eje.

**Solución** Al aplicar la ecuación 28-20 a la figura 28-11 se obtiene

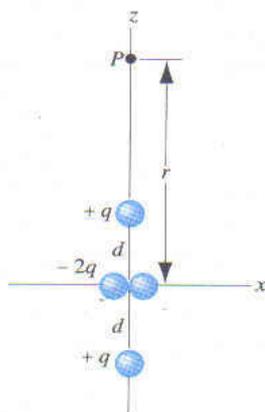
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r-d} + \frac{-2q}{r} + \frac{q}{r+d} \right) \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qd^2}{r(r^2-d^2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qd^2}{r^3(1-d^2/r^2)}$$

Puesto que  $d \ll r$ , podemos prescindir de  $d^2/r^2$  en comparación con 1, y entonces el potencial se convierte en

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3}, \quad (28-23)$$

donde  $Q (= 2qd^2)$  es el *momento cuadrupolar eléctrico* del conjunto de cargas de la figura 28-11. Nótese que  $V$  varía 1) como  $1/r$  para una carga puntual (Ec. 28-11), 2) como  $1/r^2$  en un dipolo (Ec. 28-22) y 3) como  $1/r^3$  en un cuadrupolo (Ec. 28-23).

Nótese asimismo que 1) un dipolo son dos cargas iguales y opuestas que no coinciden totalmente en el espacio; de ahí que sus efectos eléctricos en puntos distantes no se cancelen por completo y 2) que un cuadrupolo es dos dipolos iguales y opuestos que no coinciden en el espacio, de modo que sus efectos eléctricos en puntos distantes no se cancelan totalmente. Podemos seguir construyendo conjuntos más complejos de cargas eléctricas. Es un proceso de gran utilidad, ya que el potencial eléctrico de *cualquier* distribución de carga puede representarse como una serie de términos en potencias crecientes de  $1/r$ . La parte  $1/r$ , denominada término *monopolo*, depende de la carga neta de distribución; los términos subsiguientes  $1/r^2$ , el término *dipolo*;  $1/r^3$ , el término *cuadrupolo*, etc., indican cómo se distribuye la carga. A este tipo de análisis se le conoce como *expansión en multipolos*.



**FIGURA 28-11.** Problema resuelto 28-9. Cuadrupolo eléctrico constituido por dos dipolos que tienen dirección contraria.

## 28-6 EL POTENCIAL ELÉCTRICO DE LAS DISTRIBUCIONES DE CARGA CONTINUA

En la sección 25-5 se explicó un procedimiento para calcular la fuerza que una distribución de carga continua ejerce sobre una carga puntual. En forma similar obtenemos la energía potencial de la interacción entre una distribución continua y una carga puntual, para lo cual se determina el potencial de las tres distribuciones de carga mencionadas en la sección 25-5.

El procedimiento con que se calcula el potencial de una distribución de carga continua se asemeja al que se utilizó para encontrar la fuerza (o el campo eléctrico en la Sec. 26-4), con una importante excepción: el potencial es un escalar, y por lo mismo no nos tropezamos con las dificultades de la sección 25-5 debido a las diversas direcciones de los elementos de fuerza  $d\vec{F}$  o a los elementos del campo  $d\vec{E}$  procedentes de diferentes elementos de carga  $dq$ .

El procedimiento con que se calcula el potencial comienza dividiendo el objeto en elementos de carga  $dq$ . Puede escribirse el potencial  $dV$  generado por un elemento de carga  $dq$  suponiendo que se comporta como una carga puntual:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}, \quad (28-24)$$

donde  $r$  es la distancia entre  $dq$  y el punto de observación  $P$ . El potencial total se obtiene sumando las contribuciones de todos los elementos de carga del objeto:

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad (28-25)$$

donde la integral se resuelve sobre la distribución entera de carga.

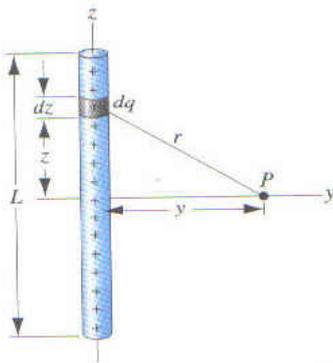
### Una línea uniforme con carga

Nos servimos de la geometría de la figura 28-12 para encontrar el potencial producido por una línea uniforme con carga positiva en el punto  $P$ , a una distancia  $y$  de la varilla en su bisector perpendicular. Aplicamos la ecuación 28-24, usando los elementos de carga  $dq = \lambda dz$  (donde  $\lambda$  es la densidad de carga lineal), y así obtenemos

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{\sqrt{z^2 + y^2}}. \quad (28-26)$$

Al resolver la integración sobre la longitud  $L$ , como en la ecuación 28-25, y al observar que  $y$  es constante, obtenemos

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\lambda dz}{\sqrt{z^2 + y^2}} \\ = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( z + \sqrt{z^2 + y^2} \right) \right]_{-L/2}^{+L/2} \\ = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{L/2 + \sqrt{L^2/4 + y^2}}{-L/2 + \sqrt{L^2/4 + y^2}} \right]. \quad (28-27)$$



**FIGURA 28-12.** Varilla con carga uniforme. Para obtener el potencial en el punto  $P$ , suponemos que la varilla está compuesta por muchos elementos individuales de carga  $dq$ .

donde nos hemos servido de la relación  $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$  para conseguir el último resultado.

Es importante revisar el resultado anterior para comprobar si tiene el valor límite correcto. A medida que nos alejamos de la varilla, esperamos que el potencial se aproxime a 0, y la ecuación 28-27 tiene esta propiedad como  $y \rightarrow \infty$ . Más aún, puede demostrarse que cuando  $y$  es grande, la ecuación 28-27 queda así

$$V \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y}, \quad (28-28)$$

que es simplemente la expresión del potencial situado a una distancia  $y$  de una carga puntual. Cuando estamos muy lejos de la varilla, da la impresión de ser una carga puntual.

### Un anillo con carga

La figura 28-13 muestra un anillo uniforme con carga positiva. La contribución al potencial en el punto  $P$  en su eje debido al elemento de carga  $dq = \lambda ds = \lambda R d\phi$  es

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \quad (28-29)$$

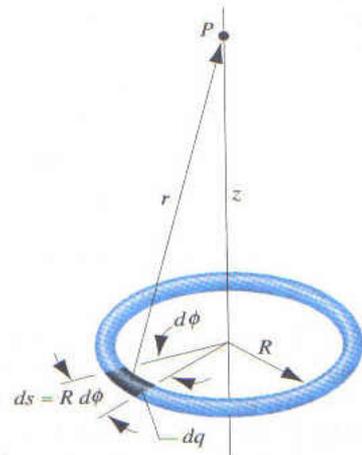
Al integrar alrededor del eje como se hizo en la sección 25-5, observamos que  $R$  y  $z$  permanecen constantes. La variable de integración es  $\phi$ , que varía de 0 a  $2\pi$ .

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \quad (28-30)$$

Nótese que, a medida que  $z \rightarrow \infty$ , el potencial se reduce a cero y con  $z$  grande tiene el valor aproximado  $q/4\pi\epsilon_0 z$  (donde  $q = 2\pi\lambda R$ ), según lo previsto para un lugar a una distancia  $z$  de una carga puntual.

### Un disco con carga eléctrica

Con la geometría de la figura 28-14 podemos utilizar la ecuación 28-30 para calcular el potencial  $dV$  en el punto  $P$ , debido al anillo de radio  $w$  y de carga  $dq = \sigma dA$  con el elemento de área  $dA = 2\pi w dw$ :



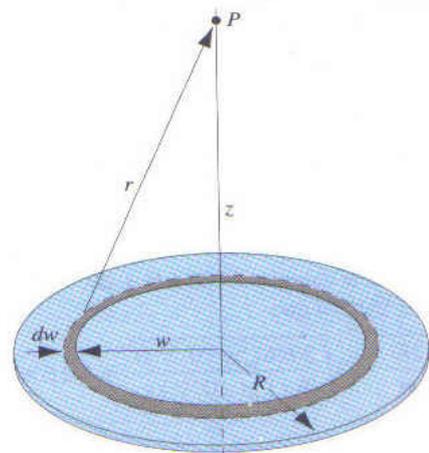
**FIGURA 28-13.** Anillo cargado uniformemente. Para obtener el potencial en  $P$  se calcula el efecto total de los elementos de carga  $dq$ .

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{w^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma w dw}{\sqrt{w^2 + z^2}}. \quad (28-31)$$

Si queremos sumar las contribuciones de todos los anillos del disco, integramos  $w$  en su variación entre 0 y  $R$ :

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{w dw}{\sqrt{w^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right). \quad (28-32)$$

El último término de la ecuación 28-32 se consiguió al evaluar  $\sqrt{z^2}$  y se escribe como  $|z|$ , de modo que la ecuación 28-32 es válida en los puntos del eje  $z$  arriba del disco ( $z > 0$ ), lo mismo que debajo de él ( $z < 0$ ). El potencial tiene su valor máximo en la superficie del disco (donde  $z = 0$ ) y disminuye al movernos a lo largo del eje  $z$  en una u otra dirección.



**FIGURA 28-14.** El disco de radio  $R$  contiene una densidad de carga uniforme  $\sigma$ . El elemento de carga  $dq$  es un anillo con carga uniforme.

Cuando  $z$  es grande, podemos valernos del teorema binomial para desarrollar la raíz cuadrada en la ecuación 28-32:

$$\sqrt{R^2 + z^2} = |z| \left( 1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{1/2} \approx |z| \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} \right) \quad (28-33)$$

y, al insertar el resultado anterior en la ecuación 28-32, encontramos una vez más la expresión del potencial de una carga puntual.

Con valores muy pequeños de  $z$  el potencial es

$$V = \sigma R / 2\epsilon_0 - \sigma |z| / 2\epsilon_0. \quad (28-34)$$

El potencial se aproxima al valor constante  $\sigma R / 2\epsilon_0$  a medida que  $z \rightarrow 0$  y disminuye linealmente al incrementarse  $z$  en ambas direcciones. La rapidez con que se reduce al desplazarnos por el eje (dada por el segundo término de la Ec. 28-34) no depende del tamaño del disco, con una densidad de carga determinada. De hecho, este término resulta ser el mismo en grandes placas planas de carga uniforme, sin importar su tamaño ni su forma (redonda, cuadrada, etc.) Con tal que estén cerca de su centro y, por lo mismo, lejos de todo borde. Este hecho nos servirá para dibujar un "mapa" del potencial en la siguiente sección.

**PROBLEMA RESUELTO 28-10.** Un disco de radio  $R = 4.8$  cm tiene una carga total  $q = +2.5$  nC que se distribuye uniformemente en su superficie y se sostiene en sitios fijos (imagíne que la superficie se comporta como un aislante). Un electrón se halla inicialmente en reposo a una distancia de  $d = 3.0$  cm del disco sobre su eje. Cuando lo liberamos, es atraído hacia el disco. ¿Cuál es su velocidad cuando choca contra el centro del disco?

**Solución** La densidad de carga del disco es

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2} = \frac{2.5 \times 10^{-9} \text{ C}}{\pi (0.048 \text{ m})^2} = 3.45 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2.$$

La diferencia de potencial entre los sitios con  $z = d$  y con  $z = 0$  se obtiene a partir de la ecuación 28-32:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(0) - V(d) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + d^2} - d) \\ &= \frac{3.45 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2}{2(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)} [0.048 \text{ m} \\ &\quad - (\sqrt{(0.048 \text{ m})^2 + (0.030 \text{ m})^2} - 0.030 \text{ m})] \\ &= 417 \text{ V}. \end{aligned}$$

Usando la ecuación 28-14 el cambio de la energía potencial del electrón es

$$\Delta U = q \Delta V = (-1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(417 \text{ V}) = -6.67 \times 10^{-17} \text{ J}.$$

La conservación de la energía nos da  $\Delta U + \Delta K = 0$ , o  $\Delta K = -\Delta U = +6.67 \times 10^{-17} \text{ J}$ , así que

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-17} \text{ J})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 1.21 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

**PROBLEMA RESUELTO 28-11.** Con la expresión del campo eléctrico generado por un anillo uniforme de carga positiva en un punto de su eje (el eje  $z$ ) encuentre la expresión del potencial producido por el anillo en un punto del eje a una distancia  $z'$  del anillo.

**Solución** La ecuación 28-16 contiene la relación entre  $V$  y  $\vec{E}$ . El campo eléctrico del anillo cargado se dio en la ecuación 26-18. Tiene sólo un componente  $z$  y, por ello, el integrando de la ecuación 28-16 se reduce a  $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_z dz$ . Integramos en ella del infinito al punto  $P$  (el punto de observación):

$$V_P = - \int_{\infty}^{z'} E_z dz = - \int_{\infty}^{z'} \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{Rz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} dz.$$

Al resolver la integral se obtiene

$$V_P = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{z'^2 + R^2}},$$

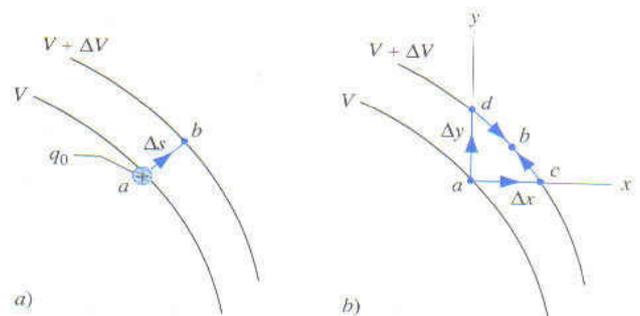
expresión idéntica a la ecuación 28-30, conseguida al integrar en la distribución de carga del anillo.

## 28-7 CÁLCULO DEL CAMPO A PARTIR DEL POTENCIAL

En la sección 28-4 describimos un método para obtener la diferencia de potencial partiendo de un campo eléctrico. Ahora vamos a explicar la manera de efectuar ese cálculo en sentido inverso: si conocemos el potencial es posible determinar el campo eléctrico. Es decir, la flecha doble que conecta las dos cajas en la tabla 28-1 puede seguir una u otra dirección.

La figura 28-15a muestra una carga de prueba positiva  $q_0$ , conforme se desplaza del punto  $a$  (donde el potencial es  $V$ ) al punto  $b$  (donde el potencial es  $V + \Delta V$ ). Al hacerlo, la energía potencial eléctrica de  $q_0$  cambia en una cantidad  $\Delta U = q_0 \Delta V$ . En la terminología de fuerzas, diríamos que existe un campo eléctrico  $\vec{E}$  que ejerce una fuerza  $\vec{F} = q_0 \vec{E}$  sobre la partícula. El trabajo efectuado por ella al pasar la partícula de  $a$  a  $b$  es  $W = F_s \Delta s = q_0 E_s \Delta s$ , donde  $E_s$  y  $F_s$  son los componentes de  $\vec{E}$  y  $\vec{F}$  a lo largo de  $\Delta s$  que representa el desplazamiento de la partícula al hacer el recorrido entre  $a$  y  $b$ . (Suponemos que  $\Delta s$  es pequeña y, en consecuencia, podemos considerar la fuerza y el campo como aproximadamente constantes tanto en la magnitud como en la dirección a lo largo de  $ab$ .) La conexión matemática entre las dos descripciones equivalentes  $W = -\Delta U$  que nos da

$$q_0 E_s \Delta s = -q_0 \Delta V \quad (28-35)$$



**FIGURA 28-15.** a) Una partícula cargada  $q_0$  se mueve en la trayectoria  $ab$  entre dos equipotenciales. b) La partícula pasa de  $a$  a  $b$  a través de las trayectorias  $acb$  o  $adb$ .

o bien

$$E_s = -\frac{\Delta V}{\Delta s} \quad (28-36)$$

Esta ecuación es la conexión fundamental entre el campo y el potencial eléctricos: el primero es el negativo del cambio del segundo con la distancia. Si  $\Delta V$  es positivo, el campo eléctrico produce una fuerza que se opone al movimiento de la partícula de prueba con carga positiva entre  $a$  y  $b$ ; si  $\Delta V$  es negativo, el campo produce una fuerza en dirección del movimiento. En el límite de desplazamientos infinitesimales, la ecuación 28-36 se convierte en la derivada:

$$E_s = -\frac{dV}{ds} \quad (28-37)$$

El componente del campo eléctrico en una dirección cualquiera es el negativo de la derivada del potencial respecto a un desplazamiento en esa dirección.

Seleccionemos otra geometría para este proceso. En la figura 28-15b se muestra el mismo proceso, sólo que en vez de mover la carga de prueba directamente de  $a$  a  $b$ , la desplazamos a lo largo de dos trayectorias. La trayectoria  $acb$  toma la carga en el eje  $x$  desde  $a$  hasta  $c$  y luego a lo largo de la trayectoria desde  $c$  hasta  $b$ , que se escogió de modo que el potencial tiene el mismo valor  $V + \Delta V$  en todas las partes entre  $c$  y  $b$ . El trabajo realizado por el campo eléctrico a lo largo de  $cb$  es cero, porque el potencial no varía (Ec. 28-11). El realizado a lo largo de  $ac$  es  $F_x \Delta x = q_0 E_x \Delta x$ . Como el cambio de energía potencial no depende de la trayectoria, una vez más a partir de  $W = -\Delta U$  tenemos

$$q_0 E_x \Delta x = -q_0 \Delta V \quad \text{o} \quad E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

Si movemos la partícula en la trayectoria  $adb$ , el trabajo es  $F_y \Delta y = q_0 E_y \Delta y$  a lo largo de  $ad$ , y cero a lo largo de  $db$  (seleccionada una vez más de modo que el potencial tenga el mismo valor  $V + \Delta V$  en todas las partes entre  $d$  y  $b$ ). Dado que el cambio neto de la energía potencial a lo largo de  $adb$  es también  $\Delta V$ , obtenemos

$$q_0 E_y \Delta y = -q_0 \Delta V \quad \text{o} \quad E_y = -\frac{\Delta V}{\Delta y}$$

Un resultado similar hubiéramos conseguido para  $E_z$  en un cálculo tridimensional.

Si tomamos el límite a medida que la longitud de las trayectorias se vuelve muy pequeño, las diferencias se transforman en derivadas y es posible escribir la relación más general entre  $\vec{E}$  y  $V$  como:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (28-38)$$

Si se conoce  $V(x, y, z)$  en todos los puntos del espacio para una distribución de carga, pueden encontrarse los componentes de  $\vec{E}$  con sólo tomar las derivadas parciales de  $V$  respecto a cada una de las coordenadas.\*

\* El símbolo  $\partial V/\partial x$  denota una derivada parcial. Al considerar esta derivada de la función  $V(x, y, z)$  la cantidad  $x$  debe verse como variable y  $y$  y  $z$  se deben considerar constantes. Las mismas consideraciones deben hacerse para  $\partial V/\partial y$  y  $\partial V/\partial z$ .

Tenemos, pues, dos métodos para calcular el campo eléctrico en las distribuciones de carga continua: uno se basa en integrar la ley de Coulomb (Ecs. 26-13 a 26-15) y el otro se basa en derivar el potencial (Ec. 28-38). En la práctica, el segundo resulta ser menos difícil.

**PROBLEMA RESUELTO 28-12.** Use la ecuación 28-32 para el potencial en el eje de un disco cargado uniformemente, para obtener una expresión aplicable al campo eléctrico en los puntos axiales.

**Solución** Con base en la simetría,  $\vec{E}$  debe encontrarse en el eje del disco (el eje  $z$ ). Por medio de la ecuación 28-38 tenemos (suponiendo que  $z > 0$ )

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz} [(z^2 + R^2)^{1/2} - z] \\ = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

en concordancia con el resultado obtenido por integración directa (Ec. 26-19).

**PROBLEMA RESUELTO 28-13.** La figura 28-16 muestra un punto  $P$  distante en el campo de un dipolo situado en el origen de un sistema coordenado  $xz$ . Calcule  $\vec{E}$  en función de la posición.

**Solución** De acuerdo con la simetría, en los puntos del plano de la figura 28-16,  $\vec{E}$  se halla en él y puede expresarse a partir de sus componentes  $E_x$  y  $E_z$ , donde  $E_y$  es cero. Expresemos primero el potencial en coordenadas rectangulares, en vez de polares por medio de

$$r = (x^2 + z^2)^{1/2} \quad \text{y} \quad \cos \theta = \frac{z}{(x^2 + z^2)^{1/2}}$$

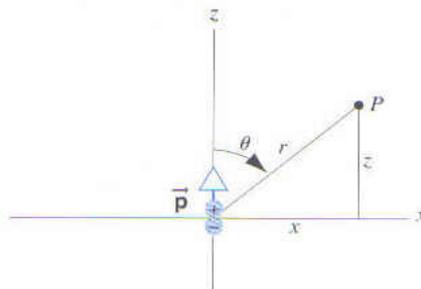
La ecuación 28-22 nos da  $V$ :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

Al hacer las sustituciones relativas a  $r^2$  y  $\cos \theta$  obtenemos

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

Encontramos  $E_z$  a partir de la ecuación 28-38, recordando que  $x$  debe tratarse como una constante en este cálculo.



**FIGURA 28-16.** Problema resuelto 28-13. Un dipolo se localiza en el origen del sistema  $xz$ .

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x^2 + z^2)^{3/2} - z[3/2(x^2 + z^2)^{1/2}](2z)}{(x^2 + z^2)^3}$$

$$= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - 2z^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}} \quad (28-39)$$

Al hacer  $x = 0$  se describen puntos lejanos a lo largo del eje del dipolo (o sea el eje  $z$ ) y la expresión anterior de  $E_z$  se reduce a

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{z^3}$$

Este resultado coincide exactamente con el del capítulo 26, problema 1, relativo al campo en el eje del dipolo. Nótese que en el eje  $z$   $E_x = 0$  conforme a la simetría.

Al hacer  $z = 0$  en la ecuación 28-39 da  $E_z$  tratándose de puntos distantes en el plano medio del dipolo:

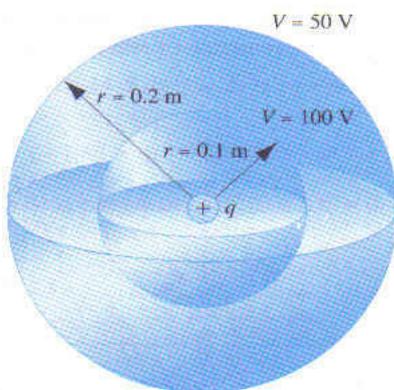
$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3}$$

resultado que coincide exactamente con la ecuación 26-12, porque una vez más, según la simetría,  $E_x$  es igual a cero en el plano medio. El signo negativo de la ecuación indica que  $\vec{E}$  apunta en la dirección negativa  $z$ . Puede aplicarse un procedimiento similar para encontrar  $E_x$ ; deberá conseguirse un resultado que concuerde con el del problema 2 del capítulo 26.

## 28-8 SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Considere una carga puntual  $q = 1.11$  nC. Por medio de la ecuación 28-18 puede determinarse que el potencial que produce es 100 V a una distancia de 0.1 m de ella. Su valor es 100 V en esa distancia en cualquier dirección, pues ninguna direccionalidad se relaciona con el potencial. Esto se indica en la figura 28-17. El potencial es 100 V en cualquier punto de la esfera de radio 0.1 m que rodea a  $q$ . En una segunda esfera de radio 0.2 m, el potencial en todas partes tiene un valor de 50 V.

Se llama *superficie equipotencial* a aquella en que el potencial tiene el mismo valor en todas partes, como el de las esferas de la figura 28-17. Las fuerzas eléctricas no realizan trabajo alguno cuando pasamos una carga de prueba de un



**FIGURA 28-17.** El potencial posee el mismo valor en todos los puntos de una esfera que rodea a la carga  $q$ . Se muestran dos esferas, una con  $V = 100$  V y la otra con  $V = 50$  V.

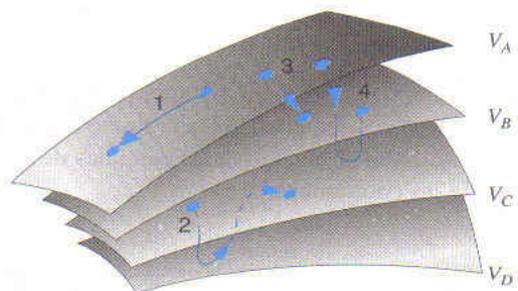
punto cualquiera en una superficie equipotencial a otro punto de la misma superficie, ya que  $\Delta V = 0$ . Aun cuando la trayectoria se aleje de la superficie, no se efectúa trabajo, siempre y cuando la trayectoria comience y termine en la misma superficie equipotencial. El trabajo efectuado por las fuerzas eléctricas cuando una carga de prueba pasa de una superficie equipotencial a otra depende exclusivamente de la diferencia de potencial entre ellas; el trabajo no depende del punto de partida ni de terminación: se hace el mismo trabajo cuando la carga se dirige de un punto *cualquiera* en la primera superficie a *otro* de la segunda.

La figura 28-18 muestra partes de una familia de superficies equipotenciales que pudieran relacionarse con cierta distribución de carga. El trabajo que llevan a cabo las fuerzas eléctricas cuando una partícula cargada se desplaza por la trayectoria 1 es cero, porque esta trayectoria empieza y termina en la misma superficie equipotencial. El trabajo realizado en la trayectoria 2 también es cero por la misma razón. No lo es en las trayectorias 3 y 4, pero posee el mismo valor en ambas, puesto que conecta el mismo par de superficies equipotenciales. Es decir, las trayectorias 3 y 4 conectan puntos con la misma diferencia de potencial ( $V_B - V_A$ ). Si pasamos una carga  $q$  de cualquier punto de la superficie  $A$  a *otro cualquiera* en la superficie  $B$ , el trabajo efectuado por la fuerza electrostática es, conforme a la ecuación 28-11,  $W_{AB} = -q(V_B - V_A)$ .

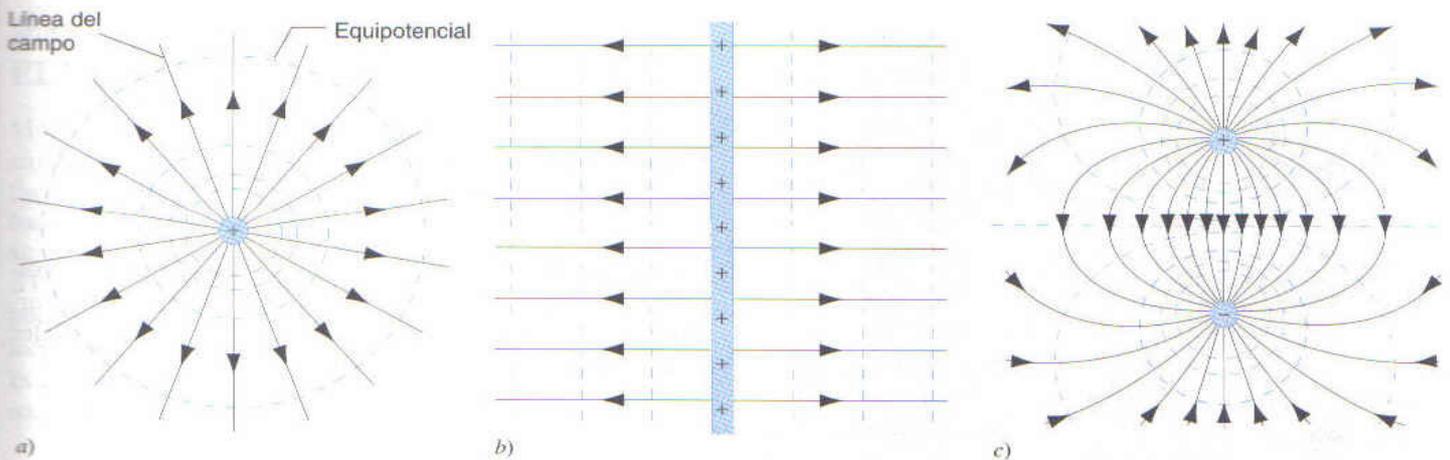
## Líneas del campo y superficies equipotenciales

En la sección 26-5 explicamos otro método gráfico con que se describe una distribución de carga y que se basa en las líneas del campo eléctrico. La relación matemática entre  $\vec{E}$  y  $V$  que se obtuvo en la sección 28-7, sugiere una relación también entre las representaciones gráficas.

Supóngase que en la figura 28-15 liberamos una carga positiva del reposo en el punto  $b$  del equipotencial  $V + \Delta V$ . En la terminología del potencial, decimos que la partícula "caerá" por la diferencia de potencial  $\Delta V$  hacia el equipotencial  $V$ . Podemos suponer que la acelera un campo eléctrico presente en la región situada entre las superficies equipotenciales. El campo deberá ser perpendicular a la superficie equipotencial en el punto  $b$ . De no ser así, el campo eléctrico tendría un componente a lo largo de la superficie equipoten-



**FIGURA 28-18.** Porciones de cuatro superficies equipotenciales. Se muestran cuatro trayectorias para mover una partícula de prueba.



**FIGURA 28-19.** Líneas del campo eléctrico (líneas gruesas) y secciones transversales de superficies equipotenciales (líneas punteadas) en a) una carga puntual positiva, b) una hoja infinita de carga positiva, vista a lo largo de su borde, y c) un dipolo eléctrico.

cial, la cual podría realizar trabajo sobre una partícula que se desplazó por su superficie. Sin embargo, eso violaría la definición de equipotencial como superficie de potencial constante por donde podemos mover libremente una partícula cargada sin realizar trabajo. Concluimos que *las líneas del campo eléctrico en todas partes deben ser perpendiculares a las superficies equipotenciales.*

Es posible llegar a la misma conclusión de la ecuación 28-37,  $E_s = -dV/ds$ . Habrá una dirección de  $ds$  en la figura 28-15 donde el valor de la cantidad  $-dV/ds$  alcance su valor máximo, lo cual significa que  $E_s$  también es un máximo en esa dirección. Ese valor máximo es  $E$ , la magnitud del campo eléctrico en dicho punto; la dirección en que  $E_s$  alcanza su valor máximo es la del campo eléctrico. Asimismo podemos trazar un punto  $b$  en un círculo de radio  $ds$ . Un punto en él estará más cerca del siguiente equipotencial y, por tanto, representará el mayor valor de  $-dV$ . La dirección de  $b$  hacia él es perpendicular a la superficie equipotencial en  $b$  y representa la dirección del campo eléctrico en  $b$ .

Si conocemos el patrón de las superficies equipotenciales en una distribución particular de carga, es posible encontrar las líneas del campo trazando perpendiculares a los equipotenciales. En la figura 28-19 se muestra la combinación de equipotenciales y de líneas de campo en tres casos que ya hemos visto: la carga puntual, la hoja infinita de carga y el dipolo. Los dibujos representan las líneas del campo eléctrico de las figuras 26-10, 26-11 y 26-12 con superficies equipotenciales sobrepuestas. Obsérvese que las líneas del campo son perpendiculares a los equipotenciales, siempre que se cruzan.

## 28-9 EL POTENCIAL DE UN CONDUCTOR CARGADO

En la sección 27-6 dedujimos dos propiedades de un conductor cargado aislado: 1) el campo eléctrico es cero en su interior y 2) la carga se halla en su superficie externa. Una tercera e

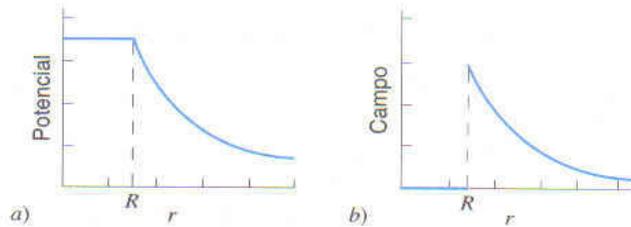
importante propiedad se consigue al considerar su potencial eléctrico.

Supóngase que tenemos un conductor de forma arbitraria, al que se transfiere una carga neta. Las cargas se desplazan libremente y pronto se distribuyen en la superficie externa del conductor hasta que alcanzan el equilibrio. En efecto, las cargas del mismo signo se repelen hasta lograr una distribución donde la distancia promedio entre ellas es lo más grande posible, de modo que la energía potencial de su arreglo obtiene un valor mínimo.

Si las cargas guardan equilibrio en la superficie del conductor, su superficie ha de ser un equipotencial. En caso contrario, algunas partes de la superficie tendrían un potencial mayor o menor que otras. Entonces las cargas positivas emigrarían hacia las regiones de potencial más bajo y las negativas a las de potencial más alto. Pero ello contradice la afirmación de que las cargas están en equilibrio. Por tanto, la superficie deberá ser un equipotencial.

Cuando el campo eléctrico es cero en el interior del conductor, movemos una carga de prueba en cualquier trayectoria del interior o de la superficie al interior y el trabajo neto efectuado en la carga de prueba por las de la superficie será cero. Ello significa que la diferencia de potencial entre dos puntos es cero; en consecuencia, el potencial posee el mismo valor en todos los puntos del conductor. Obtenemos, pues, una tercera propiedad de los conductores: *el conductor entero se encuentra al mismo potencial.* Esta conclusión se aplica únicamente en el caso electrostático; cuando hablamos de corrientes que fluyen a través de conductores, existe una diferencia de potencial entre diferentes puntos en el conductor.

Nótese que no hemos hecho suposición alguna respecto a la forma del conductor. Si es esférico, la carga se distribuirá uniformemente por la superficie. En aquellos conductores cuya forma no es esférica, la densidad de carga no es uniforme en la superficie, pero la superficie es todavía equipotencial. Inclusive en un conductor con cavidades internas, con carga



**FIGURA 28-20.** a) El potencial de un conductor esférico cargado. b) el campo eléctrico del conductor.

o sin ella, todos los puntos (de la superficie y del interior) se encuentran al mismo potencial.

La conclusión de que la superficie del conductor es una equipotencial concuerda con la de la sección 28-8, donde afirmamos que las líneas del campo eléctrico siempre son perpendiculares a las superficies equipotenciales. En la sección 27-6 recurrimos a la ley de Gauss para determinar que el campo eléctrico que se halla fuera de la superficie del conductor es perpendicular a la superficie, lo cual ha de ser verdadero si la superficie del conductor es una equipotencial.

Podemos obtener los resultados explícitos en el caso de un conductor esférico sólido que tiene en su superficie una carga total  $q$  distribuida uniformemente. En la sección 25-5 comentamos una propiedad del cascarón esférico con carga uniforme: la fuerza en una carga externa es la misma que si el cascarón fuera reemplazado con una carga puntual en su centro. Esta propiedad nos permite utilizar las expresiones de carga puntual con el potencial eléctrico (Ec. 28-18) y el campo eléctrico (Ec. 26-6) en sitios donde  $r > R$ .

Dentro del cascarón la fuerza en una carga puntual es cero, lo cual significa que el potencial ha de poseer el mismo valor en todo el conductor, incluyendo su superficie. El valor en ella se obtiene de la ecuación 28-18 evaluado en el caso de  $r = R$ ; así que el potencial en el interior es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}, \quad r < R. \quad (28-40)$$

La figura 28-20 muestra el campo y el potencial en un conductor esférico cargado y aislado. El campo es cero con  $r < R$  y disminuye como  $1/r^2$  para  $r > R$ . El potencial es constante cuando  $r < R$  y disminuye como  $1/r$  si  $r > R$ .

### Descarga en corona (opcional)

La carga superficial se distribuye uniformemente a través de un conductor esférico, pero *no* lo hará tratándose de conductores de forma arbitraria.\* Cerca de los puntos afilados o bordes, la densidad de carga superficial —y, por tanto, el campo eléctrico fuera de la superficie— puede alcanzar valores muy elevados.

Para ver desde el punto de vista cualitativo cómo ocurre eso, consideremos dos esferas conductoras de radios diferen-

\* Véase "The Lightning-rod Fallacy", por Richard H. Price y Ronald J. Crowley, *American Journal of Physics*, septiembre de 1985, p. 843, para una minuciosa discusión de este fenómeno.



**FIGURA 28-21.** Dos esferas conductoras conectadas por un alambre largo y delgado.

tes conectadas mediante un alambre delgado (Fig. 28-21). Supóngase que elevamos el arreglo entero hasta un potencial arbitrario  $V$ . Al utilizar la ecuación 28-40, los potenciales (iguales) de las dos esferas son

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2},$$

que nos da

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (28-41)$$

Suponemos que las esferas se encuentran tan lejos que la carga en una no afecta a la distribución de la carga en la otra.

La razón de las densidades de carga superficial en ambas es

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1/4\pi R_1^2}{q_2/4\pi R_2^2} = \frac{q_1 R_2^2}{q_2 R_1^2}.$$

La combinación del resultado anterior con la ecuación 28-41 nos da

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (28-42)$$

La ecuación 28-42 indica que la esfera más pequeña tiene mayor densidad de carga superficial. Al recordar que para una carga externa el campo es el mismo que si reemplazáramos la esfera por una carga puntual en su centro, el campo fuera de la superficie de la esfera puede expresarse así

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (28-43)$$

De acuerdo con la ecuación 28-42, la densidad de carga superficial es más grande en la esfera de radio menor y, en consecuencia, el campo también lo es fuera de la superficie de radio más pequeño. *Cuanto más pequeño es el radio de la esfera, más grande será el campo eléctrico fuera de la superficie.*

Cerca de un conductor afilado (es decir, de radio muy pequeño) el campo eléctrico puede ser lo bastante grande para ionizar las moléculas en el aire circundante; por eso, el aire normalmente no conductor puede conducir la carga y alejarla de él. A ese efecto se le llama *descarga en corona*. La utilizan los rociadores electrostáticos para transferir la carga a las gotas de pintura, que luego acelera un campo eléctrico. Las fotocopiadoras que se basan en el proceso xerográfico usan un alambre para producir una descarga en corona que transfiere una carga a una superficie cubierta de selenio; se neutraliza a la carga en regiones donde la luz choca contra la superficie y las áreas cargadas restantes atraen un fino polvo negro que forma la imagen. ■

## 28-10 EL ACELERADOR ELECTROSTÁTICO (opcional)

Muchos estudios relativos al núcleo se involucran en las reacciones nucleares, que tienen lugar cuando un haz de partículas incide en un blanco. Un método con que se aceleran se basa en una técnica electrostática. Una partícula con carga positiva  $q$  "cae" a través de un cambio negativo, en el potencial  $\Delta V$  y, por eso, experimenta un cambio negativo en su energía potencial,  $\Delta U = q \Delta V$ , de acuerdo con la ecuación 28-14. El incremento correspondiente a la energía cinética de la partícula es  $\Delta K = -\Delta U$ ; y suponiendo que la partícula parte del reposo, su energía cinética es

$$K = -q \Delta V. \quad (28-44)$$

En los átomos ionizados,  $q$  normalmente es positiva. Para obtener la mayor energía posible del haz, nos gustaría tener la máxima diferencia de potencial. En las aplicaciones de interés para la física nuclear, hacen falta las partículas con energía cinética de millones de electrón-volts (MeV) para superar la fuerza de repulsión de Coulomb entre las partículas incidentes y blanco. Las energías cinéticas de MeV exigen diferencias de potencial de millones de volts.

En la figura 28-22 se muestra un aparato electrostático que produce ese tipo de diferencias de potencial. Una pequeña esfera conductora de radio  $a$  y que tiene una carga  $q$  se halla dentro de un cascarón grande de radio  $b$  que lleva la carga  $Q$ . Una trayectoria conductora se establece momentáneamente entre los dos conductores; la carga  $q$  se mueve por completo hacia el conductor externo, sin importar la cantidad de  $Q$  que ya esté allí (porque la carga de un conductor siempre se dirige a la superficie externa). Si se cuenta con un mecanismo apropiado para reponer la carga  $q$  en la esfera interna partiendo del suministro externo, en teoría la carga  $Q$  en la esfera exterior y su potencial pueden aumentar sin límite. En la práctica, el potencial terminal se ve limitado por las chispas que se producen en el aire (Fig. 28-23).

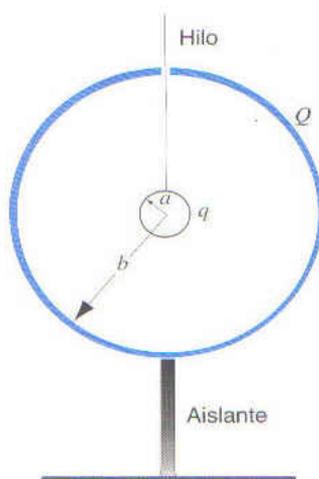


FIGURA 28-22. Una esfera pequeña con carga se suspende dentro de un cascarón esférico cargado y más grande.

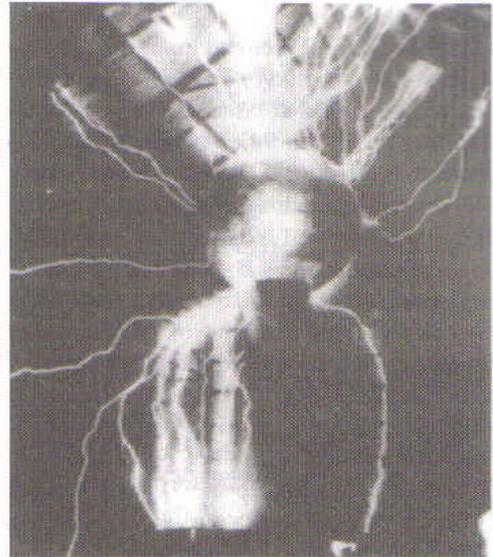


FIGURA 28-23. Generador electrostático, con un potencial de 2.7 millones de volts, que causa chispas debido a la conducción a través del aire.

A principios de la década de 1930, Robert J. Van de Graaff fue el primero en aplicar este principio tan conocido de la electrostática para acelerar las partículas nucleares; se le conoce como *acelerador de Van de Graaff*. Se conseguían potenciales de varios millones de volts; el potencial límite provenía de la fuga de carga a través de los soportes aislantes o la ruptura del aire (o del gas aislante a alta presión) que rodea a la terminal de alto voltaje.

La figura 28-24 muestra el diseño básico del acelerador de Van de Graaff. La carga es difundida desde una punta afilada

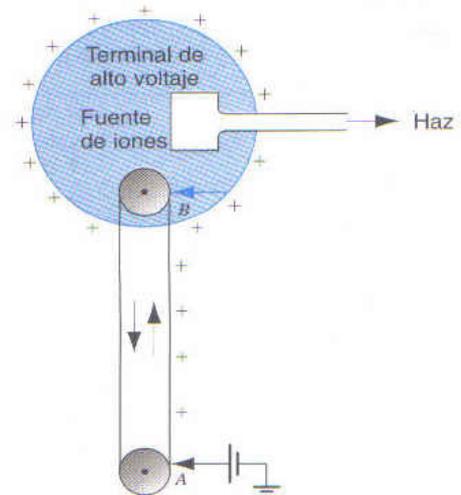


FIGURA 28-24. Diagrama del acelerador de Van de Graaff. La carga positiva se distribuye sobre el cinturón móvil en A y se extrae del cinturón en B donde fluye hacia la terminal que se carga con un potencial  $V$ . Los iones de carga positiva son repelidos de la terminal y forman el haz del acelerador.

(denominada punto de corona) en  $A$  hasta un cinturón móvil hecho de material aislante (a menudo hule). El cinturón conduce la carga a la terminal de alto voltaje, donde la recoge otro punto de corona  $B$  y se dirige al conductor externo. Dentro de la terminal está una fuente de iones positivos; por ejemplo, núcleos de hidrógeno (protones) o de helio (partículas alfa). Los iones "caen" del potencial alto y al hacerlo adquieren una energía cinética de varios MeV. La terminal se encuentra confinada en un tanque que contiene gas aislante para evitar chispas.

Una ingeniosa variación de este diseño básico aprovecha el mismo voltaje alto para acelerar los iones dos veces, con lo cual se obtiene un incremento adicional de la energía cinética. Una fuente de iones *negativos*, que se logra al agregar un electrón a un átomo neutro, se halla fuera de la terminal. Estos iones negativos "caen hacia" el potencial positivo de la terminal. En el interior de la terminal de alto voltaje, el haz atraviesa una cámara compuesta por un gas o un papel de aluminio, diseñada para eliminar o extraer varios electrones de los iones negativos, convirtiéndolos en iones positivos que después se "caen del" potencial positivo. Estos aceleradores dobles de Van de Graaff utilizan hoy un voltaje terminal de 25 millones de volts para acelerar los iones, entre ellos el carbono o el oxígeno, hasta que alcanzan energías cinéticas superiores a los 100 MeV.

**PROBLEMA RESUELTO 28-14.** Calcule la diferencia de potencial entre las dos esferas de la figura 28-22.

**Solución** La diferencia de potencial  $V(b) - V(a)$  tiene dos contribuciones: una procedente de la esfera pequeña y la otra del cascarón esférico grande. Éstas pueden calcularse en forma independiente y sumarse algebraicamente. Consideremos primero el cascarón grande. En la figura 28-20a, se indica que el potencial en todos los puntos internos posee el mismo valor que el de la superficie. Así pues, la contribución del cascarón grande a la diferencia  $V(b) - V(a)$  es 0.

En consecuencia, lo único que falta es evaluar la diferencia considerando sólo la esfera pequeña. En todos los puntos externos a ella, podemos tratarla como una carga puntual y la diferencia de potencial puede obtenerse con la ecuación 28-17:

$$V(b) - V(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right).$$

La expresión anterior ofrece la diferencia de potencial entre la esfera interna y el cascarón externo. Nótese que esto *no depende de la carga  $Q$  en la capa externa*. Si  $q$  es positiva, la diferencia siempre será negativa, indicando que el cascarón externo siempre estará al potencial más bajo. Si se permite que la carga positiva fluya entre las esferas, invariablemente lo hará del potencial más alto al más bajo —es decir, de la esfera interna a la externa—, sin que importe la cantidad de carga que ya se encuentra en el cascarón esférico externo.

## OPCIÓN MÚLTIPLE

### 28-1 Energía potencial

### 28-2 Energía potencial eléctrica

### 28-3 El potencial eléctrico

- Movemos una carga puntual negativa desde  $a$  hasta varios puntos finales posibles  $b$  en la figura 28-25. ¿Cuál trayectoria requiere la máxima cantidad de trabajo externo para mover una partícula?

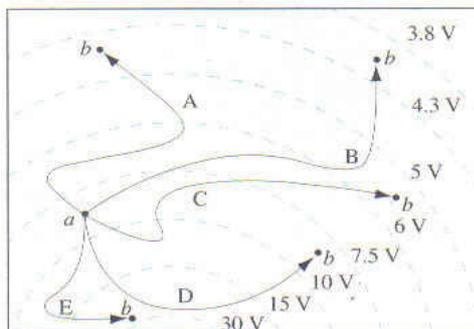


FIGURA 28-25. Pregunta de opción múltiple 1.

- Se libera un electrón del reposo en una región del espacio con un campo eléctrico no cero. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?
  - El electrón empezará a moverse hacia una región de potencial más alto.

- El electrón empezará a moverse hacia una región de potencial más bajo.
- El electrón empezará a moverse en una línea de potencial constante.
- No se puede llegar a una conclusión, al menos que se conozca la dirección del campo eléctrico.

### 28-4 Cálculo del potencial a partir del campo

- En condiciones electrostáticas, dentro de un conductor cargado,
  - $V = 0$ .
  - $\partial V/\partial x = 0$ .
  - $\partial^2 V/\partial x^2 = 0$ .
  - Dos de A), B) o C) deben ser verdaderos.
  - Los tres deben ser verdaderos.
- Las líneas del campo eléctrico están más juntas cerca del objeto  $A$  que del objeto  $B$ . Podemos concluir que
  - el potencial cercano a  $A$  es mayor que el potencial cercano a  $B$ .
  - el potencial cercano a  $A$  es menor que el potencial cercano a  $B$ .
  - el potencial cercano a  $A$  es igual al potencial cercano a  $B$ .
  - nada sobre los potenciales relativos cercanos a  $A$  o a  $B$ .
- La figura 28-26 muestra las líneas del campo eléctrico alrededor de tres cargas puntuales,  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
  - ¿Qué punto corresponde al potencial más alto?
    - $P$
    - $Q$
    - $R$
    - Los tres puntos tienen el mismo potencial.
  - ¿Qué punto corresponde al potencial más bajo?
    - $P$
    - $Q$
    - $R$
    - Los tres puntos tienen el mismo potencial.

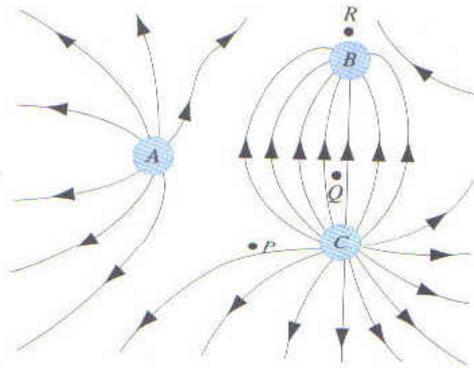


FIGURA 28-26. Pregunta de opción múltiple 5.

**28-5 Potencial generado por cargas puntuales**

6. Una carga positiva  $q$  se halla situada como se muestra en la figura 28-27a y el potencial en el punto  $P$  es  $V_0$  (con  $V = 0$  en el infinito).
- a) Una segunda carga  $q' = +q$  equidista del punto  $P$  como se ve en la figura 28-27b. Ahora el potencial en  $P$  es
- A)  $4V_0$ .    B)  $2V_0$ .    C)  $\sqrt{2}V_0$ .  
 D)  $V_0/2$ .    E) 0.
- b) En vez de una carga positiva, una carga negativa  $q' = -q$  está situada como se ve en la figura 28-27b. Ahora el potencial en  $P$  es
- A)  $4V_0$ .    B)  $2V_0$ .    C)  $\sqrt{2}V_0$ .  
 D)  $V_0/2$ .    E) 0.

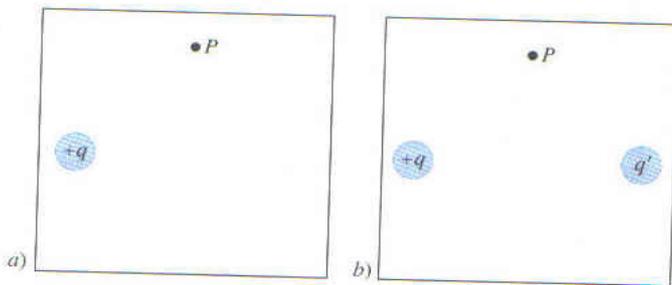


FIGURA 28-27. Pregunta de opción múltiple 6.

7. Se requiere 1 mJ de trabajo para mover del infinito dos cargas positivas idénticas  $+q$  para que las separe una distancia  $a$ .
- a) ¿Cuánto trabajo se requiere para mover desde el infinito tres cargas idénticas  $+q$  de modo que estén en los vértices de un triángulo equilátero con una longitud de lado  $a$ ?
- A) 2 mJ    B) 3 mJ    C) 4 mJ    D) 9 mJ
- b) ¿Cuánto trabajo se necesita para mover desde el infinito cuatro cargas positivas idénticas  $+q$ , de modo estén dispuestas en los vértices de un tetraedro con longitud de lado  $a$ ?
- A) 3 mJ    B) 4 mJ    C) 6 mJ    D) 16 mJ
8. Una carga puntual  $+q$  se halla en el origen y otra carga puntual  $+2q$  se encuentra en  $x = a$ , donde  $a$  es positiva; aquí  $V(\infty) = 0$ .
- a) ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?
- A) Cerca de las cargas el potencial eléctrico puede ser cero fuera del eje  $x$ .

- B) La magnitud del potencial eléctrico será máxima en el eje  $x$ .
- C) El potencial eléctrico puede ser cero en la región entre las cargas.
- D) El potencial eléctrico puede ser cero sólo en el eje  $x$ .
- b) ¿En cuál de las siguientes regiones sobre el eje  $x$  pudiera existir un punto donde el campo eléctrico sea cero?
- A)  $-\infty < x < 0$     B)  $0 < x < a$   
 C)  $a < x < \infty$   
 D)  $V$  no se cancela en la región  $-\infty < x < \infty$ .
9. Una carga puntual  $+q$  se encuentra en el origen y otra carga puntual  $-2q$  se halla en  $x = a$ , donde  $a$  es positiva; aquí  $V(\infty) = 0$ .
- a) ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?
- A) Cerca de las cargas, el potencial eléctrico puede ser cero fuera del eje  $x$ .
- B) Cerca de las cargas, la magnitud del potencial eléctrico puede alcanzar un máximo fuera del eje  $x$ .
- C) El potencial eléctrico puede ser cero sólo entre las cargas.
- D) El potencial eléctrico puede ser cero sólo en el eje  $x$ .
- b) ¿En cuál región o regiones siguientes pudiera existir un punto donde el potencial eléctrico sea cero?
- A)  $-\infty < x < 0$     B)  $0 < x < a$ .  
 C)  $a < x < \infty$   
 D)  $V$  no se cancela en la región  $-\infty < x < \infty$ .

**28-6 El potencial eléctrico de las distribuciones de carga continua**

10. Considere el potencial eléctrico  $V(z)$  en el eje de un anillo de carga positiva; aquí  $V(\infty) = 0$ .
- a)  $V(z)$  tendrá su valor más grande cuando
- A)  $z = 0$ .    B)  $0 < |z| < \infty$ .  
 C)  $|z| = \infty$ .    D) A) y C) son correctas.
- b)  $|V(z)|$  puede ser cero donde
- A)  $z = 0$ .    B)  $0 < |z| < \infty$ .  
 C)  $|z| = \infty$ .    D) A) y C) son correctas.
11. Considere el potencial eléctrico  $V(z)$  en el eje de un disco uniforme; aquí  $V(\infty) = 0$ .
- a)  $V(z)$  tendrá su valor más grande cuando
- A)  $z = 0$ .    B)  $0 < |z| < \infty$ .  
 C)  $|z| = \infty$ .    D) A) y C) son correctas.
- b)  $V(z)$  puede ser cero cuando
- A)  $z = 0$ .    B)  $0 < |z| < \infty$ .  
 C)  $|z| = \infty$ .    D) A) y C) son correctas.

**28-7 Cálculo del campo a partir del potencial**

12. Una pequeña carga situada en el origen experimenta una fuerza electrostática dirigida a lo largo del eje  $x$ . Podemos concluir que en el origen
- A)  $V \neq 0$ .    B)  $\partial V/\partial x \neq 0$ .    C)  $\partial^2 V/\partial x^2 \neq 0$ .  
 D) Dos de A), B) o C) deben ser verdaderos.  
 E) Los tres deben ser verdaderos.
13. Un dipolo eléctrico paralelo al eje  $x$  y situado en el origen experimenta una fuerza electrostática dirigida a lo largo del eje  $x$ . Podemos concluir que en el origen
- A)  $V \neq 0$ .    B)  $\partial V/\partial x \neq 0$ .    C)  $\partial^2 V/\partial x^2 \neq 0$ .  
 D) Dos de A), B) o C) deben ser verdaderos.  
 E) Los tres deben ser verdaderos.

**28-8 Superficies equipotenciales**

14. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es verdadera para el flujo  $\Phi_E$  a través de una superficie equipotencial cerrada?
- A)  $\Phi_E = 0$       B)  $\Phi_E > 0$       C)  $\Phi_E < 0$   
 D)  $\Phi_E$  es proporcional a la carga neta dentro de la superficie.

**28-9 El potencial de un conductor cargado**

15. Una pequeña esfera originalmente tiene una carga  $+q$ . La bajamos y la introducimos en una lata conductora. a) ¿Cuál de las siguientes magnitudes permanece fija a medida que descendemos la esfera, pero antes que toque la lata? (Puede haber más de una respuesta correcta.)
- A) El potencial de la lata.  
 B) El potencial de la esfera.  
 C) La carga de la esfera.  
 D) La carga neta en la esfera y en la lata.
- b) La bola toca la lata. ¿Cuál de las siguientes magnitudes son iguales antes y después que la bola toca la lata? (Puede haber más de una respuesta correcta.)

- A) El potencial de la lata.  
 B) El potencial de la esfera.  
 C) La carga en la esfera.  
 D) La carga neta en la esfera y en la lata.

16. Dos pequeñas esferas conductoras ( $r = 1$  cm), separadas por una distancia de 1 m, tienen cargas positivas idénticas. El potencial eléctrico de una esfera es  $V_0$  (con  $V = 0$  en el infinito). a) El potencial de la otra esfera
- A) es mayor que  $V_0$ .  
 B) es menor que  $V_0$ .  
 C) es igual a  $V_0$ .  
 D) no puede determinarse sin información adicional.
- b) Acercamos las esferas hasta que se toquen. Su potencial eléctrico es ahora  $V$ , donde
- A)  $V = V_0$ .      B)  $V_0 < V < 2V_0$ .  
 C)  $V = 2V_0$ .      D)  $2V_0 < V$ .

**28-10 El acelerador electrostático****PREGUNTAS**

- ¿Podemos designar el potencial de la Tierra  $+100$  V en vez de cero? ¿Qué efecto tendría semejante suposición en los valores medidos de a) los potenciales y de b) las diferencias de potencial?
- ¿Qué sucedería si nos encontrásemos en una plataforma aislada y nuestro potencial aumentara  $10$  kV respecto a la Tierra?
- ¿Por qué el electrón-volt es a menudo una unidad más útil de energía que el joule?
- ¿Cómo se compara un protón-volt con el electrón-volt? La masa del protón es  $1840$  veces mayor que la del electrón.
- ¿Depende de la carga transferida la cantidad de trabajo por unidad de carga requerida para transferir una carga eléctrica de un punto a otro en un campo electrostático?
- Distinga entre la diferencia de potencial y la diferencia de energía potencial. Dé ejemplos de afirmaciones en que estos términos se empleen correctamente.
- Estime la energía combinada de todos los electrones que chocan contra la pantalla de un osciloscopio de rayos catódicos en  $1$  segundo.
- ¿Por qué es posible proteger un cuarto contra las fuerzas eléctricas, pero no contra las de gravitación?
- Suponga que la Tierra tiene una carga neta que no es cero. ¿Por qué aun así es posible adoptarla como punto estándar de referencia del potencial y asignarle el potencial  $V = 0$ ?
- ¿Puede haber una diferencia de potencial entre dos conductores que tengan cargas iguales de la misma magnitud?
- Dé ejemplos de situaciones donde el potencial de un cuerpo cargado tiene signo opuesto al de su carga.
- ¿Pueden intersectarse dos superficies equipotenciales diferentes?
- Un trabajador se electrocutó accidentalmente y un periódico dio la noticia en los siguientes términos: "El trabajador tocó accidentalmente un cable de alto voltaje y sufrió una descarga de  $20,000$  V". Critique la noticia.
- Recomendación a los alpinistas que queden atrapados en una tormenta de rayos y de truenos: a) alejarse rápidamente de picos y de cordilleras; b) juntar ambos pies y acurrucarse a cielo raso, de modo que sólo toquen el suelo con los pies. ¿En qué se basa este consejo?
- Si  $\vec{E}$  es cero en un punto determinado, ¿deberá serlo también  $V$  allí? Dé algunos ejemplos para comprobar su respuesta.
- Si conoce  $\vec{E}$  sólo en un punto particular, ¿podrá calcular  $V$  en él? De no ser así, ¿qué información adicional necesita?
- En la figura 28-18, ¿es el campo eléctrico  $E$  mayor en la izquierda o en la derecha de la figura?
- ¿Es una superficie de potencial constante el disco no conductor de carga uniforme del problema resuelto 28-12? Explique su respuesta.
- Hemos visto que, dentro de un conductor hueco, nos protegemos en contra de los campos de cargas externas. Si estamos afuera de uno que contenga cargas, ¿estamos protegidos contra los campos de ellas? Explique por qué sí o por qué no.
- Si la superficie de un conductor cargado es una equipotencial, ¿significa eso que la carga presenta distribución uniforme en la superficie? Si el campo eléctrico tiene magnitud constante en la superficie de un conductor cargado, ¿significa eso que la carga se distribuye uniformemente?
- En la sección 28-9 se nos recordó que la carga suministrada al interior de un conductor aislado se transfiere íntegramente a la superficie externa del conductor, sin importar si la carga ya se halla allí. ¿Puede mantener ese estado para siempre? De no ser así, ¿qué se lo impide?
- ¿Cómo puede un átomo aislado no tener un momento permanente de dipolo eléctrico?
- Los iones y los electrones funcionan como centro de condensación; se forman gotas de agua alrededor de ellos en el aire. Explique por qué.
- Si  $V$  es una constante en determinada región del espacio, ¿qué puede decir acerca de  $\vec{E}$  en ella?
- En el capítulo 14 vimos que la fuerza del campo gravitacional es cero dentro de un cascarón esférico de materia. La fuerza del campo eléctrico es cero no sólo dentro de un conductor esférico aislado y cargado, sino también en el interior de un conductor aislado de cualquier forma. ¿Es cero la fuerza del campo gravitacional dentro de, digamos, un cascarón cúbico de materia? Si la respuesta es negativa, ¿en qué aspecto la analogía no es completa?

- ¿Cómo es posible cerciorarse de que el potencial eléctrico en una región determinada tiene un valor constante?
- Diseñe un arreglo de tres cargas puntuales, separadas por una distancia finita, que tenga cero energía potencial eléctrica.
- Se pone una carga en un conductor aislado que tiene la forma de un cubo perfecto. ¿Cuál será la densidad relativa de carga en varios puntos del cubo (superficies, bordes ángulos)? ¿Qué sucederá con la carga si el cubo está en el aire?
- Hemos visto (Sec. 28-9) que el potencial dentro de un conductor es igual al de su superficie. a) ¿Qué sucede si el conductor tiene forma irregular y una cavidad interna también irregular? b) ¿Qué sucede si la cavidad tiene un pequeño "hoyo de gusano" que la conecta al exterior? c) ¿Qué sucede si la cavidad está ce-

rrada, pero tiene una carga puntual suspendida en su interior? Explique el potencial dentro del material conductor y en varios puntos de las cavidades.

- Una cascarón esférico conductor y aislante tiene una carga negativa. ¿Qué ocurrirá si ponemos en contacto con el cascarón interno un objeto metálico de carga positiva? Explique los tres casos en que la carga positiva a) es menor que, b) igual y c) mayor que la carga negativa.
- Una esfera metálica sin carga, suspendida de un hilo de seda se coloca en un campo eléctrico externo uniforme. ¿Qué magnitud tiene el campo eléctrico en los puntos del interior de la esfera? ¿Cambia su respuesta si la esfera está cargada?

## EJERCICIOS

### 28-1 Energía potencial

### 28-2 Energía potencial eléctrica

- En el modelo de quark de las partículas elementales, un protón se compone de tres quark: dos quark "arriba", cada uno con una carga  $+\frac{2}{3}e$  y un quark "abajo", con una carga  $-\frac{1}{3}e$ . Supóngase que los tres quarks equidistan entre sí. Suponga que la distancia es  $1.32 \times 10^{-15}$  m y calcule a) la energía potencial de la interacción entre los dos quarks "arriba" y b) la energía eléctrica potencial total del sistema.
- Obtenga una expresión del trabajo requerido por un agente externo para colocar juntas las cuatro cargas como se indica en la figura 28-28. Los lados del cuadrado tienen una longitud  $a$ .

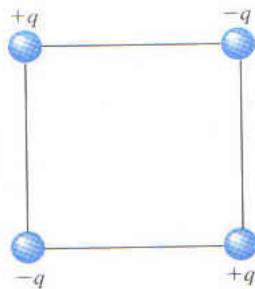


FIGURA 28-28. Ejercicio 2.

- Una década antes de que Einstein publicara su teoría de la relatividad, J. J. Thomson propuso que el electrón podría estar constituido por pequeñas partes y que su masa provenía de la interacción eléctrica de ellas. Más aún, sostuvo que la energía es igual a  $mc^2$ . Haga una estimación aproximada de la masa de los electrones en la siguiente forma: suponga que el electrón se compone de tres partes idénticas reunidas del infinito y colocadas en los vértices de un triángulo equilátero cuyos lados son iguales al radio clásico del electrón,  $2.82 \times 10^{-15}$  m. a) Determine la energía eléctrica potencial de este arreglo. b) Divida entre  $c^2$  y compare su resultado con la masa aceptada del electrón ( $9.11 \times 10^{-31}$  kg). El resultado mejora si se suponen más partes (Prob. 2). Hoy se piensa que el electrón es una partícula simple e indivisible.
- Las cargas mostradas en la figura 28-29 están fijas en el espacio. Calcule el valor de la distancia  $x$ , de modo que la energía potencial eléctrica del sistema sea cero.



FIGURA 28-29. Ejercicio 4.

- La figura 28-30 contiene una representación idealizada de un núcleo de  $^{238}\text{U}$  ( $Z = 92$ ) a punto de experimentar una fisión. Calcule a) la fuerza de repulsión que opera en cada fragmento y b) la energía potencial eléctrica mutua de los dos fragmentos. Suponga que tienen el mismo tamaño y carga, que son esféricos y que apenas si se tocan. El radio del núcleo inicialmente esférico  $^{238}\text{U}$  es 8.0 fm. Suponga que el material que sale de los núcleos presenta una densidad constante.

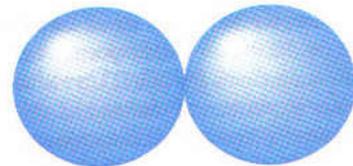


FIGURA 28-30. Ejercicio 5.

### 28-3 El potencial eléctrico

- Dos superficies conductoras paralelas y planas de espaciado  $d = 1.0$  cm tienen una diferencia de potencial  $\Delta V$  de 10.3 kV. Se proyecta un electrón de una placa hacia la segunda. ¿Cuál es la velocidad inicial del electrón si se detiene exactamente en la superficie de esta última? No tenga en cuenta los efectos relativistas.
- En un relámpago típico, la diferencia de potencial entre los puntos de descarga es de unos  $1.0 \times 10^9$  V y la carga transferida es de 30 C aproximadamente. a) ¿Cuánta energía se libera? b) Si toda la que se libera pudiera usarse para acelerar un automóvil de 1200 kg a partir del reposo, ¿cuál sería su velocidad final? c) Si pudiera usarse para derretir hielo, ¿cuánto se derretiría a  $0^\circ\text{C}$ ?
- La diferencia de potencial entre cargas puntuales durante una tormenta es  $1.23 \times 10^9$  V. ¿De qué magnitud es el cambio en la energía potencial eléctrica de un electrón que se desplaza entre ellos? Expresar su respuesta en a) joules y b) en volts.

9. Mantenemos una partícula de carga  $q$  en posición fija en el punto  $P$  y una segunda de masa  $m$ , que tiene la misma carga, la mantenemos en reposo a una distancia  $r_1$  de  $P$ . Esta última se libera entonces y se repele de la primera. Determine su velocidad en el instante en que se halla a una distancia  $r_2$  de  $P$ . Suponga que  $q = 3.1 \mu\text{C}$ ,  $m = 18 \text{ mg}$ ,  $r_1 = 0.90 \text{ mm}$  y  $r_2 = 2.5 \text{ mm}$ .
10. Proyectamos un electrón con una velocidad inicial de  $3.44 \times 10^5 \text{ m/s}$  hacia un protón esencialmente en reposo. Si al principio éste está muy lejos del protón, ¿a qué distancia de él su velocidad será instantáneamente el doble de su valor original?
11. Calcule *a)* el potencial eléctrico creado por el núcleo de un átomo de hidrógeno en la distancia promedio del electrón circulante ( $r = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ ); *b)* la energía potencial eléctrica del átomo cuando el electrón está en este radio; *c)* la energía cinética del electrón, suponiendo que describe una órbita circular de este radio centrado en el núcleo. *d)* ¿Cuánta energía se necesita para ionizar el átomo de hidrógeno? Exprese todas las energías en electrón-volts y suponga que  $V = 0$  en el infinito.
12. En el rectángulo de la figura 28-31, los lados tienen las longitudes de  $5.0 \text{ cm}$  y  $15 \text{ cm}$ ,  $q_1 = -5.0 \mu\text{C}$  y  $q_2 = +2.0 \mu\text{C}$ . *a)* ¿Cuáles son los potenciales eléctricos en los vértices  $B$  y  $A$ ? (Suponga que  $V = 0$  en el infinito.) *b)* ¿Cuánto trabajo externo se requiere para mover una tercera carga  $q_3 = +30 \mu\text{C}$  de  $B$  a  $A$  a lo largo de una diagonal del rectángulo? *c)* En este proceso, ¿se convierte el trabajo externo en energía electrostática potencial o a la inversa? Explique su respuesta.



FIGURA 28-31. Ejercicio 12.

#### 28-4 Cálculo del potencial a partir del campo

13. Dos grandes placas conductoras paralelas están separadas por una distancia de  $12.0 \text{ cm}$  y transportan cargas iguales pero opuestas en sus superficies frontales. Un electrón colocado en la mitad entre ellas experimenta una fuerza de  $3.90 \times 10^{-15} \text{ N}$ . *a)* Calcule el campo eléctrico en la posición del electrón. *b)* ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas?
14. Una hoja infinita tiene una densidad de carga  $\sigma = 0.12 \mu\text{C/m}^2$ . ¿Qué distancia hay entre las superficies equipotenciales cuyos potenciales difieren en  $48 \text{ V}$ ?
15. Un contador Geiger tiene un cilindro metálico de  $2.10 \text{ cm}$  de diámetro a lo largo de cuyo eje se extiende un alambre de  $1.34 \times 10^{-4} \text{ cm}$  de diámetro. Si entre ellos se aplican  $1855 \text{ V}$ , determine el campo eléctrico en la superficie de *a)* el alambre y *b)* el cilindro. (Sugerencia: utilice el resultado del Prob. 10, Cap. 27.)
16. En el experimento de la gota de aceite de Millikan (Sec. 26-6), un campo eléctrico  $1.92 \times 10^5 \text{ N/C}$  es mantenido en equilibrio entre dos placas separadas por  $1.50 \text{ cm}$ . Obtenga la diferencia de potencial entre ellas.

#### 28-5 Potencial generado por cargas puntuales

17. Un núcleo de oro contiene una carga positiva igual a la de 79 protones y tiene un radio de  $7.0 \text{ fm}$  (Prob. res. (28-7)). Una partícula alfa (constituida por dos protones y dos neutrones) tiene una energía cinética  $K$  en puntos lejanos del núcleo y se dirige directamente a él. La partícula alfa apenas si toca la superficie del núcleo donde se invierte la dirección de su velocidad. *a)* Calcule  $K$ . *b)* Tenía una energía de  $5.0 \text{ MeV}$  la segunda par-

tícula alfa que Rutherford y sus colegas usaron en su experimento y que condujo al descubrimiento del concepto del núcleo atómico. ¿Qué conclusión obtiene usted de eso?

18. Calcule la velocidad de escape de un electrón en la superficie de una esfera uniformemente cargada, de radio  $1.22 \text{ cm}$  y con una carga total  $1.76 \times 10^{-15} \text{ C}$ . Prescinda de las fuerzas gravitacionales.
19. Una carga puntual tiene  $q = +1.16 \mu\text{C}$ . Considere el punto  $A$ , que está a  $2.06 \text{ m}$  de distancia y el punto  $B$  que se halla a  $1.17 \text{ m}$  de distancia en una dirección diametralmente opuesta, como se ve en la figura 28-32*a*. *a)* Calcule la diferencia de potencial  $V_A - V_B$ . *b)* Repita el ejercicio si los puntos  $A$  y  $B$  están situados de igual manera que en la figura 28-32*b*.

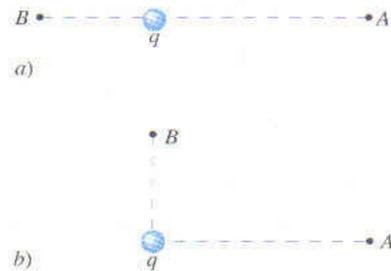


FIGURA 28-32. Ejercicio 19.

20. Gran parte del material presente en los anillos de Saturno (Fig. 28-33) son diminutos granos de polvo, cuyo radio es del orden de  $1.0 \mu\text{m}$ . Los granos se encuentran en una región que contiene un gas ionizado diluido; recogen el exceso de electrones. Si el potencial eléctrico en la superficie de uno de ellos es  $-400 \text{ V}$  (en relación con  $V = 0$  en el infinito), ¿cuántos electrones en exceso ha recogido?

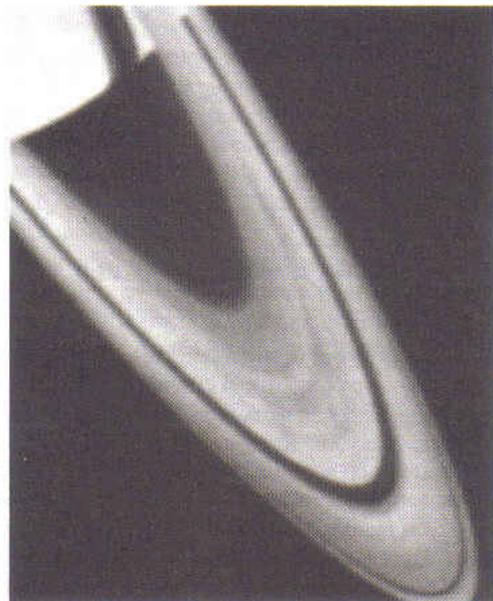


FIGURA 28-33. Ejercicio 20.

21. Al pasar una nave espacial por el gas ionizado y diluido de la ionosfera de la Tierra, su potencial suele cambiar en  $-1.0 \text{ V}$  antes que complete una revolución. Suponga que la nave es una esfera de radio  $10 \text{ m}$ , estime la carga que recoge.

22. Suponga que la carga negativa en una moneda de centavo de cobre se lleva muy lejos de la Tierra —quizá a una galaxia distante— y que se distribuye uniformemente la carga positiva en la superficie terrestre. ¿Cuánto cambiará el potencial eléctrico en ella? (Prob. 25-1).
23. Un campo eléctrico de 100 V/m aproximadamente se observa a menudo cerca de la Tierra. Si este campo fuera igual en toda la superficie, ¿cuál sería el potencial eléctrico de un punto en ella? Suponga que  $V = 0$  en el infinito.
24. La molécula de amoníaco  $\text{NH}_3$  tiene un momento permanente de dipolo eléctrico de 1.47 D, donde D es la unidad debyes con un valor de  $3.34 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ . Calcule el potencial eléctrico generado por una molécula en un punto a 52.0 nm de distancia a lo largo del eje del dipolo. Suponga que  $V = 0$  en el infinito.
25. a) En la figura 28-34 obtenga una expresión para  $V_A - V_B$ . b) ¿Se reduce el resultado a la respuesta expresada cuando  $d = 0$ ? ¿cuando  $a = 0$ ? ¿cuando  $q = 0$ ?

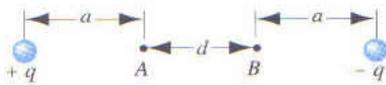


FIGURA 28-34. Ejercicio 25.

26. En la figura 28-35, localice los puntos, si los hay, a) donde  $V = 0$  y b) donde  $E = 0$ . Considere sólo puntos en el eje y suponga que  $V = 0$  en el infinito.

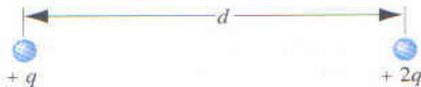


FIGURA 28-35. Ejercicio 26.

27. Dos cargas  $q = + 2.13 \mu\text{C}$  están fijas en el espacio y separadas por una distancia  $d = 1.96 \text{ cm}$ , como se aprecia en la figura 28-36. a) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto C? Suponga que  $V = 0$  en el infinito. b) Se trae una tercera carga  $Q = + 1.91 \mu\text{C}$  lentamente desde el infinito hasta C. ¿Cuánto trabajo se debe realizar? c) ¿Cuál es la energía potencial  $U$  de la configuración cuando interviene la tercera carga?

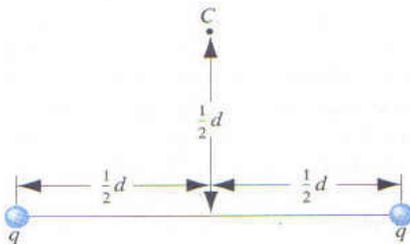


FIGURA 28-36. Ejercicio 27.

**28-6 El potencial eléctrico de las distribuciones de carga continua**

28. ¿A qué distancia en el eje de un disco uniformemente cargado de radio  $R$  es el potencial eléctrico igual a la mitad de su valor en la superficie del disco en el centro?
29. Una carga eléctrica de  $- 9.12 \text{ nC}$  se distribuye uniformemente alrededor de un anillo de 1.48 m de radio, el cual se encuentra en el plano  $yz$  con su centro en el origen. Una partícula que

transporta una carga de  $- 5.93 \text{ pC}$  se halla en el eje  $x$  con  $x = 3.07 \text{ m}$ . Calcule el trabajo efectuado por un agente externo al mover la carga puntual hacia el origen.

**28-7 Cálculo del campo a partir del potencial**

30. Suponga que el potencial eléctrico varía en el eje  $x$  como se indica en la gráfica de la figura 28-37. De los intervalos mostrados en ella (no tenga en cuenta el comportamiento en los puntos finales de los intervalos), determine aquellos en que  $E_x$  tiene a) su máximo valor absoluto y b) su mínimo valor. c) Grafique  $E_x$  en función de  $x$ .

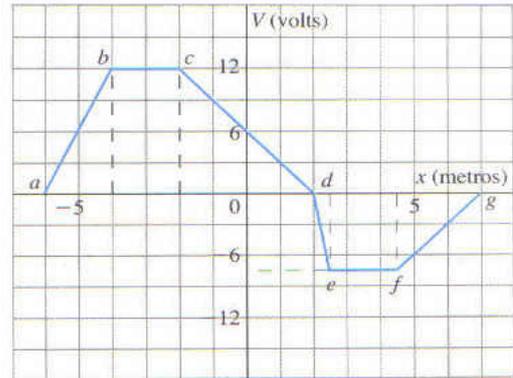


FIGURA 28-37. Ejercicio 30.

31. Dos grandes placas metálicas paralelas están separadas por una distancia de 1.48 cm y tienen cargas iguales pero opuestas en sus superficies frontales. La placa negativa está aterrizada y se supone que su potencial es cero. Si el potencial a la mitad entre las placas es  $+ 5.52 \text{ V}$ , ¿cuál es el campo eléctrico en esta región?
32. A partir de la ecuación 28-30 obtenga una expresión para  $E$  en los puntos axiales de un anillo con carga uniforme.
33. Calcule el gradiente radial de potencial,  $\partial V/\partial r$ , en la superficie de un núcleo de oro (Prob. res. 28-7).
34. El ejercicio 39 del capítulo 26 se refiere al cálculo que Rutherford hizo del campo eléctrico a una distancia  $r$  del centro de un átomo. También obtuvo el potencial eléctrico como

$$V = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3} \right).$$

- a) Demuestre en qué forma la expresión del campo eléctrico dada en el ejercicio 39 del capítulo 26 se deduce de esta expresión de  $V$ . b) ¿Por qué esta expresión no se convierte en cero a medida que  $r \rightarrow \infty$ ?
35. El potencial eléctrico  $V$  en el espacio situado entre las placas de un tubo al vacío, ahora obsoleto, está dado por  $V = (1530 \text{ V/m}^2)x^2$ , donde  $x$  es la distancia de una de las placas. Calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico cuando  $x = 1.28 \text{ cm}$ .

**28-8 Superficies equipotenciales**

36. Dos cargas lineales son paralelas al eje  $z$ . Una, la de carga por unidad de longitud  $+\lambda$ , está a una distancia  $a$  a la derecha del eje. La otra, la de carga por unidad de longitud de carga  $-\lambda$  se halla a una distancia  $a$  hacia la izquierda del eje (las líneas y el eje  $z$  se encuentran en el mismo plano). Dibuje algunas de las superficies equipotenciales.
37. Al pasar de A a B en una línea de campo eléctrico, éste realiza  $3.94 \times 10^{-19} \text{ J}$  de trabajo en un electrón del campo descrito grá-

ficamente en la figura 28-38. ¿Cuáles son las diferencias de potencial eléctrico *a)*  $V_B - V_A$ , *b)*  $V_C - V_A$  y *c)*  $V_C - V_B$ ?

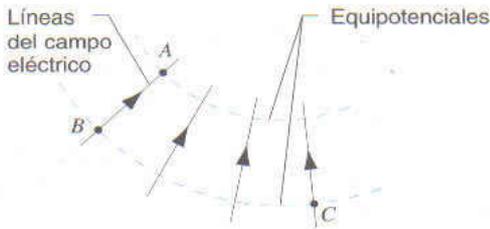


FIGURA 28-38. Ejercicio 37.

38. Considere una carga puntual con  $q = 1.5 \times 10^{-8} \text{ C}$ . *a)* ¿Cuál es el radio de una superficie equipotencial que tiene un potencial de 30 V? Suponga que  $V = 0$  en el infinito. *b)* ¿Están espaciadas uniformemente las superficies cuyo potencial difiere en una cantidad constante (digamos 1.0 V)?
39. En la figura 28-39 dibuje cualitativamente *a)* las líneas del campo eléctrico y *b)* las intersecciones de las superficies equipotenciales con el plano de la figura. (Sugerencia: considere el comportamiento cercano a las cargas puntuales y a gran distancia del par de cargas.)



FIGURA 28-39. Ejercicio 39.

40. Tres grandes líneas paralelas de carga presentan las densidades lineales relativas que aparecen en la figura 28-40. Dibuje algunas líneas del campo eléctrico y las intersecciones de algunas superficies equipotenciales con el plano de esta figura.

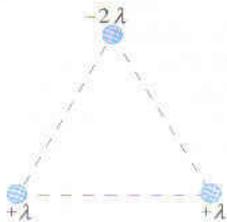


FIGURA 28-39. Ejercicio 40

### 28-9 El potencial de un conductor cargado

41. Un cascarón esférico delgado conductor de 20 cm de radio externo tiene una carga de  $+3.0 \mu\text{C}$ . Dibuje *a)* la magnitud del campo eléctrico  $\vec{E}$  y *b)* el potencial  $V$  en función de la distancia  $r$  respecto al centro del cascarón. (Haga  $V = 0$  en el infinito.)
42. Considere dos esferas conductoras muy separadas, 1 y 2; la segunda con una distancia dos veces mayor que el diámetro de la

primera. La esfera más pequeña lleva inicialmente una carga positiva  $q$  y la más grande no tiene carga inicialmente. En seguida, las conectamos con un alambre largo y delgado. *a)* ¿Cómo se relacionan los potenciales finales  $V_1$  y  $V_2$  de las esferas? *b)* Calcule las cargas finales  $q_1$  y  $q_2$  en las esferas a partir de  $q$ .

43. *a)* Si la Tierra tuviera una carga neta equivalente a un electrón/ $\text{m}^2$  del área superficial (suposición muy artificial), ¿cual sería el potencial de la Tierra? (Haga  $V = 0$  en el infinito. *b)* ¿Cuál sería el campo eléctrico generado por la Tierra afuera de su superficie?
44. Una carga de 15 nC puede ser generada mediante simple frotamiento. ¿A qué potencial (en relación con  $V = 0$  en el infinito) elevará una esfera conductora aislada de 16 cm de radio?
45. Determine *a)* la carga y *b)* la densidad de carga en la superficie de una esfera conductora de 15.2 cm de radio, cuyo potencial es 215 V. Suponga que  $V = 0$  en el infinito.
46. El objeto metálico de la figura 28-41 es una figura de revolución alrededor del eje horizontal. Si lleva carga negativa, dibuje unas cuantas equipotenciales y líneas del campo eléctrico. Utilice el razonamiento físico en vez del análisis matemático.

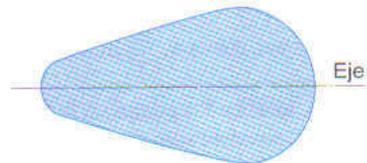


FIGURA 28-41. Ejercicio 46.

47. Dos esferas conductoras, una de 5.88 cm y la otra de 12.2 cm de radio, tienen cada una una carga de 28.6 nC y están muy separadas. Si después las conectamos mediante un alambre, calcule *a)* la carga final en ellas y *b)* el potencial de cada una, suponiendo que  $V = 0$  en el infinito.
48. Una esfera metálica cargada de 16.2 cm de radio tiene una carga neta de 31.5 nC. *a)* Determine el potencial eléctrico en la superficie de la esfera si  $V = 0$  en el infinito. *b)* ¿A qué distancia de la superficie de la esfera el potencial disminuyó 550 V?

### 28-10 El acelerador electrostático

49. *a)* ¿Cuánta carga se requiere para aumentar una esfera metálica aislada de 1.0 m de radio a un potencial de 1.0 MV? Suponga que  $V = 0$  en el infinito. Repita el ejercicio con una esfera de 1.0 cm de radio. *b)* ¿Por qué utilizar una gran esfera en un acelerador electrostático cuando el mismo potencial puede conseguirse usando una carga más pequeña y una esfera pequeña? (Sugerencia: calcule las densidades de las cargas.)
50. Supóngase que tiene un valor de 3.41 MV la diferencia de potencial entre la capa interna de alto potencial de un acelerador de Van de Graaff y el punto donde las cargas se esparcen hacia el cinturón en movimiento. Si el cinturón transfiere carga al cascarón con una velocidad de 2.83 m/s, ¿qué potencia mínima hay que suministrar para impulsarlo?

## PROBLEMAS

1. *a)* ¿A través de que diferencias de potenciales debe caer un electrón para adquirir, según la teoría de Newton, una velocidad  $v$  igual a la de velocidad  $c$  de la luz? *b)* La mecánica newtoniana fracasa conforme  $v \rightarrow c$ . Por tanto, empleando la expresión relativista correcta con la energía cinética (Ec. 20-27).

$$K = mc^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right]$$

en vez de la expresión newtoniana  $K = \frac{1}{2}mv^2$ , determine la velocidad real del electrón, adquirida al caer por la diferencia de

potencial calculada en a). Expresar esta velocidad como una fracción apropiada de la velocidad de la luz.

2. Repita el ejercicio 3, suponiendo que el electrón es un cascarón hueco de radio  $2.82 \times 10^{-15}$  m, con una carga  $e$  distribuida uniformemente a través de la superficie.
3. Se supone que una partícula de carga (positiva)  $Q$  ocupa una posición fija en  $P$ . Una segunda partícula de masa  $m$  y de carga negativa  $-q$  se desplaza con velocidad constante en un círculo de radio  $r_1$  centrado en  $P$ . Deduzca una expresión para el trabajo  $W$  que debe efectuar un agente externo sobre la segunda partícula, a fin de aumentar a  $r_2$  el radio del círculo de movimiento, centrado en  $P$ .
4. El campo eléctrico dentro de una esfera no conductora de radio  $R$ , que contiene una densidad de carga uniforme, sigue una dirección radial y tiene la magnitud

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

donde  $q$  es la carga total de la esfera, y  $r$  la distancia respecto al centro de la esfera. a) Determine el potencial  $V$  dentro de la esfera, suponiendo que  $V = 0$  en  $r = 0$ . b) ¿Cuál es la diferencia del potencial eléctrico entre un punto en la superficie y el centro de la esfera? Si  $q$  es positiva, ¿qué punto se halla en el potencial más alto? c) Demuestre que el potencial a una distancia  $r$  del centro, donde  $r < R$ , está dado por

$$V = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3},$$

donde el cero del potencial se toma con  $r = \infty$ . ¿Por qué este resultado no es igual al de la parte a)?

5. Tres cargas de  $+122$  mC se colocan en los ángulos de un triángulo equilátero, de  $1.72$  m de lado. Si se les suministra energía con una rapidez de  $831$  W, ¿cuántos días se requerirán para trasladar una de las cargas al punto medio de la línea que une las dos restantes?
6. Proyectamos una partícula de masa  $m$ , carga  $q > 0$  y de energía cinética  $K$  (desde una separación infinita) hacia un núcleo pesado de carga  $Q$ , que, supuestamente, ocupa una posición fija en nuestro marco de referencia. a) Si la mira es "perfecta", ¿a qué distancia del centro del núcleo se encuentra la partícula cuando se detiene instantáneamente? b) Con una mira imperfecta, su acercamiento más próximo al núcleo es el doble de la distancia determinada en la parte a). Calcule la rapidez de la partícula en distancia tan cercana de acercamiento. Suponga que la partícula no llega a la superficie del núcleo.
7. Una gota esférica de agua que transporta una carga de  $32.0$  pC tiene un potencial de  $512$  V en su superficie. a) ¿Cuál es el radio de la gota? b) Si dos gotas de la misma carga y radio se combinan para formar una sola gota esférica, ¿cuál es el potencial en la superficie de la gota nueva? Haga  $V = 0$  en el infinito.
8. La figura 28-42 muestra el borde de una hoja "infinita" de densidad de carga positiva  $\sigma$ . a) ¿Cuánto trabajo realiza el campo de



FIGURA 28-42. Problema 8.

la hoja a medida que una pequeña carga positiva de prueba  $q_0$  es desplazada de una posición inicial en la hoja a una posición final situada a una distancia perpendicular  $z$  con ella? b) Utilice el resultado de a) para demostrar que el potencial eléctrico de una hoja infinita de carga puede escribirse

$$V = V_0 - (\sigma/2\epsilon_0)z,$$

donde  $V_0$  es el potencial en la superficie de la hoja.

9. Una carga puntual  $q_1 = +6e$  está fija en el origen de un sistema coordenado rectangular, y una segunda carga puntual  $q_2 = -10e$  está fija en  $x = 9.60$  nm,  $y = 0$ . Con  $V = 0$  en el infinito, el sitio de todos los puntos en el plano  $xy$  con  $V = 0$  es un círculo centrado en el eje  $x$ , como se indica en la figura 28-43. Determine a) la posición de  $x_c$  el centro del círculo y b) el radio  $R$  del círculo. c) ¿Es también un círculo el equipotencial  $V = 5$  V?

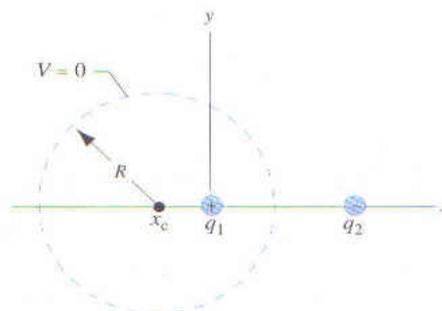


FIGURA 28-43. Problema 9.

10. Una cantidad total de carga positiva  $Q$  se esparce sobre un anillo no conductor circular y plano de radio interno  $a$  y de radio externo  $b$ . La carga se distribuye de modo que la densidad de carga (carga por unidad de superficie) está dada por  $\sigma = k/r^3$ , donde  $r$  es la distancia del centro del anillo a un punto cualquiera de él. Demuestre que (con  $V = 0$  en el infinito) el potencial en el centro está dado por

$$V = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{a+b}{ab} \right).$$

11. En la configuración de carga de la figura 28-44 demuestre que, suponiendo que  $r \gg d$ ,  $V(r)$  en los puntos del eje vertical está dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left( 1 + \frac{2d}{r} \right).$$

(Sugerencia: la configuración de la carga puede concebirse como la suma de una carga aislada y de un dipolo.) Haga  $V = 0$  en el infinito.



FIGURA 28-44. Problema 11.

12. Una carga por unidad de longitud  $\lambda$  se distribuye uniformemente en una delgada varilla de longitud  $L$ . *a)* Determine el potencial (que se decide que sea cero en el infinito) en el punto  $P$  a una distancia  $y$  de un extremo de la varilla y en línea con ella (Fig. 28-45). *b)* Con el resultado de *a)* obtenga el componente del campo eléctrico en  $P$  en la dirección  $y$  (a lo largo de la varilla). *c)* Determine el componente del campo eléctrico en  $P$  en dirección perpendicular a la varilla.



FIGURA 28-45. Problema 12.

13. En una delgada varilla de longitud  $L$  sobre el eje  $x$ , con un extremo en el origen  $x = 0$  como en la figura 28-46, está distribuida una carga por unidad de longitud dada por  $\lambda = kr$ , donde  $k$  es una constante, y  $r$  la distancia desde el origen. *a)* Suponiendo que el potencial electrostático en el infinito es cero, calcule  $V$  en el punto  $P$  sobre el eje  $y$ . *b)* Determine el componente vertical,  $E_y$ , del campo eléctrico en el punto  $P$  partiendo del resultado de la parte *a)* y también por cálculo directo. *c)* ¿Por qué  $E_x$ , el componente horizontal del campo eléctrico en  $P$ , no puede obtenerse mediante el resultado de la parte *a)*? *d)* ¿A qué distancia de la varilla en el eje  $y$  el potencial es igual a una mitad del valor en el extremo izquierdo de ella?

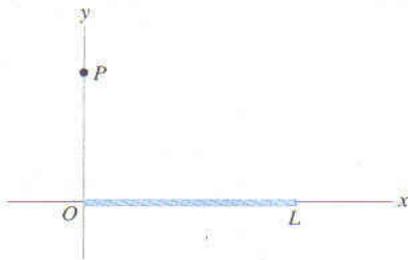


FIGURA 28-46. Problema 13.

## PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

- La densidad de carga en una varilla de longitud  $L$  centrada en el eje  $x$  está dada por  $\lambda = (1.0 \mu\text{C}/\text{m})\sin^2(\pi x/L)$ . *a)* Con operaciones numéricas realice una gráfica del potencial en el plano  $xy$  y luego utilice su gráfica para generar líneas equipotenciales. *b)* Basándose en ella dibuje las líneas de campo eléctrico y compare el resultado con el problema para resolver por computadora el problema 2 del capítulo 26.
- Mediante operaciones numéricas verifique que en dos dimensiones las líneas equipotenciales alrededor de dos cargas iguales, pero opuestas, son círculos. ¿Son círculos concéntricos?

- Dos esferas conductoras idénticas de radio 15.0 cm están separadas por una distancia de 10.0 m. ¿Qué carga tiene cada una si el potencial de una es +1500 V, y el de la otra -1500 V? ¿Qué suposiciones hizo usted? Suponga que  $V = 0$  en el infinito.
- Suponga que la Tierra es un conductor esférico de 6370 km de radio y que inicialmente no contiene carga. Una esfera metálica de 13 cm de radio, que tiene una carga de  $-6.2 \text{ nC}$  está aterrizada, es decir, en contacto eléctrico con la Tierra. Demuestre que este proceso efectivamente descarga la esfera, al calcular la fracción del exceso de electrones originalmente presentes en la esfera que quedan después de aterrizarla.
- Una esfera de cobre, cuyo radio mide 1.08 cm, tiene un revestimiento superficial muy delgado de níquel. Algunos de los átomos de níquel son radiactivos; cada uno emite un electrón al decaer. La mitad de estos átomos penetran en la esfera y cada uno deposita allí 100 keV de energía. La mitad restante de electrones se escapa, llevando cada uno afuera una carga de  $-e$ . El revestimiento de níquel realiza una actividad de 10.0 mCi ( $10.0 \text{ milicurios} = 3.70 \times 10^8$  decaimientos por segundo). La esfera está suspendida de una larga cuerda no conductora y está aislada del ambiente. ¿Cuánto tardará el potencial de la esfera en aumentar 1000 V?
- Considere un cascarón conductor, delgado y aislado, que tiene una carga uniforme con una densidad de carga constante  $\sigma$ . ¿Cuánto trabajo se necesita para pasar una pequeña carga positiva de prueba  $q_0$ . *a)* de la superficie del cascarón a su interior, a través de un orificio pequeño; *b)* de un punto de la superficie a otro sin importar la trayectoria; *c)* de punto a punto dentro del cascarón; *d)* de un punto cualquiera  $P$  fuera del cascarón en cualquier trayectoria, atraviése o no el cascarón, y de regreso a  $P$ ? *e)* En las condiciones anteriores, ¿importa si el cascarón conduce o no?
- El electrodo de alto voltaje de un acelerador electrostático es un cascarón metálico esférico con carga cuyo potencial es  $V = +9.15 \text{ MV}$  (en relación con  $V = 0$  en el infinito). *a)* Se da una ruptura eléctrica en el gas de esta máquina en un campo  $E = 100 \text{ MV/m}$ . ¿Qué restricciones hay que hacer en el radio  $r$  del cascarón para evitarla? *b)* Un cinturón de hule, largo y en movimiento, transfiere carga al cascarón a  $320 \mu\text{C/S}$ ; el potencial de éste permanece constante a causa de la fuga. ¿Qué potencia mínima se requiere para transferir la carga? *b)* El cinturón mide  $w = 48.5 \text{ cm}$  de ancho y se desplaza a una velocidad  $v = 33.0 \text{ m/s}$ . ¿Cuál es la densidad de carga superficial en el cinturón?

## LAS PROPIEDADES ELÉCTRICAS DE LOS MATERIALES

**A**unque la materia ordinaria es neutra, pues contiene igual número de cargas positivas y negativas, los materiales presentan muchos comportamientos diferentes al ser colocados en campos eléctricos. Algunos materiales pueden conducir la electricidad inclusive en campos sumamente pequeños, mientras que otros mantienen su estado no conductor en campos enormes. En algunos materiales que no permiten el movimiento de la carga, las propiedades eléctricas provienen de la rotación de los dipolos en un campo aplicado, pero en otros éste puede crear dipolos donde no existían antes.

En este capítulo vamos a estudiar el comportamiento básico de dos tipos de materiales: conductores y aislantes. Explicaremos cómo entender su comportamiento en los campos aplicados basados en modelos simples de fuerzas y del movimiento de cargas. Aunque para comprender a fondo las propiedades eléctricas de los materiales, se necesitan los métodos de la mecánica cuántica, puede aprenderse mucho acerca de los materiales a partir de los modelos clásicos que no requieren del comportamiento cuántico.

### 29-1 TIPOS DE MATERIALES

Los materiales naturales y artificiales reúnen una amplia gama de propiedades eléctricas. Éstas dependen, en parte, del comportamiento de los átomos o moléculas individuales y, en parte, de las interacciones de los átomos o moléculas en el material. La capacidad de un material para conducir electricidad también se basa en sus condiciones, como temperatura y presión.

Los *conductores* (la mayoría de los metales, por ejemplo) son materiales por donde la carga eléctrica fluye fácilmente. En muchos metales cada átomo cede uno o varios de sus electrones externos o de valencia al material entero, y a menudo pensamos que los electrones forman un “gas” en el interior del material, en vez de pertenecer a uno de los átomos. Los electrones se mueven libremente cuando se aplica un campo eléctrico a un material. En condiciones estáticas el campo dentro de un conductor es cero, aun cuando lleve una carga neta. (De no ser así, los electrones libres acelerarían, lo cual violaría la suposición de la distribución estática de la carga.) En la sección 29-2,

explicaremos el efecto de un campo externo aplicado a un conductor en condiciones estáticas.

Por el contrario, en un *aislante* los electrones están ligados firmemente a los átomos y no se mueven libremente bajo los campos eléctricos que podrían aplicarse en circunstancias ordinarias. Un aislante puede transportar cualquier distribución de carga en su superficie o en su interior, y (a diferencia de un conductor) el campo eléctrico en su interior puede tener valores diferentes a cero.

A menudo al material aislante puede considerársele como un conjunto de moléculas que no se ionizan con facilidad. En este caso, las propiedades eléctricas pueden depender del momento dipolar eléctrico de las moléculas. Los materiales cuyas moléculas tienen momentos dipolares permanentes reciben el nombre de *polares*; los campos eléctricos pueden alinear los momentos dipolares de las moléculas, como se mencionó en la sección 26-7. En algunos materiales la alineación de los dipolos se conserva, aun cuando eliminemos el campo aplicado; se les conoce como *ferroeléctricos* (en analogía con los materiales ferromagnéticos, en que los momen-

tos dipolares *magnéticos* siguen alineados a pesar de suprimir el campo *magnético* externo.) Estos efectos pueden mostrarlos hasta los materiales no polares, porque el campo eléctrico aplicado puede dar origen a un momento dipolar en las moléculas. Se explican a fondo en la sección 29-5.

La materia común suele ser neutra. Cuando no hay un campo eléctrico externo, los átomos individuales y también todo el material son neutros. Al aplicar un campo eléctrico pueden desprenderse uno o más electrones de los átomos de un material. A este proceso se le llama *ionización* y se da el nombre de *iones* a los átomos resultantes de carga positiva con un déficit de electrones. En un aislante, un campo eléctrico lo bastante grande puede ionizar los átomos, de modo que se dispone de electrones que puedan desplazarse por el material. En tales circunstancias un aislante se comporta a veces como conductor. A esta situación se le conoce como *ruptura* y requiere campos normales en el intervalo de  $10^6$  V/m, en el aire, a  $10^7$  V/m en plásticos y cerámicos.

Los *semiconductores* ocupan un lugar intermedio entre los aislantes y los conductores. En un semiconductor, quizás un átomo en  $10^{10}$  a  $10^{12}$  podría aportar un electrón al flujo de electricidad en el material (a diferencia de un conductor donde *todos* los átomos aportan un electrón). Entre los semiconductores de uso común cabe mencionar el silicio y el germanio, junto con muchos compuestos.

Incluso, los mejores conductores (cobre, plata y oro) muestran una resistencia pequeña, pero absolutamente no cero, ante el flujo de la electricidad. En ciertas condiciones, donde a menudo se observa enfriamiento a temperaturas muy bajas, la carga eléctrica puede fluir por algunos materiales sin resistencia alguna. A esta propiedad se le denomina *superconductividad*, y *superconductores* a los materiales en esas condiciones. Algunos son conductores pobres a temperatura ambiente, pero pueden ser superconductores a temperaturas bajas.

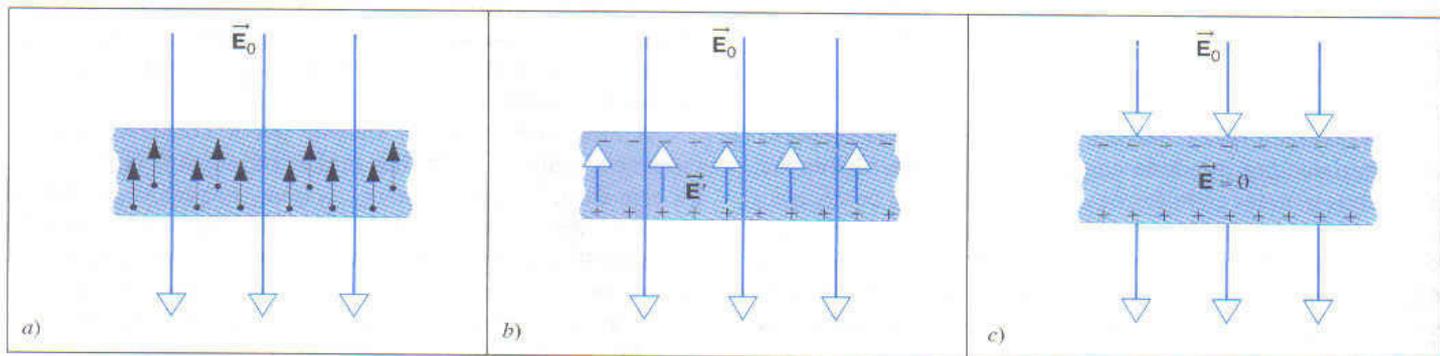
En el presente capítulo vamos a estudiar cómo los conductores y los semiconductores reaccionan ante los campos eléctricos aplicados. Para entender su comportamiento se necesitan los métodos de la mecánica cuántica, que se explicarán en el capítulo 49.

## 29-2 UN CONDUCTOR EN UN CAMPO ELÉCTRICO: CONDICIONES ESTÁTICAS

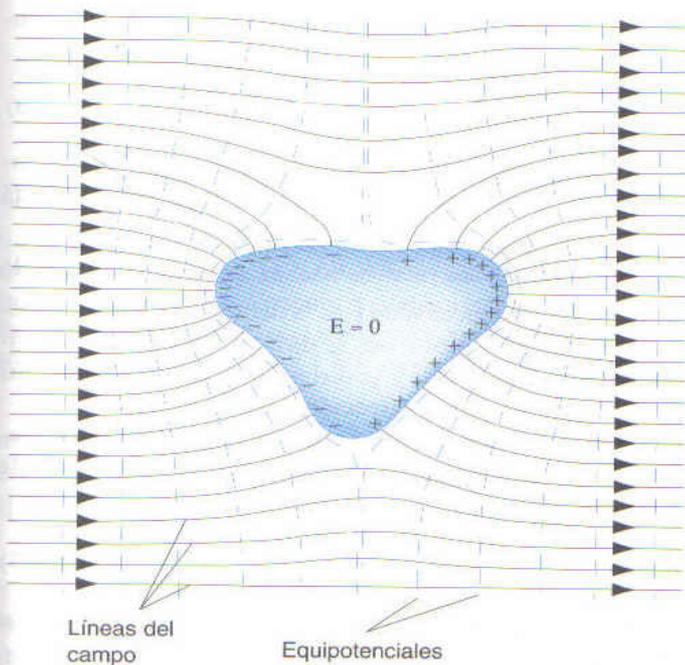
Supóngase que ponemos en un campo eléctrico una gran placa rectangular de un conductor como el cobre, según se indica en la figura 29-1a. Podemos considerar el cobre como un "gas" de electrones que se mueven libremente por una red de iones de cobre en sitios fijos. El campo eléctrico  $\vec{E}_0$  ejerce una fuerza  $\vec{F} = -e\vec{E}_0$  sobre los electrones, la cual los hace moverse en dirección opuesta al campo. Se dirigen rápidamente hacia la superficie superior del cobre, dejando un déficit de electrones (una carga positiva) en la superficie del fondo. Cuando colocamos un conductor en un campo externo, las cargas se redistribuyen casi de inmediato después que se aplican las condiciones electrostáticas.

Las dos superficies del conductor pueden considerarse hojas con carga, que crean un campo eléctrico  $\vec{E}'$  como se aprecia en la figura 29-1b. Dentro del cobre el campo eléctrico neto  $\vec{E}$  es la suma vectorial de los dos campos:  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ . En función de las magnitudes, la suma se convierte en diferencia porque los dos siguen dirección contraria:  $E = E_0 - E'$ . Dentro del cobre, en condiciones estáticas el campo eléctrico neto  $E$  ha de ser cero, como se comentó en la sección 27-6. (Allí no tuvimos en cuenta la presencia de un campo eléctrico aplicado externamente; sin embargo, la conclusión no cambia: el campo eléctrico en el interior del conductor debe ser cero, pues de lo contrario los electrones en él acelerarían y esto violaría la suposición de una situación estática.) El campo eléctrico aplicado  $E_0$  ha de mover suficientes electrones hacia la superficie para generar un campo eléctrico  $E'$  que tenga la misma magnitud que  $E_0$ , creando así un campo neto de cero dentro del cobre (Fig. 29-1c). Fuera de la plancha las hojas con carga en las dos superficies producen campos eléctricos que se cancelan, dejando inalterado allí el campo neto.

La figura 29-2 muestra un conductor sin carga y de forma irregular en un campo eléctrico inicialmente uniforme. Una vez más, los electrones libres avanzan rápidamente hacia la superficie, originando una distribución de cargas positiva y



**FIGURA 29-1.** a) Una plancha grande de conductor se pone en un campo eléctrico uniforme. Los electrones se desplazan hacia arriba en respuesta al campo. b) Los electrones se acumulan en la superficie superior, dejando iones positivos en el fondo. Estas cargas crean un campo  $\vec{E}'$ . c) Dentro de la plancha el campo neto es cero.



**FIGURA 29-2.** Se pone un conductor sin carga en un campo eléctrico externo. Los electrones de conducción se distribuyen en la superficie para producir una distribución de carga como se indica, reduciendo a cero el campo dentro del conductor. Nótese la distorsión de las líneas de fuerza (líneas llenas) y de las equipotenciales (líneas punteadas), cuando el conductor se coloca en el campo anteriormente uniforme. Nótese asimismo que las líneas del campo eléctrico se originan en las cargas positivas y que terminan en las cargas negativas.

negativa que produce un campo eléctrico, el cual cancela el campo aplicado en el interior del conductor. Fuera del conductor, el campo es la suma (vectorial) del campo uniforme original y el que proviene de las cargas en la superficie del conductor. Nótese que las líneas de campo se originan en las cargas positivas y terminan en las negativas. Nótese asimismo que la densidad de carga es grande en las partes de la superficie donde el radio de curvatura es pequeño, según señalamos en la sección 28-9 y que es grande (las líneas de campo están muy próximas) donde la densidad de carga es grande.

En la superficie del conductor de la figura 29-2, las líneas del campo eléctrico son perpendiculares a la superficie. De no ser así, el campo tendría un componente paralelo a la superficie, el cual haría mover a las cargas. Esto violaría la suposición de una situación estática; así que el componente del campo eléctrico no puede existir y éste debe ser perpendicular a la superficie.

La figura muestra además las equipotenciales en la situación anterior. Lejos del conductor, donde el campo es uniforme, las equipotenciales son planas. Al acercarnos al conductor se deforman las equipotenciales, hasta que en la superficie la equipotencial la sigue exactamente; según señalamos en la sección 28-9, la superficie de un conductor es una equipotencial.

**PROBLEMA RESUELTO 29-1.** Una gran placa delgada de cobre se coloca en un campo eléctrico uniforme de magnitud  $E_0 = 450$  N/C que es perpendicular a dicha placa (como en la Fig. 29-1). Determine la densidad resultante de la carga superficial en el cobre.

**Solución** El campo eléctrico produce una densidad de carga positiva  $\sigma$ , en la superficie inferior de la placa y una densidad de carga negativa de igual magnitud en la superficie superior. El campo en el interior de la placa debe ser cero, lo cual significa que las dos distribuciones de carga han de combinarse para crear un campo eléctrico dentro de la placa de magnitud  $E_0$  y de dirección contraria al campo aplicado. Si consideramos que la placa tiene dimensiones muy grandes, el campo generado por la distribución de carga positiva es  $E_+ = \sigma/2\epsilon_0$ , según la ecuación 26-20, y la magnitud del campo debido a la carga negativa es  $E_- = \sigma/2\epsilon_0$ . Ambos campos siguen la misma dirección y debemos sumarlos para obtener un campo total de  $E_0$ :

$$E_0 = \sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0$$

y la densidad de carga en las superficies es

$$\begin{aligned}\sigma &= \epsilon_0 E_0 = (8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(450 \text{ N/C}) \\ &= 3.98 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2.\end{aligned}$$

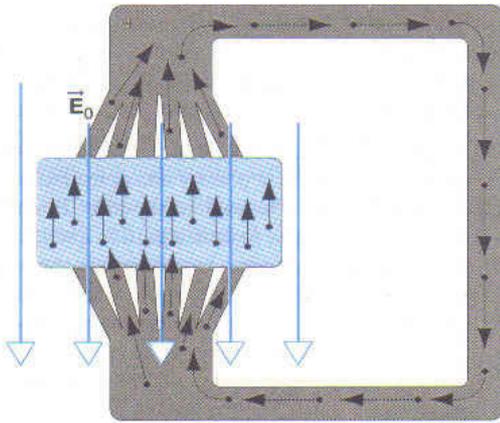
Nótese que afuera de la placa de cobre los campos generados por las dos hojas con carga se cancelan entre sí, de manera que el campo resultante sigue siendo  $E_0$ . Esto se da sólo en la geometría plana de este problema y en general no es válido (véase el ejemplo de la Fig. 29-2).

## 29-3 UN CONDUCTOR EN UN CAMPO ELÉCTRICO: CONDICIONES DINÁMICAS

En la figura 29-1a, los electrones se desplazan del fondo de la plancha de cobre a la parte superior bajo la acción del campo eléctrico aplicado, hasta que la concentración de electrones en la parte superior (y de iones positivos en la inferior) crea un campo que cancela el campo aplicado en el interior del cobre e impide que fluyan más electrones. Supóngase que se dispone de un mecanismo para eliminar los electrones en la parte superior de la plancha, para llevarlos alrededor de una trayectoria externa y reinyectarlos en la parte inferior de la plancha (que se muestra esquemáticamente en la Fig. 29-3). En este caso no se acumularía carga en la parte superior ni en la inferior; las condiciones electrostáticas de la sección precedente no son aplicables al cobre. En particular, la conclusión extraída en la sección anterior ya no es válida: en general el campo eléctrico dentro del cobre será no cero cuando fluyan las cargas.

El ciclo continuo de electrones que fluyen es una simple representación de un circuito eléctrico, y se da el nombre de *corriente eléctrica* al flujo de electrones (u otras partículas con carga).

Vamos a examinar el flujo de carga eléctrica en un punto particular en el interior del material (Fig. 29-4). Una cantidad de carga  $dq$  atraviesa una pequeña superficie del área  $A$  en el tiempo  $dt$ . Por ejemplo, el área  $A$  podría ser una superficie transversal de alambre por donde fluye la carga. La *corriente*



**FIGURA 29-3.** El campo eléctrico  $\vec{E}_0$  mueve a los electrones por la plancha de cobre. Podemos reunirlos en la parte superior de la plancha y transportarlos a lo largo de una trayectoria externa hasta el fondo de ella.

*eléctrica* se define como la carga neta que pasa a través de la superficie por intervalo de unidad de tiempo:

$$i = dq/dt. \quad (29-1)$$

Para que exista corriente eléctrica debe haber un flujo neto de carga por la superficie. Si átomos neutros la cruzan, no fluirá corriente, aunque las cargas pasen por allí, porque la atraviesa un número igual de cargas positivas y negativas. Si los electrones se desplazan aleatoriamente por el material, y un número igual de ellos cruzan la superficie en una u otra dirección, tampoco fluirá corriente porque la carga neta que la atraviesa es cero.

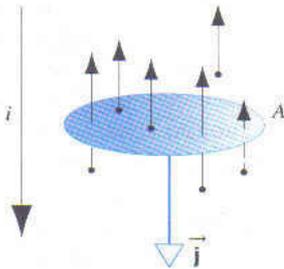
La corriente eléctrica tiene una dirección, definida como la dirección del flujo de la carga positiva. Pese a ello, la corriente es un escalar y no un vector, pues no cumple con las leyes de la adición vectorial.

La unidad de corriente en el SI es el *ampere* (A), definido así

$$1 \text{ ampere} = 1 \text{ coulomb/segundo.}$$

Si la corriente es constante, la ecuación 29-1 se convierte en

$$i = qt. \quad (29-2)$$



**FIGURA 29-4.** Los electrones cruzan la superficie  $A$ . La dirección de la corriente  $i$  y la de la densidad vectorial de corriente  $\vec{j}$  es opuesta al movimiento de los electrones.

La carga neta que pasa por una superficie se calcula integrando la corriente:

$$q = \int i dt. \quad (29-3)$$

Una magnitud vectorial relacionada es la *densidad de corriente*  $\vec{j}$  o corriente por unidad de área, cuya magnitud está definida así

$$j = i/A. \quad (29-4)$$

Por definición la dirección de  $\vec{j}$  es la del flujo de una carga positiva. Dado que los electrones se dirigen hacia arriba en la figura 29-4, la dirección de  $\vec{j}$  se dirige hacia abajo. Es decir, los electrones se mueven en dirección de  $-\vec{j}$ .

La corriente que atraviesa una superficie cualquiera puede determinarse integrando la densidad de corriente sobre la superficie:

$$i = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}, \quad (29-5)$$

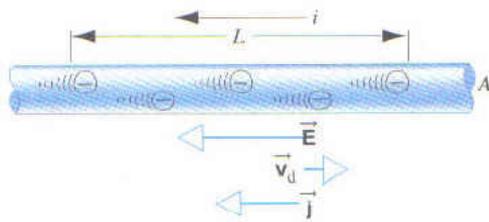
donde  $d\vec{A}$  es un elemento del área de la superficie, y la integral se resuelve en la superficie entera en que queremos encontrar la corriente. Suponemos que el vector  $d\vec{A}$  es perpendicular al elemento de superficie tal que  $\vec{j} \cdot d\vec{A}$  es positiva, correspondiente a una corriente positiva  $i$ .

## Densidad de corriente y velocidad de desplazamiento

Conforme los electrones avanzan por el cobre, los acelera un campo eléctrico que ejerce una fuerza  $-e\vec{E}$  sobre ellos. En la sección 29-2 estudiamos las condiciones estáticas, en que el campo eléctrico siempre es cero dentro de un conductor. Aquí vamos a examinar las cargas en movimiento, de manera que las condiciones estáticas no se aplican y  $\vec{E}$  puede ser no cero en el interior de un conductor.

Los electrones chocan con los iones de la red y les transfieren energía. De ahí la irregularidad de su movimiento, que consiste en un breve intervalo de aceleración en dirección contraria al campo eléctrico y que se acompaña de una colisión con un ion capaz de poner en movimiento el electrón en una dirección cualquiera, seguida de otra aceleración y así sucesivamente. El efecto neto es un desplazamiento de electrones en dirección contraria al campo. No se produce aceleración neta de electrones, porque sin cesar pierden energía en las colisiones con la red de los iones del cobre. En realidad, se transfiere energía del campo aplicado a esta red (mediante energía interna del conductor, observada frecuentemente como aumento de la temperatura). En promedio, puede decirse que los electrones se mueven con una *velocidad de deriva constante*  $v_d$  en dirección opuesta a la del campo, según se indica en la figura 29-5.

Consideremos el movimiento de electrones en una porción del conductor de longitud  $L$ . Los electrones lo hacen con una velocidad de desplazamiento  $v_d$ , de manera que recorren la longitud  $L$  en el tiempo  $t = L/v_d$ . El conductor tiene una superficie transversal  $A$ ; así que en el tiempo  $t$  todos los electrones del volumen  $AL$  atravesarán una superficie en el extremo derecho del



**FIGURA 29-5.** El campo eléctrico ocasiona que los electrones se desplacen a la derecha. La corriente convencional (la dirección hipotética del flujo de carga positiva) se dirige a la izquierda. También dibuja la densidad de corriente  $\vec{j}$  como si los portadores de carga fuesen positivos, de modo que  $\vec{j}$  y  $\vec{E}$  se hallen en la misma dirección.

conductor. Si la densidad de los electrones (número por unidad de volumen) es  $n$ , la magnitud de la carga neta que atraviesa la superficie es  $q = enAL$ , y la densidad de corriente es

$$j = \frac{q}{At} = \frac{enAL}{AL/v_d} = env_d. \quad (29-6)$$

En notación vectorial, lo anterior se expresa así

$$\vec{j} = -en\vec{v}_d. \quad (29-7)$$

El signo negativo nos recuerda otra vez que la dirección de la densidad de corriente es contraria a la del movimiento de los electrones.

Como se verá en los siguientes problemas resueltos, la velocidad de deriva de los electrones en materiales comunes es mucho más pequeña que la de los movimientos térmicos aleatorios de los electrones (generalmente  $10^6$  m/s).

**PROBLEMA RESUELTO 29-2.** Un extremo de un alambre de aluminio, cuyo diámetro mide 2.5 mm, está soldado a un extremo de un alambre de cobre de 1.8 mm de diámetro. El alambre compuesto transporta una corriente estable  $i$  de 1.3 A. ¿Qué densidad de corriente tiene cada alambre?

**Solución** Podemos suponer que la densidad de corriente es una constante (diferente) dentro de cada alambre, con excepción de los puntos cercanos a la unión. La densidad de corriente está dada por la ecuación 29-4,  $j = i/A$ . La superficie transversal  $A$  del alambre de aluminio es

$$A_{Al} = \frac{1}{4}\pi d^2 = (\pi/4)(2.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 4.91 \times 10^{-6} \text{ m}^2,$$

de manera que

$$j_{Al} = \frac{1.3 \text{ A}}{4.91 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 2.6 \times 10^5 \text{ A/m}^2 = 26 \text{ A/cm}^2.$$

Como puede verificarse, la superficie transversal del alambre de cobre es  $2.54 \times 10^{-6} \text{ m}^2$  y, por tanto,

$$j_{Cu} = \frac{1.3 \text{ A}}{2.54 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 5.1 \times 10^5 \text{ A/m}^2 = 51 \text{ A/cm}^2.$$

Aquí, no importa el hecho de que los alambres están hechos de un material diferente.

**PROBLEMA RESUELTO 29-3.** ¿Cuál es la velocidad de deriva de los electrones de conducción en el alambre de cobre del problema resuelto 29-2?

**Solución** En el cobre, en promedio hay casi un electrón de conducción por átomo. El número  $n$  de electrones por unidad de volumen

es, pues, igual que el de átomos por unidad de volumen y se determina a partir de

$$\frac{n}{N_A} = \frac{\rho_m}{M} \quad \text{o} \quad \frac{\text{átomos/m}^3}{\text{átomos/mol}} = \frac{\text{masa/m}^3}{\text{masa/mol}}$$

Aquí  $\rho_m$  es la densidad de (masa) del cobre;  $N_A$ , la constante de Avogadro, y  $M$  la masa molar del cobre\*. En consecuencia,

$$n = \frac{N_A \rho_m}{M} = \frac{(6.02 \times 10^{23} \text{ electrones/mol})(8.96 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)}{63.5 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}} \\ = 8.49 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3.$$

Entonces, con el uso de la ecuación 29-6 ( $v_d = j/ne$ ), tenemos

$$v_d = \frac{5.1 \times 10^5 \text{ A/m}^2}{(8.49 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3)(1.60 \times 10^{-19} \text{ C/electrón})} \\ = 3.8 \times 10^{-5} \text{ m/s} = 14 \text{ cm/h}.$$

El lector debe ser capaz de demostrar que, en el alambre de aluminio,  $v_d = 2.7 \times 10^{-5} \text{ m/s} = 9.7 \text{ cm/h}$ . ¿Puede explicar en términos físicos por qué en este ejemplo la velocidad de deriva es menor en el aluminio que en el cobre, a pesar de que los dos alambres transportan la misma corriente?

Si los electrones se desplazan a velocidad tan baja, ¿por qué los efectos eléctricos parecen ocurrir inmediatamente después de activar un interruptor, como cuando encendemos las luces de un cuarto? La confusión en este caso se debe a que no se distingue entre la velocidad de deriva de los electrones y la velocidad a que los cambios en la configuración del campo eléctrico se mueven por los alambres. La segunda se aproxima a la velocidad de la luz. De modo similar, cuando activamos la válvula de una manguera de jardín, llena de agua, la onda de presión se propaga por la manguera con la velocidad del sonido. La velocidad con que el agua se desplaza por la manguera —medida quizá con un marcador de tinte— es mucho menor.

**PROBLEMA RESUELTO 29-4.** Un trozo de silicio, con un ancho transversal de  $w = 3.2 \text{ mm}$  y con un espesor de  $d = 250 \mu\text{m}$  transporta una corriente  $i$  de 190 mA. El silicio es un semiconductor de tipo  $n$ , que ha sido “dopado” con una cantidad controlada de impurezas de fósforo. La impureza tiene el efecto de aumentar enormemente  $n$ , el número de portadores de carga (electrones en este caso) por unidad de volumen, en comparación con el valor del silicio puro. En este caso  $n = 8.0 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ . a) ¿Qué densidad de corriente tiene el trozo? b) ¿Cuál es la velocidad de deriva?

**Solución** a) Conforme a la ecuación 29-4,

$$j = \frac{i}{wd} = \frac{190 \times 10^{-3} \text{ A}}{(3.2 \times 10^{-3} \text{ m})(250 \times 10^{-6} \text{ m})} \\ = 2.4 \times 10^5 \text{ A/m}^2.$$

b) Con base en la ecuación 29-6,

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{2.4 \times 10^5 \text{ A/m}^2}{(8.0 \times 10^{21} \text{ m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})} = 190 \text{ m/s}.$$

La velocidad de deriva (190 m/s) de los electrones en este semiconductor de silicio es mucho mayor que la ( $3.8 \times 10^{-5} \text{ m/s}$ ) de los electrones de conducción en el conductor metálico de cobre en el problema resuelto 29-3, a pesar de que se parecen las densidades de

\* Utilizamos el subíndice  $m$  para aclarar que la densidad aquí mencionada es una densidad de masa ( $\text{kg/m}^3$ ), no una densidad de carga ( $\text{C/m}^3$ ).

corriente. La cantidad de portadores de carga en este semiconductor ( $8.0 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ ) es mucho menor que la de portadores de carga en el conductor de cobre ( $8.49 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ). Los primeros deben desplazarse más rápidamente en el semiconductor para que produzcan la misma densidad de corriente que los segundos producen en el cobre.

## 29-4 MATERIALES ÓHMICOS

Entre las colisiones con los iones de la red, los electrones en un material conductor son acelerados por el campo eléctrico  $\vec{E}$  y, por lo mismo, su velocidad de deriva es proporcional a  $\vec{E}$ . La densidad de corriente  $\vec{j}$  también es proporcional a  $\vec{v}_d$ ; es, pues, razonable que  $\vec{j}$  deba ser proporcional a  $\vec{E}$ . De hecho, observamos este tipo de comportamiento en una amplia gama de materiales. La constante de proporcionalidad entre la densidad de corriente y el campo eléctrico es la *conductividad eléctrica*  $\sigma$  del material:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (29-8)$$

Un valor grande de  $\sigma$  indica que el material es un buen conductor de corriente eléctrica. La conductividad es una propiedad de todo el material, no de alguna parte de él. La unidad de conductividad en el SI es el *siemens por metro* (S/m), donde el siemens se define como

$$1 \text{ siemens} = 1 \text{ ampere/volt}.$$

Es más común encontrar materiales caracterizados por su *resistividad*, que es el inverso de la conductividad:

$$\rho = 1/\sigma, \quad (29-9)$$

en este caso la ecuación 29-8 queda así

$$\vec{E} = \rho \vec{j}. \quad (29-10)$$

Las unidades de resistividad son *ohm · metro*, donde el ohm (cuyo símbolo es  $\Omega$ ) se define así

$$1 \text{ ohm} = 1 \text{ volt/ampere}.$$

Nótese que  $1 \text{ ohm} = (1 \text{ siemens})^{-1}$ .

Las ecuaciones 29-8 y 29-10 son válidas sólo en los materiales isotrópicos, cuyas propiedades eléctricas son iguales en todas direcciones. En ellos  $\vec{j}$  siempre será igual en la misma dirección que  $\vec{E}$ .

La tabla 29-1 contiene algunos valores de la resistividad de varios materiales. Un aislante perfecto tendrá  $\rho = \infty$  (o  $\sigma = 0$ ). Nótese que hasta los buenos aislantes son conductores débiles.

Con la ecuación 29-10 se puede determinar la resistividad de un material con sólo aplicar el campo eléctrico y medir la densidad resultante de corriente. En algunos materiales, se comprueba que la resistividad no es constante, sino que depende de la intensidad del campo eléctrico. En otras palabras, si lo duplicamos no se duplicará la densidad de corriente. En otros materiales se comprueba que la resistividad no depende de la intensidad del campo aplicado en muchos de ellos. En esos materiales, una gráfica de  $E$  en función de  $j$  nos da una línea recta cuya pendiente es la resistividad  $\rho$ . Se les conoce

**TABLA 29-1 Resistividad de algunos materiales a temperatura ambiente (20°C)**

Material	Resistividad $\rho(\Omega \cdot \text{m})$	Coefficiente la resistividad con la temperatura $\alpha_{\text{pro}}$ (por $^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
<b>Metales comunes</b>		
Plata	$1.62 \times 10^{-8}$	$4.1 \times 10^{-3}$
Cobre	$1.69 \times 10^{-8}$	$4.3 \times 10^{-3}$
Aluminio	$2.75 \times 10^{-8}$	$4.4 \times 10^{-3}$
Tungsteno	$5.25 \times 10^{-8}$	$4.5 \times 10^{-3}$
Hierro	$9.68 \times 10^{-8}$	$6.5 \times 10^{-3}$
Platino	$10.6 \times 10^{-8}$	$3.9 \times 10^{-3}$
Magnanin <sup>a</sup>	$48.2 \times 10^{-8}$	$0.002 \times 10^{-3}$
<b>Semiconductores comunes</b>		
Silicio puro	$2.5 \times 10^3$	$-70 \times 10^{-3}$
Silicio tipo n <sup>b</sup>	$8.7 \times 10^{-4}$	
Silicio tipo p <sup>c</sup>	$2.8 \times 10^{-3}$	
<b>Aislante comunes</b>		
Agua pura	$2.5 \times 10^5$	
Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$	
Poliestireno	$\geq 10^{14}$	
Cuarzo fundido	$\approx 10^{16}$	

<sup>a</sup> Una aleación diseñada específicamente para que tenga un valor pequeño de  $\alpha$ .

<sup>b</sup> Silicio puro "dopado" con impurezas de fósforo para una densidad de portadores de carga de  $10^{23} \text{ m}^{-3}$ .

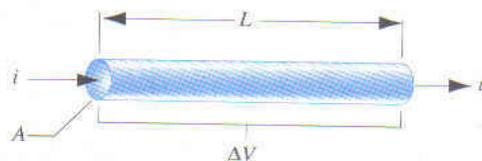
<sup>c</sup> Silicio puro "dopado" con impurezas de aluminio para una densidad de portadores de carga de  $10^{23} \text{ m}^{-3}$ .

como materiales óhmicos. También se dice que cumplen con la *ley de Ohm*:

*La resistividad (o conductividad) de un material no depende de la magnitud ni de la dirección del campo eléctrico aplicado.*

Muchos materiales homogéneos, entre ellos los metales conductores como el cobre, siguen la ley de Ohm en cierto intervalo de valores del campo eléctrico aplicado. Si éste es lo bastante grande, el comportamiento de los materiales violará la ley de ohm.

Los valores de resistividad de la tabla 29-1 son propiedades de los materiales enlistados. Quizá queramos conocer la *resistencia* de un objeto en particular, digamos la de un bloque de cobre de ciertas dimensiones. En la figura 29-6 se describe el caso de un conductor homogéneo e isotrópico de longitud  $L$  y de superficie transversal uniforme  $A$ , al que se aplicó una diferencia de potencial  $\Delta V$ . En su interior hay un campo eléctrico uniforme



**FIGURA 29-6.** Una diferencia de potencial  $\Delta V$  se aplica en un conductor cilíndrico de longitud  $L$  y en una superficie transversal  $A$ , creando una corriente  $i$ .

$E = \Delta V/L$ . Si la densidad de corriente es también uniforme en la superficie  $A$ ,  $j = i/A$ . Entonces la resistividad será

$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{\Delta V/L}{i/A} \quad (29-11)$$

La magnitud  $\Delta V/i$  que aparece en la ecuación anterior se define como la resistencia  $R$ :

$$R = \frac{\Delta V}{i} \quad (29-12)$$

Al combinar las ecuaciones 29-11 y 29-12, obtenemos una expresión de la resistencia  $R$ :

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (29-13)$$

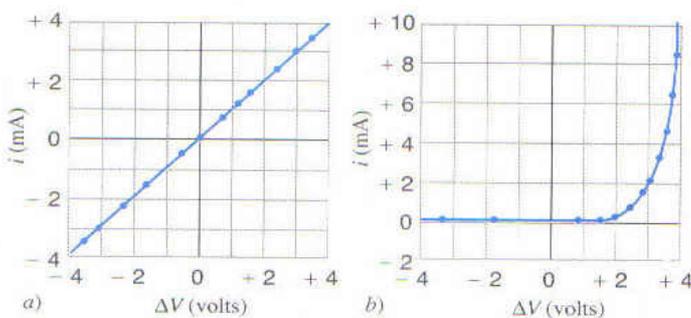
La resistencia  $R$  es característica de un objeto particular y depende del material de que esté hecho, lo mismo que de su longitud y superficie transversal; la resistividad  $\rho$  caracteriza al material en general. La unidad de resistencia es el ohm ( $\Omega$ ).

La ecuación 29-12 nos brinda otra base para formular la ley de Ohm. En un objeto podemos medir la corriente  $i$  con varias diferencias de potencial aplicado y graficar  $i$  en función de  $\Delta V$ . Si la gráfica produce una línea recta, el objeto es óhmico y se sujeta a la ley de Ohm. He aquí una formulación equivalente de ella:

*La resistencia de un objeto no depende de la magnitud ni del signo de la diferencia de potencial aplicada.*

Los resistores ordinarios que se encuentran en los circuitos eléctricos son óhmicos en el intervalo de las diferencias de potencial normalmente utilizadas en ellos. Los semiconductores, entre otros los diodos y los transistores, suelen ser no óhmicos. En la figura 29-7 se comparan las gráficas de corriente-voltaje en dispositivos óhmicos y no óhmicos.

No olvide que la relación  $\Delta V = iR$  no es una formulación de la ley de Ohm. Es una ecuación que define la resistencia y se aplica tanto a objetos óhmicos como a no óhmicos. Inclusive en estos últimos puede encontrarse un valor de resistencia  $R$  para un valor determinado de  $\Delta V$ ; en otra  $\Delta V$  se obtendrá un valor distinto de  $R$ . En los dispositivos óhmicos se consigue el mismo valor de  $R$  con cualquier valor de  $\Delta V$ .



**FIGURA 29-7.** a) Diagrama de corriente-voltaje de un material que se sujeta a la ley de Ohm, en este caso un resistor de  $1000\text{-}\Omega$ . b) Diagrama de corriente-voltaje de un material que no se sujeta a la ley de Ohm, en este caso un diodo de unión pn.

$\Delta V$ ,  $i$  y  $R$  son magnitudes *macroscópicas*, pues se aplican a un cuerpo o una región ampliada. Las magnitudes *microscópicas* correspondientes son  $\vec{E}$ ,  $\vec{j}$  y  $\rho$  (o  $\sigma$ ); poseen valores en todos los puntos de un cuerpo. Las primeras se relacionan por medio de la ecuación 29-12 ( $\Delta V = iR$ ), y las segundas por medio de la ecuación 29-10 ( $\vec{E} = \rho\vec{j}$ ).

Las magnitudes macroscópicas  $\Delta V$ ,  $i$  y  $R$  son de gran utilidad cuando se efectúan mediciones eléctricas en objetos conductores reales. Son cantidades cuyos valores se dan en metros. Las magnitudes microscópicas  $\vec{E}$ ,  $\vec{j}$  y  $\rho$  son de gran importancia cuando se trata del comportamiento fundamental de la materia (y no de muestras de ella), como cuando nos ocupamos de la investigación en la física del *estado sólido* (o *materia condensada*). De ahí que el tema de la sección 29-5 es la concepción atómica de la *resistividad* de un metal, y no la *resistencia* de una muestra metálica.

**PROBLEMA RESUELTO 29-5.** Un bloque rectangular de hierro tiene las dimensiones  $1.2\text{ cm} \times 1.2\text{ cm} \times 15\text{ cm}$ . a) ¿Cuál es su resistencia medida entre los dos extremos cuadrados? b) ¿Cuál es su resistencia entre dos caras rectangulares opuestas? La resistividad del hierro a temperatura ambiente es  $9.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$ .

**Solución** a) La superficie de un extremo cuadrado es  $(1.2 \times 10^{-2}\text{ m})^2$  o  $1.44 \times 10^{-4}\text{ m}^2$ . De acuerdo con la ecuación 29-13,

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(9.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(0.15\text{ m})}{1.44 \times 10^{-4}\text{ m}^2} \\ = 1.0 \times 10^{-4}\ \Omega = 100\ \mu\Omega.$$

b) la superficie de una cara rectangular es  $(1.2 \times 10^{-2}\text{ m})(0.15\text{ m})$  o  $1.80 \times 10^{-3}\text{ m}^2$ . Con base en la ecuación 29-13,

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(9.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(1.2 \times 10^{-2}\text{ m})}{1.80 \times 10^{-3}\text{ m}^2} \\ = 6.5 \times 10^{-7}\ \Omega = 0.65\ \mu\Omega.$$

En ambos casos suponemos que la diferencia de potencial se aplica al bloque de modo que las superficies entre las que se desea la resistencia sean equipotenciales. Entonces el campo eléctrico será uniforme entre ellas y, por tanto, también lo será la densidad de corriente. De lo contrario no se aplicaría la ecuación 29-13.

## Analogía entre la corriente y el flujo de calor (opcional)

Existe una estrecha analogía entre el flujo de carga creado por una diferencia de potencial y el flujo de calor proveniente de una diferencia de temperatura. Consideremos una delgada plancha conductora de espesor  $\Delta x$  y de superficie  $A$ . Supóngase que mantenemos una diferencia de potencial  $\Delta V$  entre las caras opuestas. La corriente  $i$  está dada por las ecuaciones 29-12 ( $i = \Delta V/R$ ) y 29-13 ( $R = \rho L/A$ ), esto es

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{\rho \Delta x/A} = \sigma A \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

con el uso de  $\sigma = \rho^{-1}$ . En el caso límite de una plancha de espesor  $dx$ , esto se expresa así

$$\frac{dq}{dt} = -\sigma A \frac{dV}{dx} \quad (29-14)$$

El signo negativo de la ecuación anterior indica que la carga positiva fluye en dirección de  $V$  decreciente, es decir,  $dq/dt$  es positivo cuando  $dV/dx$  es negativo.

La ecuación análoga del flujo de calor (Sec. 23-2) es

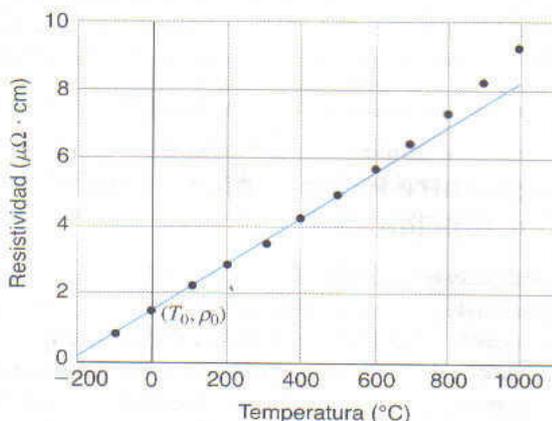
$$\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (29-15)$$

la cual muestra que  $k$ , la conductividad térmica, corresponde a  $\sigma$  y  $dT/dx$ , el gradiente de temperatura, corresponde a  $dV/dx$ , el gradiente de potencial. En los metales puros hay algo más que una analogía matemática formal entre las ecuaciones 29-14 y 29-15. En ellos la energía calorífica y la carga son transportados por electrones libres; desde el punto de vista empírico, un buen conductor eléctrico (plata por ejemplo) es además un buen conductor del calor, y la conductividad eléctrica  $\sigma$  guarda relación directa con la conductividad térmica  $k$ . ■

### Variación de la resistividad con la temperatura (opcional)

La figura 29-8 contiene un resumen de algunas mediciones experimentales de la resistividad del cobre con varias temperaturas. Para utilizar esta información en la práctica, convendría expresarla en forma de ecuación. En una región limitada de temperatura, la relación que tiene ésta con la resistividad es casi lineal. Podemos ajustar una recta en cualquier región de la figura 29-8, empleando dos puntos para determinar la pendiente de la recta. Al seleccionar un punto de referencia, como el denotado como  $T_0, \rho_0$  en la figura, se expresa la resistividad  $\rho$  a una temperatura arbitraria  $T$  partiendo de la ecuación empírica de la recta en la figura 29-8, la cual es

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha_{\text{pro}} (T - T_0) \quad (29-16)$$



**FIGURA 29-8.** Los puntos muestran algunas mediciones de la resistividad del cobre en varias temperaturas. En un intervalo de temperatura, la variación de resistividad con  $T$  puede aproximarse mediante una recta; por ejemplo, la línea de la figura corresponde a los datos de unos  $-100^\circ\text{C}$  a  $400^\circ\text{C}$ .

(La expresión anterior se parece mucho a la de la expansión térmica lineal,  $\Delta L = \alpha L \Delta T$ , que se mencionó en la Sec. 21-4). Hemos escrito la pendiente de esta línea como  $\rho_0 \alpha_{\text{pro}}$ . Si resolvemos la ecuación 29-16 para  $\alpha_{\text{pro}}$ , obtendremos

$$\alpha_{\text{pro}} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho - \rho_0}{T - T_0} \quad (29-17)$$

La cantidad  $\alpha_{\text{pro}}$  es el *coeficiente de la resistividad con la temperatura media (o promedio)* en una región cuya temperatura se encuentra entre los dos puntos utilizados para determinar la pendiente. Podemos definir un coeficiente más general de la resistividad con la temperatura como

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \quad (29-18)$$

que es el cambio fraccional de la resistividad  $d\rho/\rho$  por cambio de la temperatura  $dT$ . Es decir,  $\alpha$  da la dependencia de la resistividad respecto a la temperatura *en relación con una temperatura en particular*; mientras que  $\alpha_{\text{pro}}$  indica la dependencia promedio *en un intervalo determinado*. En términos generales el coeficiente  $\alpha$  depende de la temperatura.

En las aplicaciones más prácticas, la ecuación 29-16 ofrece resultados que se hallan dentro del límite aceptable de exactitud. Los valores ordinarios de  $\alpha_{\text{pro}}$  vienen en la tabla 29-1. La aproximación lineal no es suficiente en trabajos más precisos, como el uso de termómetro de resistencia de platino para medir la temperatura (Sec. 21-3). En este caso, para mejorar la precisión pueden agregarse términos en  $(T - T_0)^2$  y  $(T - T_0)^3$  en el lado derecho de la ecuación 29-16 para aumentar la precisión. Los coeficientes en estos términos adicionales han de determinarse empíricamente en analogía con el coeficiente  $\alpha_{\text{pro}}$  de la ecuación 29-16. ■

## 29-5 LEY DE OHM: UNA PERSPECTIVA MICROSCÓPICA

Según señalamos con anterioridad, la ley de Ohm no es fundamental en el electromagnetismo, pues se basa en las propiedades del medio conductor. Su forma es muy simple, y resulta extraño que muchos materiales la cumplan con tanta exactitud, mientras que otros no se sujetan a ella en absoluto. Vamos a ver si podemos entender por qué los metales la siguen, es decir, por qué sus resistividades  $\rho$  son constantes (y no, por ejemplo, dependen del campo eléctrico aplicado).

En un metal, los electrones de valencia no se unen a los átomos individuales, sino que pueden moverse libremente dentro de la red y reciben el nombre de *electrones de conducción*. En el cobre hay uno de ellos por átomo; los 28 restantes permanecen ligados a los núcleos del cobre para formar núcleos iónicos.

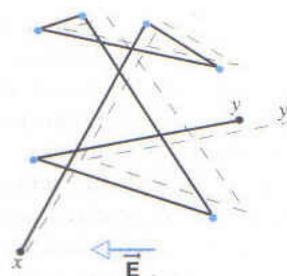
A menudo, la teoría de la conducción eléctrica en metales se basa en el *modelo de electrones libres*, en el cual (como primera aproximación) se supone que los electrones de conducción se mueven por el material conductor, en forma parecida a las moléculas de gas en un contenedor. De hecho, a veces al conjunto de ellos se le llama *gas de electrones*. Pero como veremos luego, no debe olvidarse el efecto que los núcleos de iones tienen en este "gas".

En el caso del gas de electrones, la distribución maxwelliana clásica de velocidades (Sec. 22-4) indicaría que los electrones de conducción presentan una amplia distribución de velocidades de cero al infinito, con un promedio bien definido. No obstante, al considerar los electrones no es posible ignorar la mecánica cuántica, que ofrece una perspectiva muy distinta. En la distribución cuántica (Sec. 49-4), los electrones que favorecen la conducción eléctrica están concentrados en un intervalo muy breve de energías cinéticas y, por tanto, de velocidades. Con una excelente aproximación puede suponerse que se desplazan con una velocidad promedio uniforme. En el caso del cobre, es de unos  $v_{\text{pro}} = 1.6 \times 10^6$  m/s. Más aún, en tanto que la velocidad maxwelliana promedio depende mucho de la temperatura, la velocidad efectiva que se alcanza con la distribución cuántica casi no depende de la temperatura.

Los electrones se mueven al azar cuando no existe un campo eléctrico, una vez más como las moléculas de gas dentro de un contenedor. En forma esporádica un electrón choca con un núcleo iónico de la red, experimentando un cambio abrupto de dirección. Como lo hicimos en el caso de colisiones de las moléculas de gas, podemos relacionar una trayectoria libre media  $\lambda$  y un tiempo libre medio  $\tau$  con una distancia y tiempo promedio entre las colisiones. (Las colisiones que se producen entre los electrones son raras y no afectan a las propiedades eléctricas del conductor.)

En un cristal metálico ideal (que no contenga defectos ni impurezas) a 0 K no habría colisiones de electrones y la red, conforme a las predicciones de la física cuántica, esto es,  $\lambda \rightarrow \infty$  como  $T \rightarrow 0$  K en el caso de cristales ideales. Las colisiones tienen lugar en cristales reales porque 1) a cualquier temperatura los núcleos iónicos  $T$  vibran alrededor de su posición de equilibrio y lo hacen de modo aleatorio; 2) puede haber impurezas, es decir, átomos extraños; 3) el cristal puede contener imperfecciones de red, entre ellas átomos faltantes o desplazados. En consecuencia, la resistividad de un metal puede aumentar 1) elevando su temperatura, 2) agregándole pequeñas cantidades de impurezas y 3) sometándolo a gran presión como sería atravesándolo con un troquel para aumentar las imperfecciones de la red.

Cuando aplicamos un campo eléctrico a un metal, los electrones modifican su movimiento aleatorio de manera que se desplazan lentamente en dirección opuesta a la del campo, con una velocidad promedio de deriva  $v_d$ . Esta velocidad es mucho menor (en un factor aproximado de  $10^{10}$ ) (Prob. res. 29-3) que la velocidad efectiva promedio  $v_{\text{pro}}$ . La figura 29-9 indica la relación entre ambas velocidades. Las líneas gruesas denotan una trayectoria aleatoria que posiblemente sigue un electrón cuando no existe un campo aplicado; avanza de  $x$  a  $y$ , produciendo seis colisiones en su camino. Las líneas punteadas muestran cómo el mismo evento *podría* haber ocurrido si se hubiera aplicado un campo eléctrico  $\vec{E}$ . Nótese que el electrón se desplaza constantemente hacia la derecha, terminando en  $y'$  y no en  $y$ . Al preparar la figura 29-9 se ha supuesto que la velocidad de deriva  $v_d$  es  $0.02v_{\text{pro}}$ ; en realidad, se asemeja más a  $10^{-10}v_{\text{pro}}$ , de modo que la "deriva" mostrada en la figura está muy exagerada.



**FIGURA 29-9.** Los segmentos de línea llena muestran un electrón que se traslada de  $x$  a  $y$ , realizando seis colisiones en su camino. Las líneas punteadas indican lo que *podría* haber sido la trayectoria en presencia de un campo eléctrico aplicado  $\vec{E}$ . Obsérvese el desplazamiento gradual pero constante en la dirección  $-\vec{E}$ . (En realidad, las líneas punteadas deberían ser un poco curvas para representar las trayectorias parabólicas descritas por los electrones entre colisiones.)

Podemos calcular la velocidad de deriva  $v_d$  partiendo del campo eléctrico  $E$  y de  $v_{\text{pro}}$  y  $\lambda$ . Cuando se aplica un campo a un electrón en el metal, experimenta una fuerza  $eE$  que le imparte una aceleración  $a$  dada por la segunda ley de Newton,

$$a = \frac{eE}{m}.$$

Considere un electrón que chocó con un núcleo de iones. Por lo regular, la colisión destruye momentáneamente la tendencia a la deriva, y tras la colisión el electrón tiene una dirección verdaderamente aleatoria. Durante el intervalo de tiempo con la siguiente colisión, la velocidad del electrón cambia en promedio en  $a(\lambda/v_{\text{pro}})$  o  $a\tau$ , donde  $\tau$  es el tiempo medio entre colisiones. Esto lo identificamos con la velocidad de deriva  $v_d$ , o sea\*

$$v_d = a\tau = \frac{eE\tau}{m}. \quad (29-19)$$

También podemos expresar  $v_d$  en función de la densidad de corriente (Ec. 29-6), que nos da

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{eE\tau}{m}.$$

Al combinar la expresión anterior con la ecuación 29-10 ( $\rho = E/j$ ), finalmente obtenemos

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau}. \quad (29-20)$$

\* Tal vez resulte tentador escribir la ecuación 29-19 como  $v_d = \frac{1}{2}a\tau$ , razonando que  $a\tau$  es la velocidad *final* del electrón; por tanto, su velocidad *promedio* es la mitad de ese valor. El factor extra de  $\frac{1}{2}$  sería correcto si siguiéramos a un electrón típico suponiendo que su velocidad de deriva fuera el promedio de su velocidad durante el tiempo medio  $\tau$  entre colisiones. Sin embargo, la velocidad de desplazamiento es proporcional a la densidad de corriente  $j$  y ha de calcularse partiendo de la velocidad promedio de *todos* los electrones tomados en un instante. En cada electrón, la velocidad en un tiempo cualquiera es  $at$ , donde  $t$  es el tiempo transcurrido desde la última colisión de ese electrón. Como la aceleración  $a$  es la misma en todos ellos, el valor promedio de  $at$  en determinado instante es  $a\tau$ , donde  $\tau$  es el tiempo promedio transcurrido desde la última colisión, que es el mismo que el tiempo medio entre ellas. Una explicación de este punto viene en *Electricity and Magnetism*, 2a. ed., de Edward Purcell (McGraw-Hill, 1985), sección 4.4. Véase también "Drift Speed and Collision Time", de Donald E. Tilley, *American Journal of Physics*, junio de 1976, p. 597.

Nótese que  $m$ ,  $n$  y  $e$  son constantes en esta ecuación. Por tanto, la ecuación 29-20 puede tomarse como una afirmación de que los metales siguen la ley de Ohm, si podemos demostrar que  $\tau$  es una constante. En particular, hay que demostrar que  $\tau$  no depende del campo eléctrico aplicado  $E$ . En este caso  $\rho$  no depende de  $E$ , que es el criterio de que un material se sujeta a la ley de Ohm. La magnitud  $\tau$  depende de la distribución de velocidades en los electrones de conducción. Hemos visto que esta distribución se ve afectada muy poco inclusive por la aplicación de un campo relativamente grande, puesto que  $v_{\text{pro}}$  es del orden de  $10^6$  m/s y  $v_d$  (Prob. res. 29-3) es apenas del orden de  $10^{-4}$  m/s, una razón de  $10^{10}$ . Cualquiera que sea el valor de  $\tau$  (digamos en el cobre a  $20^\circ\text{C}$ ) cuando no existe un campo, permanecen esencialmente inalterados cuando se aplica el campo. En consecuencia, el lado derecho de la ecuación 29-20 no depende de  $E$  (lo cual significa que  $\rho$  no depende de  $E$ ); el material obedece a la ley de Ohm.

**PROBLEMA RESUELTO 29-6.** a) ¿Cuál es el tiempo medio libre  $\tau$  entre colisiones tratándose de electrones de conducción en el cobre? b) ¿Cuál es la trayectoria media libre  $\lambda$  de ellas? Suponga una velocidad efectiva  $v_{\text{pro}}$  de  $1.6 \times 10^6$  m/s.

**Solución** a) De acuerdo con la ecuación 29-20 tenemos

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{m}{ne^2\rho} \\ &= \frac{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}{(8.49 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2(1.69 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m})} \\ &= 2.48 \times 10^{-14} \text{ s}.\end{aligned}$$

El valor de  $n$ , número de electrones de conducción por unidad de volumen en el cobre, se obtuvo del problema resuelto 29-3; el valor de  $\rho$  proviene de la tabla 29-1.

b) Definimos la trayectoria media libre a partir de

$$\begin{aligned}\lambda &= \tau v_{\text{pro}} = (2.48 \times 10^{-14} \text{ s})(1.6 \times 10^6 \text{ m/s}) \\ &= 4.0 \times 10^{-8} \text{ m} = 40 \text{ nm}.\end{aligned}$$

El resultado anterior es 150 veces la distancia entre los iones más cercanos en una red de cobre. Un estudio completo basado en la física cuántica revela que no es posible ver la "colisión" como una interacción directa entre un electrón y un ion. Más bien, es una interacción entre un electrón y las vibraciones térmicas de la red, las imperfecciones de ésta o sus átomos de impureza. Un electrón puede pasar muy libremente a través de una red "ideal", es decir, una geoméricamente perfecta cerca del cero absoluto de temperatura. En tales condiciones se han observado trayectorias medias libres hasta de 10 cm.

## 29-6 UN AISLANTE EN UN CAMPO ELÉCTRICO

Hasta ahora hemos hablado exclusivamente del comportamiento de los materiales conductores en campos eléctricos. A continuación vamos a analizar lo que sucede cuando aplicamos un campo eléctrico externo a un material aislante. En otras palabras, vamos a repetir el experimento de la figura 29-1, sustituyendo el material conductor por uno aislante.

En un aislante las cargas eléctricas no pueden moverse. No se genera corriente alguna cuando lo ponemos en un cam-

po eléctrico. Los electrones permanecen adheridos firmemente a sus átomos o moléculas. En vez de mover cargas a través del material, lo único que el campo eléctrico puede hacer en el aislante es producir un ligero reacomodo de las cargas eléctricas dentro de los átomos. No obstante, ese efecto pequeño puede influir profundamente en el campo eléctrico de un aislante.

Comenzaremos la exposición considerando un aislante como el agua pura. La molécula de agua tiene un momento dipolar eléctrico permanente, como se ve en la figura 26-20. Cuando una molécula de agua, con su momento dipolar eléctrico, se coloca en un campo eléctrico como en la figura 26-19, el campo ejerce un par de torsión sobre el dipolo que trata de alinearlo con el campo. La figura 29-10 contiene un conjunto de dipolos, que un campo externo ha alineado girándolos.

Para un observador externo, la serie de dipolos de la figura 29-10b parece tener cargas negativas en su superficie superior y positivas en su superficie inferior. En este aspecto el aislante nos recuerda el conductor de la figura 29-1, pero la explicación es muy diferente: los electrones no se mueven por el material aislante. En un aislante, un campo eléctrico externo ocasiona que las cargas se muevan sólo en distancias menores que un diámetro atómico.

En la figura 29-11a vemos una plancha de material aislante que fue puesta en un campo eléctrico aplicado externamente  $\vec{E}_0$ . A causa de la rotación de los momentos dipolares, existe una hoja de carga positiva en la superficie inferior del material y una hoja de carga negativa en la superficie superior. Estas dos hojas de *carga superficial inducida* generan un campo eléctrico  $\vec{E}'$  en el aislante que se opone al campo aplicado, según se indica en la figura 29-11b. El efecto de alinear los dipolos en el aislante se conoce como *polarización*, y al campo  $\vec{E}'$  se le conoce como campo de polarización.

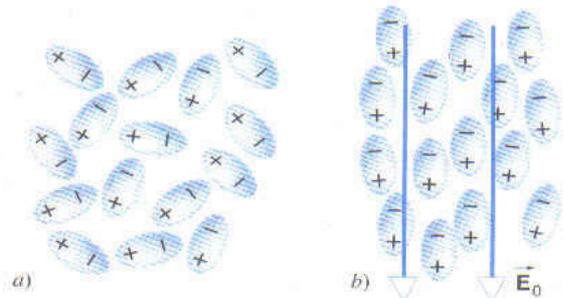
El campo neto  $\vec{E}$  dentro de aislante es la suma vectorial del campo aplicado  $\vec{E}_0$  y el de polarización  $\vec{E}'$ :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (29-21)$$

Puesto que  $\vec{E}_0$  y  $\vec{E}'$  siguen dirección opuesta, la suma vectorial puede escribirse como una diferencia de magnitudes:

$$E = E_0 - E'. \quad (29-22)$$

La figura 29-11c muestra el campo neto dentro del aislante, el cual es menor que el campo aplicado. *Cuando ponemos un aislante en un campo eléctrico, las cargas inducidas superficiales parecen tender a debilitar el campo original en el interior del material.*



**FIGURA 29-10.** a) Grupo de dipolos con orientación aleatoria. b) Un campo eléctrico externo alinea los dipolos.

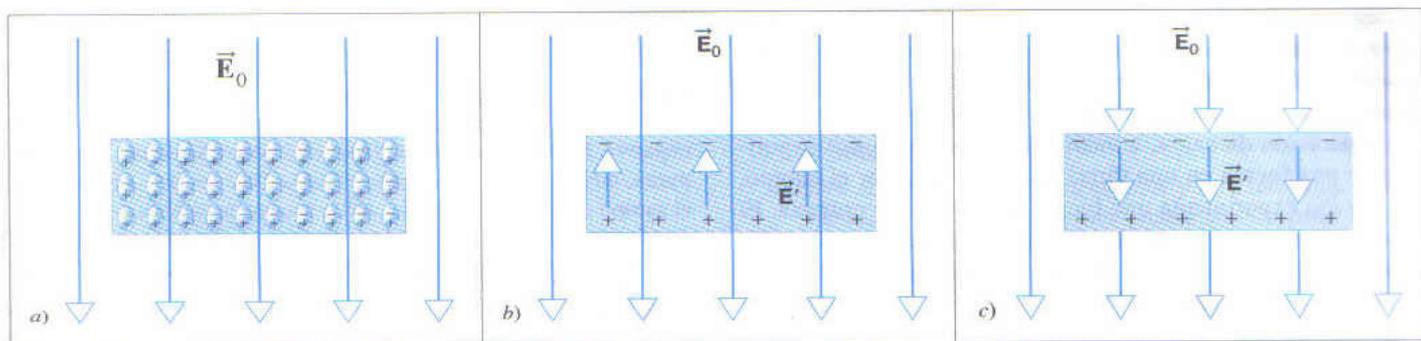


FIGURA 29-11. a) Cuando se pone un aislante en un campo externo, los dipolos se alinean. b) las cargas inducidas superficiales en el aislante crean un campo de polarización  $\vec{E}'$  en su interior. c) El campo neto  $\vec{E}$  en el aislante es la suma vectorial de  $\vec{E}_0$  y  $\vec{E}'$ .

Al aumentar el campo aplicado  $\vec{E}_0$ , generalmente aumentará el campo de polarización. Los dipolos del aislante se encuentran en movimiento térmico aleatorio, el cual tiende a destruir su alineación. Cuando mayor sea el campo aplicado mayor será el par de torsión en los dipolos, más grande será su grado de alineación y también el campo de polarización. En muchos materiales, denominados *lineales*, este campo crece en proporción directa con el campo aplicado:  $E' \propto E_0$ . Con el uso de la ecuación 29-22 podemos escribir esta proporcionalidad como  $E \propto E_0$  y, si introducimos una constante de proporcionalidad, tendremos

$$E = \frac{1}{\kappa_e} E_0, \quad (29-23)$$

donde la constante adimensional  $\kappa_e$  recibe el nombre de *constante dieléctrica* del material. Es mayor que 1 y, por lo mismo, el campo neto  $E$  en el aislante es menor que el campo aplicado. A semejanza de la conductividad o de la resistividad, dicha constante caracteriza al tipo de material (y su temperatura) y no depende del tamaño ni de la forma del objeto hecho del material.

A los materiales aislantes también se les conoce como *materiales dieléctricos*; vamos a utilizar ambos términos como sinónimos. La tabla 29-2 contiene los valores de las cons-

tantes dieléctricas para varios materiales a temperatura ambiente. Aquellos cuyas constantes dieléctricas son grandes tienen grandes campos de polarización; por tanto, en su interior los campos son mucho más pequeños que el campo aplicado.

Si aplicamos un campo eléctrico lo bastante grande a un material aislante, podremos ionizar átomos o moléculas en él y crear así una condición para que la carga eléctrica fluya como en un conductor. Los campos necesarios para la *ruptura* de varios aislantes, denominados *intensidades dieléctricas*, se incluyen en la tabla 29-2.

El agua es un ejemplo de material *dieléctrico polar*, porque sus moléculas tienen momentos dipolares eléctricos permanentes. Los efectos semejantes a los descritos en la presente sección ocurrirán también en los dieléctricos *no polares*, cuyas moléculas tienen ese tipo de momentos. En la figura 29-12 se aprecia el efecto que un campo dieléctrico tiene en un átomo. Éste puede considerarse una nube esféricamente simétrica de car-

TABLA 29-2 Algunas propiedades de dieléctricos<sup>a</sup>

Material	Constante dieléctrica $\kappa_e$	Fuerza dieléctrica (kV/mm)
Vacío	1 (exact)	$\infty$
Aire (1 atm)	1.00059	3
Poliestireno	2.6	24
Papel	3.5	16
Aceite para transformador	4.5	12
Pyrex	4.7	14
Mica	5.4	160
Porcelana	6.5	4
Silicio	12	
Agua (25°C)	78.5	
Agua (20°C)	80.4	
Cerámica de titania	130	
Titanato de estroncio	310	8

<sup>a</sup> Medidos a temperatura ambiente.

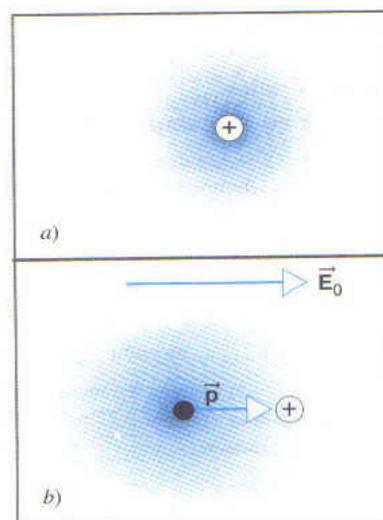


FIGURA 29-12. a) A un átomo lo representa su núcleo de carga positiva y su nube de electrones cargada negativamente. El centro de las cargas positivas coincide con el de las cargas negativas. b) Cuando se coloca el átomo en un campo eléctrico externo, las cargas positivas y negativas experimentan fuerzas en dirección opuesta, y ya no coincide el centro de las cargas positivas con el de las cargas negativas. El átomo adquiere un momento bipolar inducido.

ga negativa (los electrones) que rodea el núcleo de carga positiva. Cuando no hay un campo aplicado, coinciden los centros de las distribuciones de la carga positiva y negativa y el átomo no tiene un momento dipolar. El campo eléctrico causa una separación de carga, a medida que los electrones experimentan una fuerza en una dirección producida por el campo, y el núcleo experimenta una fuerza en dirección contraria. El átomo adquiere un *momento dipolar inducido* a causa de la acción del campo eléctrico. El momento dipolar inducido desaparece cuando se elimina el campo eléctrico. La magnitud de este momento dipolar es proporcional al campo aplicado; cuando se tiene en cuenta el efecto de todos los dipolos inducidos en el material, tendremos otra vez un campo de polarización  $E'$  proporcional al campo aplicado tratándose de intensidades de campo ordinarias. A menudo el momento dipolar inducido causa la atracción de un objeto cargado en un aislante no cargado, como el peine cargado y los trozos de papel que aparecen en la figura 25-5.

Como todas las expresiones de los campos eléctricos en un espacio vacío, debido a varias distribuciones de carga, incluyen un factor de  $1/\epsilon_0$ , la ecuación 29-23 indica que las expresiones de los campos eléctricos en la materia contendrán el factor  $1/\kappa_e \epsilon_0$ . Puesto que este factor se presenta con mucha frecuencia, se le designa con el símbolo  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \kappa_e \epsilon_0. \quad (29-24)$$

A  $\epsilon$  se le conoce como permitividad del material (recuérdese que a la constante eléctrica  $\epsilon_0$  se llama también permitividad del espacio vacío). A menudo podemos cambiar las ecuaciones para calcular la magnitud de los campos eléctricos en el espacio vacío para aplicarlas a los campos eléctricos en la materia, con sólo reemplazar  $\epsilon_0$  con  $\epsilon$ .

**PROBLEMA RESUELTO 29-7.** Dos placas circulares conductoras de 4.2 cm de radio y con una separación de 0.65 entre ellas tienen una densidad de carga uniformemente distribuida de magnitud  $2.88 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$ , con una placa con carga positiva y la otra con carga negativa. El espacio entre las placas está lleno con un disco de vidrio pyrex, cuya constante dieléctrica (Tabla 29-2) es 4.7. *a)* Determine el campo eléctrico en el vidrio. *b)* Determine la densidad inducida de carga en las superficies del vidrio. Considere ubicaciones cercanas al centro de los discos donde los campos son uniformes.

**Solución** *a)* Cuando no hay un dieléctrico, el campo eléctrico producido por cada placa circular será  $\sigma/2\epsilon_0$ , como se indica en la ecuación 26-20. Los campos debidos a las dos placas siguen la misma dirección, de modo que se suman para obtener un campo neto de

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{2.88 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2}{8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2} = 3.25 \times 10^4 \text{ N/C}.$$

Cuando hay un dieléctrico, el campo neto es

$$E = \frac{E_0}{\kappa_e} = \frac{3.25 \times 10^4 \text{ N/C}}{4.7} = 6.9 \times 10^3 \text{ N/C}.$$

*b)* El campo de polarización generado por la carga superficial inducida es

$$E' = E_0 - E = 3.25 \times 10^4 \text{ N/C} - 6.9 \times 10^3 \text{ N/C} = 2.56 \times 10^4 \text{ N/C}.$$

Las dos hojas de cargas inducidas crean el campo eléctrico  $E'$ , del mismo modo que las dos hojas de cargas libres producen el campo  $E_0$ . Con  $E' = \sigma_{\text{ind}}/\epsilon_0$  tenemos

$$\sigma_{\text{ind}} = \epsilon_0 E' = (8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2.56 \times 10^4 \text{ N/C}) = 2.27 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2.$$

## OPCIÓN MÚLTIPLE

### 29-1 Tipos de materiales

#### 29-2 Un conductor en un campo eléctrico: condiciones estáticas

- Se pone un conductor triangular en un campo eléctrico originalmente uniforme. *a)* ¿Qué imagen en la figura 29-13 representa mejor las líneas del campo eléctrico estático del conductor? *b)* ¿Cuál imagen de la figura 29-13 representa mejor las líneas equipotenciales estáticas cerca del conductor?

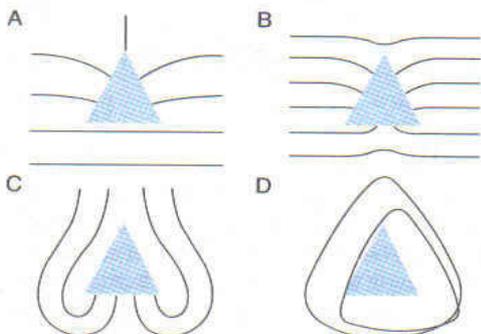


FIGURA 29-13. Pregunta de opción múltiple 1.

- Se coloca una carga puntual dentro de un cascarón esférico conductor sin carga. ¿Cuál imagen de la figura 29-14 muestra mejor las líneas del campo eléctrico?

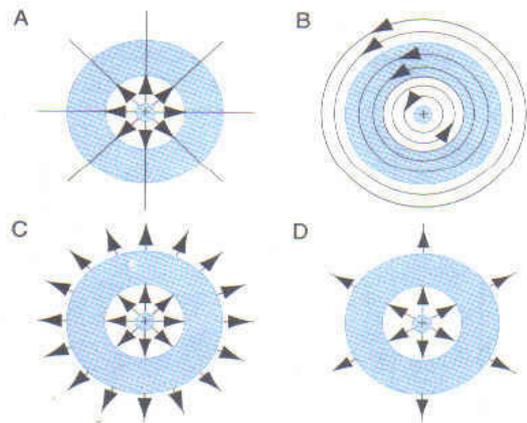


FIGURA 29-14. Pregunta de opción múltiple 2.

3. Se coloca una carga puntual dentro de un cascarón esférico conductor sin carga. ¿Cuál imagen de la figura 29-15 muestra mejor las líneas del campo eléctrico?

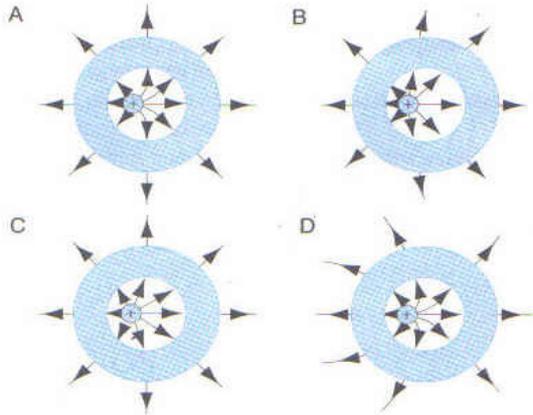


FIGURA 29-15. Pregunta de opción múltiple 3.

**29-3 Un conductor en un campo eléctrico: condiciones dinámicas**

4. La corriente y la densidad de corriente tienen direcciones relacionadas con ellas. ¿Son vectores?
- A) Sólo la corriente es vector.  
 B) Sólo la densidad de corriente es vector.  
 C) Tanto la corriente como la densidad son vectores.  
 D) Ni la corriente ni la densidad de corriente son vectores.
5. Una corriente constante fluye por un conductor cónico como se ve en la figura 29-16. Las superficies extremas  $S_1$  y  $S_2$  son dos superficies equipotenciales diferentes.
- a) ¿Por cuál plano fluye la corriente más grande?  
 A) 1      B) 2      C) 3      D) 4  
 E) La corriente es la misma en todos los planos.
- b) ¿Por cuál plano fluye el flujo eléctrico más grande?  
 A) 1      B) 2      C) 3      D) 4  
 E) El flujo eléctrico es el mismo a través de todos los planos.
- c) ¿Cómo varía la magnitud del campo eléctrico  $E$  a lo largo del eje central que se desplaza de  $S_1$  a  $S_2$ ?  
 A)  $E$  es constante.    B)  $E$  aumenta.  
 C)  $E$  disminuye.

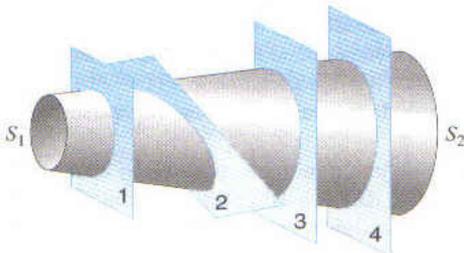


FIGURA 29-16. Pregunta de opción múltiple 5.

6. Una corriente fluye por un largo conductor cilíndrico. ¿Qué dirección sigue?

- A) Hacia el extremo con el mayor potencial.  
 B) Hacia el extremo con el menor potencial.  
 C) Ni hacia A) ni hacia B), pues la superficie del conductor no es un equipotencial.

**29-4 Materiales óhmicos**

7. Dos alambres de forma idéntica, A y B, transportan corrientes idénticas. Los alambres están hechos de diferentes sustancias que tienen distinta densidad de electrones, con  $n_A > n_B$ .
- a) ¿Cuál alambre tendrá la mayor densidad de corriente?  
 A) A      B) B      C) Los alambres son iguales.
- b) ¿Cuál alambre tendrá la velocidad de deriva máxima para los electrones?  
 A) A      B) B      C) Los alambres son iguales.
- c) ¿Cuál alambre tendrá la máxima velocidad de desplazamiento en los electrones?  
 A) A      B) B      C) Los alambres son iguales.
8. En la figura 29-17 se muestra la relación de corriente-voltaje en cierta sustancia. Ésta es óhmica para
- A) todos los valores de  $\Delta V$ .      B)  $\Delta V$  entre 0 y 3 V.  
 C)  $\Delta V$  mayor que 3 V.      D) sin valores de  $\Delta V$ .

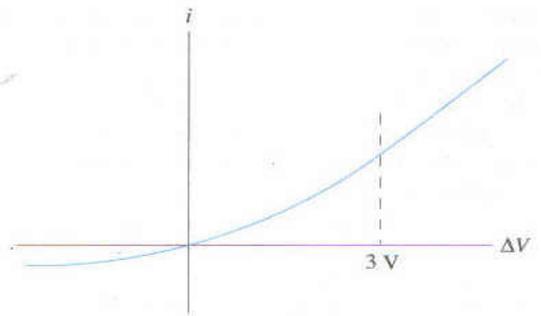


FIGURA 29-17. Pregunta de opción múltiple 8.

9. ¿De qué manera la resistencia  $R$  de una sustancia óhmica depende de la magnitud  $E$  del campo eléctrico aplicado?
- A)  $R \propto E$       B)  $ER =$  una constante  
 C)  $E + R =$  una constante    D)  $R$  es independiente de  $E$ .
10. Una corriente estacionaria  $i_{entra}$  fluye por un alambre que entra en un resistor. Una corriente estacionaria  $i_{sale}$  fluye por un alambre que sale del extremo del resistor.
- a) ¿Qué diferencias hay entre  $i_{entra}$  e  $i_{sale}$ ?
- A)  $i_{entra} > i_{sale}$       B)  $i_{entra} < i_{sale}$   
 C)  $i_{entra} = i_{sale}$  siempre    D)  $i_{entra} = i_{sale}$  sólo si  $R = 0$
- b) ¿Qué puede concluirse respecto al potencial  $V_{entrada}$  en el extremo del alambre donde entra la corriente y el potencial  $V_{salida}$  en el extremo del alambre donde la corriente sale?
- A)  $V_{entra} > V_{sale}$       B)  $V_{entra} < V_{sale}$   
 C)  $V_{entra} = V_{sale}$  siempre  
 D) Nada, a menos que se proporcione más información.

**29-5 Ley de Ohm: una perspectiva microscópica**

11. ¿De qué manera cambia la velocidad de deriva de los electrones cuando pasan por un resistor?
- A) Aumenta.      B) Disminuye.  
 C) No se altera.

12. La resistividad de la mayoría de los conductores aumenta con la temperatura. Una causa verosímil es que, en un conductor,
- la densidad de electrones varía con la temperatura.
  - la carga de cada electrón varía con la temperatura.
  - el tiempo entre las colisiones varía con la temperatura.
  - la masa del electrón varía con la temperatura.

### 29-6 Un aislante en un campo eléctrico

13. Se pone un aislante esférico en un campo eléctrico inicialmente uniforme.
- ¿Que imagen dentro de la figura 29-8 representa mejor las líneas del campo eléctrico estático cerca y dentro del aislante?
  - ¿Qué imagen de la figura 29-18 representa mejor las líneas equipotenciales estáticas cerca y dentro del aislante?

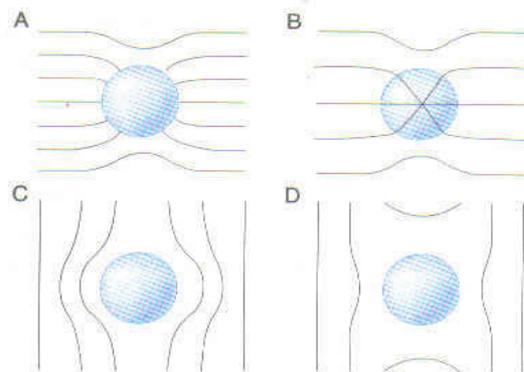


FIGURA 29-18. Pregunta de opción múltiple 13.

## PREGUNTAS

- Mencione otras magnitudes físicas que, como la corriente, son escalares, cuyo significado se representa mediante una flecha o un diagrama.
- En nuestra convención referente a la dirección de las flechas de corriente *a*) ¿hubiera sido más adecuado o, incluso, posible haber supuesto que todos los portadores de carga son negativos? *b*) ¿hubiera sido más adecuado o, incluso, posible haber designado como positivo el electrón, como negativo el protón y así sucesivamente?
- ¿Qué evidencia experimental puede aportar para demostrar que las cargas eléctricas en la electricidad de corriente y las de la electrostática son idénticas?
- Con sus propias palabras explique por qué puede tener  $\vec{E} \neq 0$  dentro de un conductor en este capítulo, mientras que supusimos  $\vec{E} = 0$  en la sección 27-6.
- Una corriente *i* entra en un vértice de una hoja cuadrada de cobre y sale por el opuesto. Dibuje flechas en varios puntos dentro del cuadrado que representen los valores relativos de la densidad de corriente  $\vec{j}$ . Aquí se requieren conjeturas intuitivas en vez de detallados análisis matemáticos.
- ¿Advierte una razón lógica en la asignación de números de calibre a los cables de las casas? Consulte el ejercicio 6. Si no hay un motivo para ello, ¿por qué, entonces, se utiliza este sistema.
- Una diferencia de potencial  $\Delta V$  se aplica a un alambre de cobre de diámetro *d* y de longitud *L*. ¿Qué efecto tiene en la velocidad de deriva de los electrones *a*) duplicar  $\Delta V$ , *b*) duplicar *L* y *c*) duplicar *d*?
- ¿Por qué no es posible medir la velocidad de deriva de los electrones cronometrando su recorrido a través de un conductor?
- Describa brevemente algunos diseños posibles de resistores variables.
- Una diferencia de potencial  $\Delta V$  se aplica a un cilindro circular de carbono, prensándolo entre electrodos circulares de cobre,

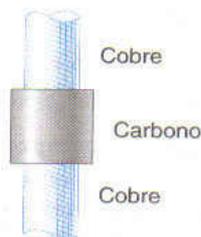


FIGURA 29-19. Pregunta 10.

como se observa en la figura 29-19. Explique la dificultad de calcular la resistencia del cilindro de carbono empleando la relación  $R = \rho L/A$ .

- Se le da un cubo de aluminio y acceso a dos terminales de batería. ¿Cómo las conectaría al cubo para cerciorarse de obtener *a*) una resistencia máxima y *b*) una resistencia mínima?
- ¿Cómo mediría la resistencia de un bloque metálico en forma de moño? Incluya detalles concretos para aclarar el concepto.
- Al deslizarse por el asiento de un automóvil pueden generarse potenciales de varios miles de volts. ¿Por qué no se electrocuta el que se desliza?
- Explique las dificultades de probar si el filamento de una lámpara cumple o no la ley de Ohm.
- ¿Cambiará la velocidad de deriva de los electrones en un conductor metálico transportador de corriente, cuando aumente la temperatura del conductor?
- Explique por qué el momento que los electrones de conducción transfieren a los iones en un conductor metálico no originan una fuerza resultante en el conductor.
- Enumere en forma tabular las semejanzas y las diferencias entre el flujo de carga a lo largo del conductor, el flujo de agua por un tubo horizontal y la conducción de calor a través de una plancha. Incluya ideas sobre lo que causa el flujo, sobre lo que se opone a él, sobre qué partículas (si las hay) participan y sobre las unidades en que puede medirse el flujo.
- ¿Cómo se aplica la relación  $\Delta V = iR$  a los resistores que no satisfacen la ley de Ohm?
- Una vaca y un hombre están de pie en una pradera cuando un rayo cae cerca de ellos. ¿Por qué hay mayores probabilidades de que mate a la vaca que al hombre? Al fenómeno causante se le conoce como "voltaje escalonado".
- Las líneas de la figura 29-9 deben curvarse ligeramente. ¿Por qué?
- Un fusible de un circuito eléctrico es un alambre diseñado para que se derrita; de ese modo abre el circuito si la corriente rebasa un valor prestablecido. ¿Qué características debe reunir el alambre de un fusible ideal?
- ¿Por qué con el uso de una lámpara incandescente pierde brillantez?
- El carácter y la calidad de vida se ven influidos enormemente por los dispositivos que no siguen la ley de Ohm. ¿Qué puede decir en apoyo a tal aseveración?

24. Tomado del trabajo de un alumno: "La relación  $R = \Delta V/i$  indica que la resistencia de un conductor es directamente proporcional a la diferencia de potencial que se le aplique". ¿Qué opina de semejante afirmación?
25. El carbono tiene un coeficiente negativo de resistividad con la temperatura, lo cual significa que disminuye conforme aumenta la temperatura. ¿Desaparecerá por completo su resistividad con una temperatura lo bastante alta?
26. ¿Puede un dieléctrico conducir electricidad? ¿Puede un conductor presentar propiedades dieléctricas?
27. ¿Esperaría usted que la constante dieléctrica de un material varíe con la temperatura? Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué forma cambiaría? ¿Tiene o no la materia momentos dipolares permanentes en este caso?
28. Demuestre que puede suponerse que la constante dieléctrica de un conductor es infinitamente grande.
29. Un campo eléctrico puede polarizar gases en varias formas: distorsionando las nubes de electrones de las moléculas, orientando estas últimas, doblando o estirando los enlaces de las moléculas polares. ¿En qué se distingue esto de la polarización de moléculas en líquidos y en sólidos?
30. Un objeto dieléctrico en un campo eléctrico no uniforme experimenta una fuerza neta. ¿Por qué no hay fuerza neta alguna si el campo es uniforme?
31. Podemos desviar una corriente de agua de grifo con sólo acercarle una varilla cargada. Explique en forma pormenorizada cómo sucede esto.

## EJERCICIOS

### 29-1 Tipos de materiales

#### 29-2 Un conductor en un campo eléctrico: condiciones estáticas

#### 29-3 Un conductor en un campo eléctrico: condiciones dinámicas

1. Un resistor  $12.4 \Omega$  transporta una corriente de  $4.82 \text{ A}$  por  $4.60 \text{ min}$  *a)* ¿cuánta corriente y *b)* cuántos electrones pasan por una sección transversal del resistor en este tiempo?
2. La corriente en el haz de electrones de una terminal común de una pantalla de video es  $200 \mu\text{A}$ . ¿Cuántos electrones chocan contra ella cada minuto?
3. Supóngase que tenemos  $2.10 \times 10^8$  iones con carga positiva doble por centímetro cúbico, todos los cuales se dirigen al norte con una velocidad de  $1.40 \times 10^5 \text{ m/s}$ . *a)* Calcule la magnitud y la dirección de la densidad de corriente. *b)* ¿Puede determinar la corriente total en este haz de iones? Si no puede, ¿qué información adicional necesita?
4. Una corriente pequeña, pero medible de  $123 \text{ pA}$ , fluye por un alambre de cobre de  $2.46 \text{ mm}$  de diámetro. Calcule *a)* la densidad de corriente y *b)* la velocidad de deriva de los electrones. Consulte el problema resuelto 29-3.
5. Suponga que el material constitutivo de un fusible (Preg. 21) se derrite una vez que la densidad de corriente alcanza  $440 \text{ A/cm}^2$ . ¿Qué diámetro del alambre cilíndrico debe usarse para que el fusible limite a  $0.552 \text{ A}$  la corriente?
6. Se anexa una parte del National Electric Code (Estados Unidos), que establece las corrientes máximas de seguridad en los alambres de cobre de varios diámetros aislados con hule. Grafique la densidad de corriente segura en función del diámetro. ¿Qué calibre de alambre ofrece la mayor densidad de corriente segura?

Calibre <sup>a</sup>	4	6	8	10	12	14	16	18
Diámetro (mils) <sup>b</sup>	204	162	129	102	81	64	51	40
Corriente segura (A)	70	50	35	25	20	15	6	3

<sup>a</sup> Una forma de identificar el diámetro del alambre

<sup>b</sup>  $1 \text{ mil} = 10^{-3} \text{ in.}$

7. Se genera una corriente en un tubo de descarga de gas cuando en sus dos electrodos se aplica una diferencia de potencial lo bastante grande. El gas se ioniza; los electrones se dirigen a la terminal positiva y los iones positivos cargados individualmen-

te hacia la terminal negativa. ¿Cuáles son las magnitud y la dirección de la corriente en una descarga del tubo de hidrógeno donde cada segundo  $3.1 \times 10^{18}$  electrones y  $1.1 \times 10^{18}$  protones cruzan una superficie de sección transversal del tubo?

8. Una unión *pn* se crea con dos materiales semiconductores en la forma de cilindros idénticos con radio de  $0.165 \text{ mm}$ , como se muestra en la figura 29-20. En una aplicación,  $3.50 \times 10^{15}$  electrones por segundo fluyen a través de la unión del lado *n* al *p*, en tanto que  $2.25 \times 10^{15}$  hoyos por segundo fluyen del lado *p* al lado *n*. (Un hoyo actúa como una partícula con carga  $+1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .) Encuentre *a)* la corriente total y *b)* la densidad de corriente.

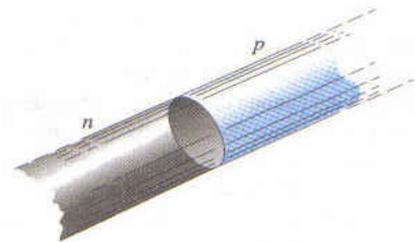


FIGURA 29-20. Ejercicio 8.

9. Cerca de la Tierra, la densidad de los protones en el viento solar es de  $8.70 \text{ cm}^{-3}$ , y su velocidad de  $470 \text{ km/s}$ . *a)* Determine la densidad de corriente de los protones. *b)* Chocarían contra la Tierra, si el campo magnético de la Tierra no los desviara. ¿Qué corriente total recibiría la Tierra?
10. La banda de un acelerador electrostático mide  $52.0 \text{ cm}$  de ancho y se desplaza a  $28.0 \text{ m/s}$ . Transporta carga y la introduce en la esfera a una rapidez correspondiente a  $95.0 \mu\text{A}$ . Calcule la densidad de carga superficial de la banda (consulte la Sec. 28-10).
11. ¿Cuánto tardan los electrones en pasar del acumulador de un automóvil al motor que arranca? Suponga que la corriente es de  $115 \text{ A}$  y que los electrones pasan por el alambre de cobre porque tiene una superficie transversal de  $31.2 \text{ mm}^2$  y una longitud de  $85.5 \text{ cm}$  (consulte el Prob. res. 29-3).

#### 29-4 Materiales óhmicos

12. Un ser humano puede quedar electrocutado si una corriente apenas de  $50 \text{ mA}$  pasa cerca del corazón. Un electricista que traba-

ja con manos sudorosas hace buen contacto con dos conductores sostenidos en las manos. Si su resistencia es de  $1800 \Omega$ , ¿cuál pudiera ser la diferencia letal de voltaje? (A menudo los electricistas manejan alambres "vivos".)

13. La vía de acero de un trolebús tiene una superficie transversal de  $56 \text{ cm}^2$ . ¿Qué resistencia tiene  $11 \text{ km}$  de ella? La resistividad del acero es de  $3.0 \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$ .
14. Con la pendiente de la recta en la figura 29-8 estime el coeficiente promedio de resistividad con la temperatura en el caso del cobre a temperatura ambiente; compare después el resultado con el de la tabla 29-1.
15. Un alambre de  $4.0 \text{ m}$  de largo y de  $6.0 \text{ mm}$  de diámetro tiene una resistencia de  $15 \text{ m}\Omega$ . Una diferencia de potencial de  $23 \text{ V}$  se aplica entre los extremos. a) ¿Qué corriente fluye por el alambre? b) Calcule la densidad de corriente. c) Calcule la resistividad del material del alambre. ¿Puede identificarlo? (Consulte la Tabla 29-1).
16. Los devanados de cobre de un motor tienen una resistencia de  $50 \Omega$  a  $20^\circ\text{C}$  cuando está apagado. Tras funcionar el motor varias horas, la resistencia alcanza los  $58 \Omega$ . ¿Qué temperatura tienen los devanados? Desprecie el cambio en las dimensiones de los devanados (Tabla 29-1).
17. Demuestre que, si pueden ignorarse los cambios en las dimensiones de un conductor con las variaciones de temperatura, la resistencia variará con ella según  $R - R_0 = \alpha_{\text{pro}} R_0 (T - T_0)$ .
18. Una bobina se forma devanando  $250$  vueltas de un alambre aislado de cobre de calibre 8 (Ej. 6) en una sola capa, con una forma cilíndrica de  $12.2 \text{ cm}$  de radio. Calcule la resistencia de la bobina. No tenga en cuenta el espesor del aislamiento (Tabla 29-1).
19. Dos conductores están hechos del mismo material y tienen la misma longitud. El conductor  $A$  es un alambre sólido de diámetro  $D$ . El conductor  $B$  es un tubo hueco con diámetro externo  $2D$  y con diámetro interno  $D$ . Obtenga la razón de resistencia,  $R_A/R_B$ , medida entre sus dos extremos.
20. ¿Qué diámetro ha de tener un alambre de hierro para que su resistencia sea igual al otro de cobre de  $1.19 \text{ mm}$  de diámetro, teniendo ambos la misma longitud?
21. Un cable eléctrico consta de  $125$  filamentos, cada uno con una resistencia de  $2.65\text{-}\mu\Omega$ . La misma diferencia de potencial se aplica entre los extremos de los filamentos y genera una corriente total de  $750 \text{ mA}$ . a) ¿Cuál es la corriente en cada filamento? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial aplicada? c) ¿Qué resistencia tiene el cable?
22. Un alambre de cobre y otro de hierro de la misma longitud tienen una diferencia de potencial aplicada a ellos. a) ¿Cuál debe ser la razón de sus radios para que la corriente sea idéntica? b) ¿Puede hacerse que la densidad de corriente sea la misma mediante una elección apropiada de los radios?
23. Cuando una diferencia de potencial de  $115 \text{ V}$  se aplica entre los extremos de un alambre de  $9.66 \text{ m}$  de largo, la densidad de corriente es  $1.42 \text{ A/cm}^2$ . Calcule la conductividad del material del alambre.
24. En la atmósfera inferior de la Tierra existen iones positivos y negativos, creados por los elementos radiactivos del suelo y por los rayos cósmicos del espacio. En cierta región la intensidad del campo eléctrico atmosférico es de  $120 \text{ V/m}$ , dirigida verticalmente hacia abajo. Debido a este campo, los iones cargados positivamente  $620$  por  $\text{cm}^3$ , se desplazan hacia abajo y los iones cargados negativamente  $550$  por  $\text{cm}^3$ , lo hacen hacia arriba (Fig. 29-21). La conductividad medida es  $2.70 \times 10^{-14}/\Omega \cdot \text{m}$ .

Calcule a) la velocidad de deriva de los iones, suponiendo que es igual en unos y otros; y b) la densidad de corriente.

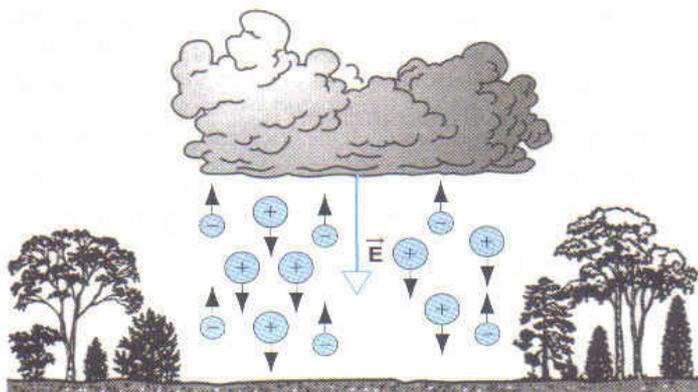


FIGURA 29-21. Ejercicio 24.

25. Se estudia la conveniencia de utilizar cobre y aluminio en una línea de transmisión de alto voltaje que debe transportar una corriente de  $62.3 \text{ A}$ . La resistencia por unidad de longitud debe ser  $0.152 \Omega/\text{km}$ . En ambos tipos de cable, calcule a) la densidad de corriente y b) la masa de  $1.00 \text{ m}$  del cable. La densidad del cobre y del aluminio es  $8960$  y  $2700 \text{ kg/m}^3$ , respectivamente.
26. Con los datos de la figura 29-7b grafique la resistencia del diodo de unión  $pn$  en función de la diferencia de potencial aplicada.
27. En un dispositivo electrónico hipotético, la diferencia de potencial  $\Delta V$ , media en él, se relaciona con la corriente  $i$  mediante  $\Delta V = (3.55 \times 10^6 \text{ V/A}^2)i^2$ . a) Determine la resistencia cuando la corriente es de  $2.40 \text{ mA}$ . b) ¿Con qué valor de la corriente es la resistencia igual a  $16.0 \Omega$ ?

### 29-5 Ley de Ohm: una perspectiva microscópica

28. Calcule el tiempo medio libre entre las colisiones de electrones de conducción en el aluminio a  $20^\circ\text{C}$ . Cada átomo de aluminio aporta tres electrones de conducción. Tome los datos necesarios de la tabla 29-1 y del apéndice D. Consulte además el problema resuelto 29-3.

### 29-6 Un aislante en un campo eléctrico

29. Una carga puntual de  $1\text{-}\mu\text{C}$  está situada en el centro de una esfera sólida de pyrex de radio  $R = 10 \text{ cm}$ . a) Calcule la intensidad del campo eléctrico  $E$  por debajo de su superficie. b) Suponiendo que no haya otras cargas libres, calcule la intensidad del campo eléctrico afuera de la superficie de la esfera pyrex c) ¿Cuál es la densidad superficial de carga inducida  $\sigma_{\text{ind}}$  en la esfera de Pyrex?
30. Dos cargas puntuales iguales pero opuestas  $+q$  y  $-q$ , están separadas por una distancia de  $10 \text{ cm}$  en el aire. ¿Qué valor de  $q$  producirá una intensidad de campo eléctrico en la mitad de las cargas que superará la intensidad dieléctrica del aire?
31. Un conductor esférico de radio  $R$  se halla en un potencial  $V$ ; suponga que  $V = 0$  en el infinito. a) ¿Qué valor mínimo de  $V$  originará una intensidad de campo eléctrico por arriba de la superficie de la esfera que rebase la intensidad dieléctrica del aire? b) ¿Es más fácil obtener una "chispa" de una bola en cierto potencial con un radio más grande o más pequeño? c) Utilice la respuesta y explique por qué los pararrayos son puntiagudos.

# PROBLEMAS

- Se le entrega a una esfera conductora aislada de 13 cm de radio. Un alambre le introduce una corriente de 1.0000020 A. Otro extrae de ella una corriente de 1.0000000 A. ¿Cuánto tardará la esfera en aumentar su potencial en 980 V?
- En una investigación hipotética sobre la fusión, se ioniza completamente el gas helio a altas temperaturas; se separa cada átomo en dos electrones libres y en el restante núcleo de carga positiva (partícula alfa). Un campo eléctrico aplicado hace que las partículas alfa se desplacen al este con una velocidad de 25 m/s, mientras los electrones lo hacen hacia el oeste, con una velocidad de 88 m/s. La densidad de las partículas alfa es de  $2.8 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ . Calcule la densidad neta de la corriente, especificando la dirección de esta última.
- Una oruga de 4.0 cm de largo se arrastra en dirección de electrones que se desplazan por un alambre desnudo de cobre de 5.2 mm de diámetro, el cual transporta una corriente de 12 A. a) Determine la diferencia de potencial entre los dos extremos de la oruga. b) ¿Es positiva o negativa su cola en relación con su cabeza? c) ¿Cuánto tiempo tardaría la oruga en arrastrarse 1.0 cm y mantener el paso de los electrones que se desplazan en el alambre?
- Un haz estable de partículas alfa ( $q = 2e$ ) que se desplaza con una energía cinética de 22.4 MeV transporta una corriente de 250 nA. a) Si se dirige perpendicularmente a una superficie plana, ¿cuántas partículas alfa chocan con ella en 2.90 s? b) En un instante, ¿cuántas partículas alfa hay en una longitud de 18.0 cm del haz? c) ¿En qué diferencia de potencial fue necesario acelerar cada partícula del reposo para que alcance una energía de 22.4 MeV?
- En los dos intersectantes anillos de almacenamiento de 950 m de circunferencia en CERN, los protones de 28.0 GeV de energía cinética formaban haces de corriente de 30.0 A cada uno. a) Determine la carga total transportada por los protones en cada anillo. Suponga que se desplazan casi con la velocidad de la luz. b) Un haz se desvía de un anillo hacia un bloque de cobre de 43.5 kg. ¿Cuánto se eleva la temperatura del bloque?
- a) La densidad de corriente en un conductor cilíndrico de radio  $R$  varía conforme a la ecuación

$$j = j_0(1 - r/R),$$

donde  $r$  es la distancia del eje. Por tanto, la densidad de corriente alcanza un máximo  $j_0$  en el eje  $r = 0$  y disminuye linealmente a cero en la superficie  $r = R$ . Calcule la corriente en función de  $j_0$  y la superficie transversal del conductor  $A = \pi R^2$ . b) Suponga que ahora la densidad de corriente alcanza a un máximo en la superficie y después disminuye linealmente a cero en el eje, de modo que

$$j = j_0 r/R,$$

Calcule la corriente. ¿Por qué es diferente de a)?

- a) ¿A qué temperatura la resistencia de un conductor de cobre duplicará su resistencia a 20°C? (Utilice esta temperatura como punto de referencia en la ecuación 29-16; compare su respuesta con la Fig. 29-8.) b) ¿Se mantiene la misma temperatura en todos los conductores de cobre, sin que importen su forma o tamaño?

- Un foco de flash común se clasifica en 310 mA y 2.90 V, los valores respectivos de la corriente y del voltaje en condiciones funcionales. Si la resistencia del filamento cuando está frío ( $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ) es de  $1.12 \Omega$ , calcule su temperatura cuando la lámpara está encendida. El filamento está hecho de tungsteno. Suponga que la ecuación 29-16 se aplica en este intervalo de temperaturas.
- Un alambre con una resistencia de  $6.0 \Omega$  se extrae de un troquel, de modo que su nueva longitud es el triple de la original. Calcule la resistencia del alambre más largo, suponiendo que la resistividad y la densidad del material no cambian durante el proceso de extracción.
- Un bloque sólido de forma rectangular, tiene una superficie transversal de  $3.50 \text{ cm}^2$ , una longitud de 15.8 cm y una resistencia de  $935 \Omega$ . El material de que está hecho tiene  $5.33 \times 10^{22}$  electrones de conducción/ $\text{m}^3$ . Se mantiene una diferencia de potencial de 35.8 V entre sus extremos. a) Determine la corriente en él. b) Suponiendo que la densidad de corriente es uniforme, ¿qué valor tiene? Calcule c) la velocidad de deriva de los electrones de conducción y d) el campo eléctrico del bloque.
- Una varilla de cierto metal mide 1.6 m de largo y tiene un diámetro de 5.5 mm. La resistencia entre sus extremos (a  $20^\circ\text{C}$ ) es  $1.09 \times 10^{-3} \Omega$ . Un disco redondo se construye con este mismo material, 2.14 cm de diámetro y 1.35 mm de espesor. a) ¿Cuál es ese material? b) ¿Cuál es la resistencia entre las caras opuestas redondas, suponiendo superficies equipotenciales?
- Cuando se calienta una varilla metálica, no sólo se modifica su resistencia, sino también su longitud y su superficie transversal. La relación  $R = \rho L/A$  indica que los tres factores han de tomarse en cuenta al medir  $\rho$  en varias temperaturas. a) Si la temperatura cambia en  $1.0^\circ\text{C}$ , ¿qué alteraciones fraccionales de  $R$ ,  $L$  y  $A$  ocurren en el conductor de cobre? b) ¿Qué conclusión se extrae de ello? El coeficiente de expansión lineal es  $1.7 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ .
- Se desea construir un conductor cilíndrico largo cuyo coeficiente de resistividad a una temperatura de  $20^\circ\text{C}$  se aproximará a cero. Si se construye ensamblando discos alternos de hierro y de carbono, obtenga la razón de espesor de un disco de carbono a la de un disco de hierro. (En el carbono,  $\rho = 3500 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  y  $\alpha = -0.50 \times 10^{-3}/^\circ\text{C}$ .)
- Un resistor presenta la forma de un cono truncado circular recto (Fig. 29-22). Los radios terminales son  $a$  y  $b$ , y la longitud es  $L$ . Si la variación gradual es pequeña, cabe suponer que la densidad de corriente es uniforme en cualquier sección transversal. a) Calcule la resistencia de este objeto. b) Demuestre que su respuesta se reduce a  $\rho L/A$  en el caso especial de una variación gradual cero ( $a = b$ ).

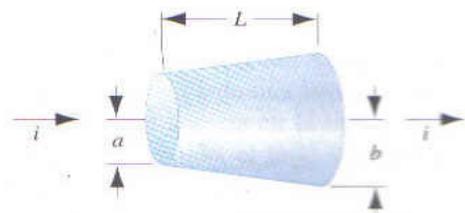


FIGURA 29-22. Problema 14.

15. Un resistor tiene la forma de un cascarón esférico, con una superficie interna de radio  $a$ , cubierta con un material conductor y una superficie externa de radio  $b$ , también cubierta con un material conductor. Suponiendo una resistividad uniforme  $\rho$ , calcule la resistencia entre las superficies conductoras.
16. Demuestre que, conforme al modelo de electrones libres de la conducción eléctrica en los metales y en la física clásica, la resistividad de los metales debería ser proporcional a  $\sqrt{T}$ , donde  $T$  es la temperatura absoluta. (Sugerencia: trate los electrones como gas ideal.)

## **P**ROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Suponga que una lámpara tiene un filamento de tungsteno que irradia energía a una rapidez proporcional a la diferencia de temperatura entre el filamento y la temperatura ambiente. Designe con  $C$  la constante de proporcionalidad. Calcule para una lámpara de 120 watts en un circuito de 120 volts, suponiendo que toda la energía transferida al filamento irradia como calor transferido al medio; suponga que la temperatura del filamento es de  $2500^{\circ}\text{C}$ .
- a) Con operaciones numéricas genere una gráfica que muestre la temperatura de equilibrio de la lámpara en función de la dife-

rencia de potencial aplicada; no olvide que la resistividad del tungsteno cambia con la temperatura. b) ¿A qué voltaje aplicado debe “quemarse” la lámpara? (Sugerencia: el filamento se derretirá si se calienta demasiado.) c) Repita el procedimiento anterior, salvo que esta vez suponga que la energía irradia de la lámpara conforme a  $k(T^4 - T_0^4)$ , donde  $k$  es una constante que debe determinar,  $T_0$  es la temperatura en kelvins y  $T$  es la temperatura del filamento, también en kelvins. Compare sus resultados.

## CAPACITANCIA

# E

*n muchas aplicaciones de los circuitos eléctricos, la meta es almacenar la carga o energía eléctrica en un campo electrostático. Se da el nombre de capacitor al dispositivo que almacena carga, y el de capacitancia a la propiedad que determina cuánta energía puede guardar. Veremos que la capacitancia depende de las propiedades geométricas del dispositivo, y no del campo eléctrico ni del potencial.*

*En este capítulo definiremos la capacitancia y demostramos cómo se calcula la capacitancia de algunos dispositivos simples y de unas combinaciones de capacitores. Estudiamos la energía almacenada en ellos y veremos cómo se relaciona con la fuerza del campo eléctrico. Por último, investigamos la forma en que la presencia de un dieléctrico en un capacitor mejora su capacidad de almacenar carga eléctrica.*

## 30-1 CAPACITORES

El capacitor\* es un dispositivo que almacena energía en un campo electrostático. Una lámpara, por ejemplo, requiere una breve ráfaga de energía eléctrica que supere la que generalmente puede obtenerse de una batería. Con relativa lentitud (en algunos segundos) un capacitor puede extraer energía de dicha batería y luego liberar la energía con mucha rapidez (en cuestión de milisegundos) a través de la lámpara. Se emplean capacitores mucho mayores para producir breves pulsos láser, con el propósito de inducir la fusión termonuclear en delgadas bolitas de hidrógeno. En este caso el nivel de potencia durante el pulso es de unos  $10^{14}$  W, aproximadamente 200 veces la capacidad de generación eléctrica en Estados Unidos; sólo que el pulso suele durar apenas  $10^{-19}$  s.

Los capacitores se emplean además para crear campos eléctricos, como el dispositivo de placas paralelas que produce el campo eléctrico casi uniforme que desvía los haces de electrones en un tubo de televisión o de un osciloscopio.

En los circuitos, se utilizan los capacitores para suavizar y eliminar las variaciones repentinas en la línea de voltaje que puedan dañar la memoria de las computadoras. En otra apli-

cación, la sintonización de un radio o receptor de televisión suele efectuarse variando la capacitancia de un circuito.

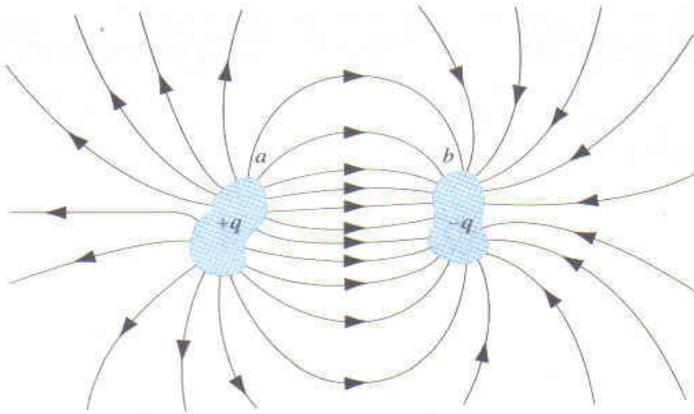
## 30-2 CAPACITANCIA

La figura 30-1 muestra un capacitor generalizado constituido por dos conductores  $a$  y  $b$  de forma arbitraria. Se les llama *placas* cualquiera que sea su geometría. Suponemos que ellos están totalmente aislados del medio. Suponemos además que por ahora los conductores están en el vacío.

Se dice que un capacitor está *cargado* si sus placas llevan cargas iguales y opuestas  $+q$  y  $-q$ . Nótese que  $q$  no es la carga neta del capacitor pues es cero. En la explicación de los capacitores dejemos que  $q$  represente el valor absoluto de la carga en cualquiera de las placas; esto es, representa una magnitud solamente y hay que especificar el signo de la carga en una placa.

Podemos "cargar" un capacitor conectando una de sus placas a la terminal positiva de una batería y la otra a la terminal negativa como se aprecia en la figura 30-2. Como veremos en el siguiente capítulo, el flujo de carga en un circuito eléctrico se asemeja al flujo de un fluido, y la batería sirve de "bomba" a la carga eléctrica. Cuando conectamos una batería al capacitor (cerrando el interruptor en el circuito), la batería

\* Véase "Capacitors" de Donald M. Trotter, hijo, *Scientific American*, julio de 1988, p. 86.

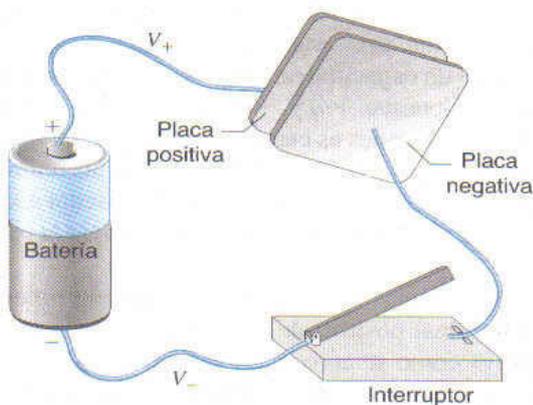


**FIGURA 30-1.** Dos conductores, aislados uno de otro y de su medio, forman un capacitor. Cuando está cargado, los conductores tienen cargas iguales, pero opuestas, de magnitud  $q$ . Se les da el nombre de *placas*, sin que importe su forma.

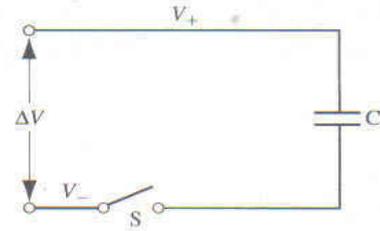
“bombea” electrones de la placa positiva (antes sin carga) del capacitor a la placa negativa. Una vez que la batería mueve una cantidad de carga de magnitud  $q$ , la de la placa positiva es  $+q$  y la de la placa negativa,  $-q$ .

Una batería ideal mantiene entre sus terminales una diferencia constante de potencial. La placa positiva y el alambre que la conectan a la terminal positiva son conductores y, por ello (en condiciones electrostáticas), han de tener el mismo potencial  $V_+$  que la terminal positiva de la batería. La placa negativa y el alambre que la conecta a la terminal negativa de la batería también son conductores; (cuando el interruptor está cerrado) deben, pues, tener el mismo potencial  $V_-$  que la terminal negativa. La diferencia de potencial  $\Delta V = V_+ - V_-$  entre las terminales es la misma que aparece entre las placas del capacitor cuando el interruptor está cerrado. Por lo regular nos referimos a ella como la diferencia de potencial a través del capacitor, es decir la diferencia de potencial entre sus placas.

En la figura 30-3 se muestra el circuito con que se carga un capacitor por medio de una batería que mantiene una diferencia de potencial constante  $\Delta V = V_+ - V_-$  entre sus terminales. En



**FIGURA 30-2.** Cuando se cierra un interruptor, el capacitor se carga a medida que la batería mueve los electrones de la placa positiva a la negativa.



**FIGURA 30-3.** Diagrama esquemático de un circuito equivalente a la figura 30-2, que muestra el capacitor  $C$ , el interruptor  $S$  y la diferencia de potencial  $\Delta V$  (suministrados por una batería que no incluye en el diagrama).

un circuito el capacitor se representa con el símbolo  $\text{|||}$ , cuyas líneas paralelas indican las dos placas del capacitor.

Cuando cargamos un capacitor, observamos que la carga  $q$  que aparece en sus placas es siempre directamente proporcional a la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre ellas:  $q \propto \Delta V$ . La *capacitancia*  $C$  es la constante de proporcionalidad necesaria para convertir la relación en una ecuación

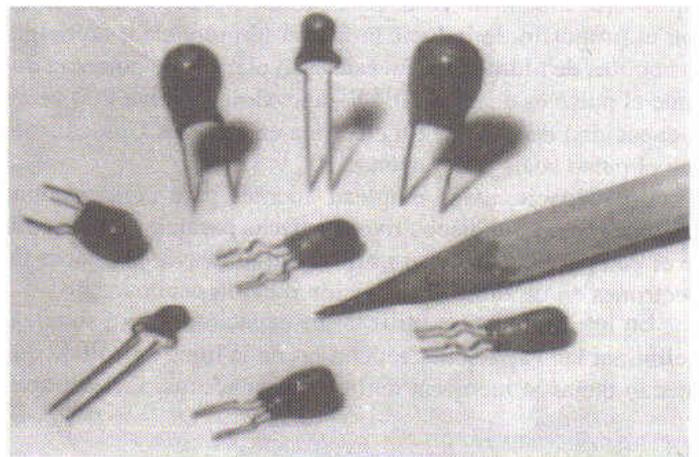
$$q = C \Delta V. \quad (30-1)$$

La capacitancia es un factor geométrico que depende del tamaño, la forma y la separación de las placas, lo mismo que del material que ocupa el espacio entre ellas (que por ahora supondremos que es un vacío). La capacitancia de un capacitor *no* depende de  $\Delta V$  ni de  $q$ .

La unidad de capacitancia en el SI que se deduce de la ecuación 30-1 es el coulomb/volt y recibe el nombre de *farad* (su abreviatura es F):

$$1 \text{ farad} = \text{coulomb/volt}.$$

La unidad se llama así en honor de Michael Faraday quien, entre otras aportaciones, propuso el concepto de la capacitancia. Los submúltiplos del farad, el *microfarad* ( $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ ) y el *picofarad* ( $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ ), son unidades más útiles en la práctica. En la figura 30-4 vemos algunos capacitores en el orden de microfarads o picofarads que pueden encontrarse en un equipo electrónico o de cómputo.



**FIGURA 30-4.** Capacitores que pueden encontrarse en los circuitos electrónicos.

**PROBLEMA RESUELTO 30-1.** Un capacitor de almacenamiento en un chip de memoria de acceso aleatorio (RAM) tiene una capacitancia de 0.055 pF. Si lo cargamos a 5.3 V, ¿cuántos electrones de exceso hay en su placa negativa?

**Solución** Si la placa negativa tiene  $N$  electrones de exceso, transporta una carga neta de magnitud  $q = Ne$ . Por medio de la ecuación 30-1 obtenemos

$$N = \frac{q}{e} = \frac{C \Delta V}{e} = \frac{(0.055 \times 10^{-12} \text{ F})(5.3 \text{ V})}{1.60 \times 10^{-19} \text{ C}} = 1.8 \times 10^6 \text{ electrones.}$$

El anterior es un número muy pequeño en el caso de los electrones. Una mota de polvo de casa, tan diminuta que nunca se asienta, contiene unos  $10^{17}$  electrones (y el mismo número de protones).

### Analogía con el flujo de fluidos (opcional)

En situaciones donde intervienen circuitos eléctricos, a menudo conviene llevar a cabo analogías entre el movimiento de la carga eléctrica y el de partículas de materiales como sucede con el flujo de fluidos. En el caso de un capacitor, puede hacerse una analogía entre un capacitor que porta una carga  $q$  y un contenedor rígido de volumen  $v$  (usamos  $v$  en vez de  $V$  para no confundir el volumen con la diferencia de potencial) que contiene  $n$  moles de un gas ideal. Conforme a la ley de gases ideales (Ec. 21-13), la presión del gas  $p$  es directamente proporcional a  $n$  para una temperatura fija.

$$n = \left( \frac{v}{RT} \right) p.$$

En el capacitor (Ec. 30-31)

$$q = C \Delta V.$$

La comparación revela que la capacitancia  $C$  del capacitor es semejante al volumen  $v$  del contenedor, suponiendo una temperatura fija del gas. De hecho, el término "capacitor" nos trae a la mente la palabra "capacidad" en el mismo sentido que el término volumen nos trae a la mente un contenedor de gas que tiene cierta "capacidad".

Podemos introducir más gas en el contenedor produciendo una presión mayor, tal como podemos hacerlo con la carga en un capacitor produciendo un voltaje más elevado. Adviértase que la cantidad de carga tiene un límite que puede introducirse en un capacitor, lo mismo que la masa de gas que puede colocarse en un contenedor. Los límites corresponden a la ruptura eléctrica (intensidad dieléctrica) en el capacitor y al rompimiento de las paredes del contenedor. ■

## 30-3 CÁLCULO DE LA CAPACITANCIA

En esta sección nos proponemos calcular la capacitancia de un capacitor a partir de su geometría. Esto lo realizamos por medio del siguiente procedimiento: 1) primero obtenemos el campo eléctrico en la región entre las placas, aplicando méto-

dos como los descritos en la sección 26-4. 2) Después nos servimos de la ecuación 28-15 para determinar la diferencia de potencial entre las placas positiva y negativa, integrando el campo eléctrico a lo largo de una trayectoria adecuada que las conecte:

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (30-2)$$

3) El resultado de la ecuación anterior incluirá la magnitud de la carga  $q$  en el lado derecho. Con la ecuación 30-1 podemos encontrar después  $C = q/\Delta V$ .

Tal como lo hemos definido,  $\Delta V$  es un número positivo. La capacitancia  $C$  siempre será positiva, pues  $q$  es una magnitud absoluta.

A continuación explicamos este método con varios ejemplos.

### Capacitor de placas paralelas

La figura 30-5 muestra un capacitor donde las dos placas planas son muy grandes y están muy cerca una de otra, es decir, la separación  $d$  es mucho menor que la longitud o el ancho de ellas. Podemos prescindir del efecto de los bordes del campo eléctrico que ocurren cerca de los bordes de las placas y suponer que este campo eléctrico tiene la misma magnitud y dirección en todo el volumen entre las placas.

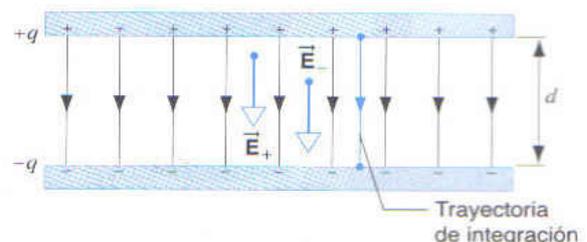
En la sección 26-4 obtuvimos el campo eléctrico de un disco grande con carga uniforme en los puntos cercanos a su centro:  $E = \sigma/2\epsilon_0$ . Si las placas del capacitor son muy grandes, su forma carece de importancia y podemos suponer que el campo eléctrico generado por ellas presenta esta magnitud. El campo eléctrico neto es la suma de los campos generados por las dos placas  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ . Como se observa en la figura 30-5, los producidos por las placas positiva y negativa siguen la misma dirección; así que podemos escribir

$$E = E_+ + E_- = \sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0. \quad (30-3)$$

Al emplear  $\sigma = q/A$ , donde  $A$  es el área superficial de cada placa, y al sustituir la ecuación 30-3 en la ecuación 30-2, obtenemos

$$\Delta V = \int_+^- E ds = \frac{q}{\epsilon_0 A} \int_+^- ds = \frac{qd}{\epsilon_0 A}, \quad (30-4)$$

donde hemos escogido una trayectoria de integración a lo largo de una de las líneas del campo eléctrico, de modo que  $\vec{E}$  y  $d\vec{s}$  son paralelos (Fig. 30-5).



**FIGURA 30-5.** Capacitor de placas paralelas. Se muestra la trayectoria de integración con que se calcula la ecuación 30-4.

Entonces la capacitancia se obtiene de la figura 30-1:  $C = q/\Delta V$ , o sea

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (\text{capacitor de placas paralelas}). \quad (30-5)$$

En la ecuación anterior entendemos por qué se dice que la capacitancia depende de factores geométricos, en este caso la separación  $d$  de las placas y la superficie  $A$ . La capacitancia no depende de la diferencia de voltaje entre ellas ni de la carga que transportan.

Nótese que el lado derecho de la ecuación 30-5 tiene la forma de  $\epsilon_0$  multiplicada por la dimensión de longitud ( $A/d$ ). Nos damos cuenta de que todas las expresiones de capacitancia presentan esencialmente esa misma forma, lo cual significa que las unidades de  $\epsilon_0$  pueden expresarse como la capacitancia dividida entre la longitud:

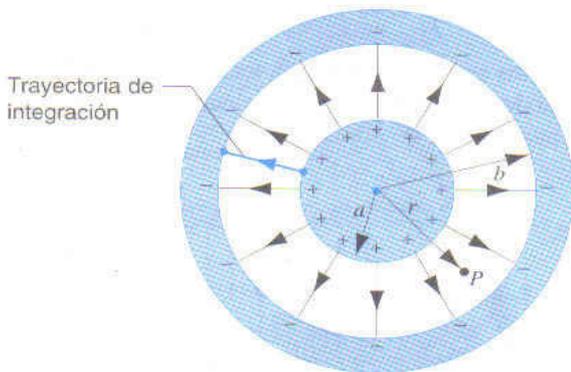
$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} = 8.85 \text{ pF/m}.$$

Estas unidades de  $\epsilon_0$  a menudo son más útiles en los cálculos que las unidades anteriores (y equivalentes) de  $\text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ .

## Un capacitor esférico

En la figura 30-6 se muestra una sección transversal de un capacitor esférico, donde el conductor interno es una esfera sólida de radio  $a$  y el conductor externo un cascarón esférico hueco de radio interno  $b$ . Suponemos que la esfera interna transporta una carga  $+q$  y que la externa tiene una carga  $-q$ . El análisis de los conductores que cumplen la ley de Gauss (Sec. 27-6) indica que la carga en el conductor interno se halla en su superficie y que la del conductor externo está en su superficie interna. (Dibuja una superficie gaussiana de radio un poco mayor que  $b$ ; la superficie se encuentra enteramente en el conductor externo, de modo que  $E = 0$  en toda la superficie y que el flujo que pasa por esa es cero. En consecuencia, la superficie no encierra carga neta alguna, como se aprecia en la Fig. 30-6.)

En la región  $a < r < b$ , usamos la ley de Gauss para determinar que, en la región situada entre los conductores, el campo eléctrico depende exclusivamente de la carga de la es-



**FIGURA 30-6.** Sección transversal de un capacitor esférico o cilíndrico. El campo eléctrico en cualquier punto  $P$  de su interior se debe al conductor interno exclusivamente. Se muestra la trayectoria de integración con que se evalúa la ecuación 30-7 o la ecuación 30-10.

fera interna y que este campo es igual al de una carga puntual en su centro (recuérdese el teorema de la capa comentado en la Sec. 27-5). Así pues, tenemos

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad a < r < b. \quad (30-6)$$

Al sustituir el campo eléctrico por esta expresión en la ecuación 30-2 y al integrar a lo largo de la trayectoria de la figura 30-6 de la placa positiva a la negativa, obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}. \end{aligned} \quad (30-7)$$

Puesto que la trayectoria de integración sigue la dirección radial, tenemos  $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds$  y  $ds = dr$ .

Con el uso de  $C = q/\Delta V$  encontramos ahora

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad (\text{capacitor esférico}). \quad (30-8)$$

Nótese que una vez más la capacitancia tiene la forma de  $\epsilon_0$  multiplicada por una cantidad con la dimensión de longitud.

## Un capacitor cilíndrico

La figura 30-6 puede representar también la sección transversal de un capacitor cilíndrico donde el conductor interno es una varilla sólida de radio  $a$  que lleva una carga  $+q$  uniformemente distribuida en su superficie; el conductor externo es un cascarón cilíndrico coaxial de radio  $b$  que lleva una carga de  $-q$  distribuida uniformemente a través de su superficie interna. El capacitor tiene una longitud  $L$  y suponemos que  $L \gg b$ , de modo que como en el caso del capacitor de placas paralelas, podemos prescindir del campo de bordes en los extremos del capacitor.

Del mismo modo que utilizamos la ley de Gauss con la geometría esférica para deducir los dos teoremas de cascarones, podemos conseguir dos resultados semejantes con la geometría esférica. Si sólo contásemos con el conductor externo cilíndrico de carga uniforme, podríamos construir una superficie gaussiana con la forma de un cilindro largo de radio  $r < b$  que tenga el mismo eje que el cilindro externo. Esta superficie no encierra carga neta; así, concluimos que  $E = 0$  en toda la superficie gaussiana. Como en el caso del cascarón esférico, un cascarón cilíndrico uniformemente cargado no produce campo eléctrico alguno en su interior. Si nos servimos de una superficie cilíndrica gaussiana con  $r > a$ , podemos inferir que el cilindro interno se comporta igual que una línea uniforme de carga, donde los puntos del campo irradian del eje y tiene una longitud que se calculó en la sección 26-4 (Ec. 26-17):

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{Lr} \quad a < r < b, \quad (30-9)$$

donde hemos reemplazado la densidad de carga lineal  $\lambda$  por  $q/L$  y la distancia  $y$  por la coordenada radial  $r$ . Ahora la ecuación 30-2 nos da

$$\Delta V = \int_+^- E ds = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_a^b \frac{dr}{r} \\ = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (30-10)$$

Como lo hicimos con el capacitor esférico, hemos escogido una trayectoria de integración que va de la placa positiva a la negativa en dirección radial; así que  $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds$  y  $ds = dr$ . Ahora la ecuación 30-1 nos da la capacitancia:

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} \quad (\text{capacitor cilíndrico}). \quad (30-11)$$

Nótese una vez más que sólo aparecen factores geométricos en esta ecuación y que la capacitancia tiene la forma de  $\epsilon_0$  multiplicada por una cantidad con la dimensión de longitud.

**PROBLEMA RESUELTO 30-2.** Una distancia  $d = 1.0$  mm separa las placas de un capacitor de placas paralelas. ¿Cuál debe ser la superficie de ellas para que el capacitor tenga capacitancia de 1.0 F?

**Solución** Con base en la ecuación 30-5 tenemos

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1.0 \text{ F})(1.0 \times 10^{-3} \text{ m})}{8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}} = 1.1 \times 10^8 \text{ m}^2.$$

Es la superficie de un cuadrado con más de 10 km de lado. El farad es efectivamente una unidad grande. No obstante, la tecnología moderna permite construir capacitores de 1-F de tamaño pequeño. Estos "supercapacitores" sirven de fuentes de voltaje de respaldo para las computadoras: pueden mantener la memoria hasta 30 días en caso de fallas eléctricas.

**PROBLEMA RESUELTO 30-3.** El espacio entre los conductores de un largo cable coaxial, que sirve para transmitir señales de video, posee un radio interno  $a = 0.15$  mm, y un radio externo  $b = 2.1$  mm. ¿Cuál es su capacitancia por unidad de longitud?

**Solución** De acuerdo con la ecuación 30-11 tenemos

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} = \frac{(2\pi)(8.85 \text{ pF/m})}{\ln(2.1 \text{ mm}/0.15 \text{ mm})} = 21 \text{ pF/m}.$$

**PROBLEMA RESUELTO 30-4.** ¿Cuál es la capacitancia de la Tierra, vista como una esfera conductora aislada de radio  $R = 6370$  km?

**Solución** Podemos asignarle una capacitancia a un conductor esférico aislado suponiendo que la "placa faltante" es una esfera conductora de radio infinito.

Si suponemos que  $b \rightarrow \infty$  en la ecuación 30-8 y si sustituimos  $a$  por  $R$ , encontraremos

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (\text{esfera aislada}) \quad (30-12)$$

Al efectuar la sustitución obtenemos

$$C = (4\pi)(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(6.37 \times 10^6 \text{ m}) \\ = 7.1 \times 10^{-4} \text{ F} = 710 \mu\text{F}.$$

Un supercapacitor diminuto de 1 F tiene una capacitancia aproximadamente 1400 veces mayor que la de la Tierra.

## 30-4 CAPACITORES EN SERIE Y EN PARALELO

Al analizar los circuitos eléctricos, a menudo conviene conocer la *capacitancia equivalente* de dos o más capacitores que están conectados de cierta manera. Por "capacitancia equivalente" entendemos la de un capacitor individual que puede sustituir a la combinación, sin modificar el funcionamiento en el resto del circuito.

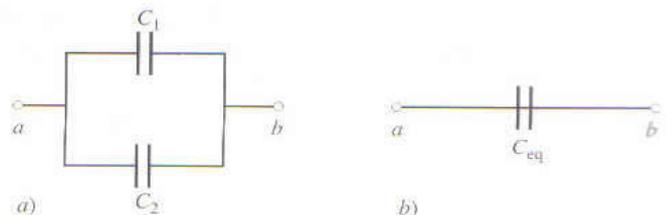
### Capacitores conectados en paralelo

La figura 30-7a, muestra dos capacitores conectados *en paralelo*. Tres propiedades caracterizan a este tipo de conexión de los elementos de un circuito. 1) Al pasar de  $a$  a  $b$ , podemos tomar varias (dos en este caso) trayectorias *paralelas*, todas las cuales atraviesan *sólo uno* de los elementos paralelos. 2) Cuando una batería de diferencia de potencial  $\Delta V$  está conectada en la combinación (es decir, una terminal de la batería se conecta a un punto  $a$  de la Fig. 30-7a y la otra al punto  $b$ ), la misma diferencia de potencial  $\Delta V$  aparece en todos los elementos de la conexión en paralelo. Los alambres y las placas del capacitor son conductores y, en consecuencia, equipotenciales en condiciones electrostáticas. El potencial en  $a$  aparece en los alambres conectados a  $a$  y en las dos placas de capacitores de la izquierda; asimismo el potencial en  $b$  aparece en todos los alambres conectados a  $b$  y en las dos placas de capacitores de la derecha. 3) Los elementos comparten la carga total que suministra la batería a la combinación; parte de ella "es bombeada" hacia arriba por los extremos de la batería hacia  $C_1$  y parte hacia  $C_2$ .

Teniendo presentes los principios anteriores, ahora podemos encontrar la capacitancia equivalente  $C_{\text{eq}}$  que produce la capacitancia total entre los puntos  $a$  y  $b$ , como se ve en la figura 30-7b. Suponemos que una batería con una diferencia de potencial  $\Delta V$  está conectada entre los puntos  $a$  y  $b$ . En cada capacitor podemos escribir (usando la Ec. 30-1)

$$q_1 = C_1 \Delta V \quad \text{y} \quad q_2 = C_2 \Delta V. \quad (30-13)$$

Al escribir las ecuaciones anteriores nos hemos servido del mismo valor de la diferencia de potencial en los capacitores, atendiendo a la segunda característica antes mencionada respecto a la conexión en paralelo. La batería extrae la carga  $q$  de un lado del circuito y la lleva al otro. Esa carga se comparte entre los dos elementos en conformidad con la tercera ca-



**FIGURA 30-7.** a) Dos capacitores en paralelo. b) Capacitancia equivalente que puede sustituir la combinación en paralelo.

racterística, de manera que la suma de las cargas en los dos capacitores es igual a la carga total:

$$q = q_1 + q_2. \quad (30-14)$$

Si la combinación en paralelo fuera reemplazada por un solo capacitor  $C_{\text{eq}}$  y conectado a la misma batería, el requisito de que el circuito opera en forma idéntica significa que la misma carga  $q$  ha de ser transferida por la batería. Dicho de otra manera, para el capacitor equivalente,

$$q = C_{\text{eq}} \Delta V. \quad (30-15)$$

Al sustituir la ecuación 30-14 en la ecuación 30-15 y luego al introducir 30-13 en el resultado, obtenemos

$$C_{\text{eq}} \Delta V = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V$$

o bien

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2. \quad (30-16)$$

Si tenemos más de dos capacitores en paralelo, podemos reemplazar primero  $C_1$  y  $C_2$  por su equivalente  $C_{12}$ , obtenido a partir de la ecuación 30-16. Después encontramos la capacitancia de  $C_{12}$  y el siguiente capacitor en paralelo  $C_3$ . Continuado el proceso ampliamos la ecuación 30-16 a cualquier número de capacitores conectados en paralelo:

$$C_{\text{eq}} = \sum_n C_n \quad (\text{combinación en paralelo}). \quad (30-17)$$

En otras palabras, para obtener la capacitancia equivalente de una combinación en paralelo, basta sumar las capacitancias individuales. Adviértase que la capacitancia equivalente siempre es mayor que la más grande de la combinación en paralelo. Ésta puede almacenar más energía que cualquier capacitor individual de la combinación.

### Capacitores conectados en serie

La figura 30-8 contiene dos capacitores conectados *en serie*. Tres propiedades caracterizan a una conexión en serie de los elementos de un circuito. 1) Si intentamos pasar de  $a$  a  $b$ , hay que cruzar *todos* los elementos del circuito *en sucesión*. 2) Cuando se conecta una batería a los extremos de la combinación, su diferencia de potencial  $\Delta V$  es igual a la suma de las diferencias de potencia en todos los extremos de todos los elementos. 3) La carga  $q$  suministrada a cada elemento de la combinación en serie tiene el mismo valor.

Para entender esta última propiedad observe la región de la figura 30-8 delimitada por la línea punteada. Supongamos que la batería coloca una carga  $-q$  en la placa izquierda de  $C_1$ . Como un capacitor tiene cargas iguales y opuestas en sus placas, una carga  $+q$  aparece en la placa izquierda de  $C_1$ . Sin embargo, el conductor de forma **H**, delimitado por la línea punteada, está eléctricamente aislado del resto del circuito; al inicio no lleva carga neta alguna y tampoco se le transfiere carga. Si una carga  $+q$

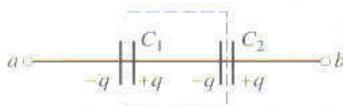


FIGURA 30-8. Combinación en serie de dos capacitores.

aparece en la placa derecha de  $C_1$ , una carga  $-q$  ha de aparecer en la placa izquierda de  $C_2$ . Es decir,  $n$  ( $= q/e$ ) electrones pasan de la placa derecha de  $C_1$  a la placa izquierda de  $C_2$ . En caso que hubiese más de dos capacitores en serie, podría hacerse un argumento semejante en la línea entera de capacitores; el resultado sería que la placa izquierda de *todos* los capacitores en la conexión en serie tendrían una carga  $q$  de un signo y la placa derecha de *todos* los capacitores en la conexión en serie tendría una carga de igual magnitud  $q$  y de signo opuesto.

Con el uso de la ecuación 30-1, en el caso de los capacitores individuales podemos escribir

$$\Delta V_1 = \frac{q}{C_1} \quad \text{y} \quad \Delta V_2 = \frac{q}{C_2}, \quad (30-18)$$

con la misma carga  $q$  en cada capacitor, pero con diferentes diferencias de potencial en ellos. Conforme a la segunda propiedad de una conexión en serie, tenemos

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2. \quad (30-19)$$

Buscamos la capacitancia equivalente  $C_{\text{eq}}$  que reemplace la combinación, de manera que la batería proporcione la misma cantidad de carga:

$$\Delta V = \frac{q}{C_{\text{eq}}}. \quad (30-20)$$

Al sustituir la ecuación 30-19 en la ecuación 30-20 y al emplear luego las ecuaciones 30-18, obtenemos

$$\frac{q}{C_{\text{eq}}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2},$$

o

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (30-21)$$

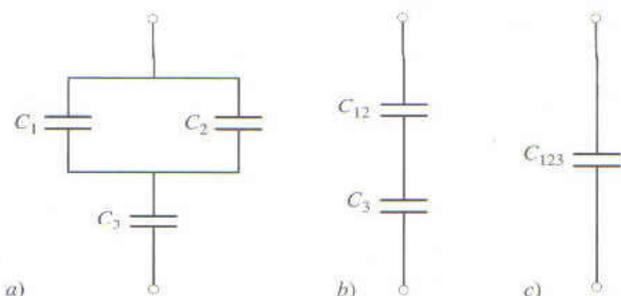
Si hay varios capacitores en serie, podremos servimos de la ecuación anterior para determinar la capacitancia equivalente de  $C_{12}$  los dos primeros. Después encontramos la de  $C_{12}$  y el siguiente capacitor en serie,  $C_3$ . Continuando de esta manera, encontraremos la capacitancia equivalente de cualquier número de capacitores en serie,

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_n \frac{1}{C_n} \quad (\text{combinación en serie}). \quad (30-22)$$

Es decir, si queremos obtener la capacitancia equivalente de una combinación en serie, tomaremos el recíproco de la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. Nótese que en estos casos la capacitancia equivalente siempre es menor que la capacitancia más pequeña en la serie.

En ocasiones los capacitores están conectados de modo que no se identifican de inmediato como una combinación en serie o en paralelo. Como veremos en el problema resuelto 30-5, a menudo tales combinaciones (pero no siempre) pueden dividirse en unidades más pequeñas, susceptibles de analizarse como conexiones en serie o en paralelo.

**PROBLEMA RESUELTO 30-5.** a) Determine la capacitancia equivalente de la combinación de la figura 30-9a, con  $C_1 = 12.0 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 5.3 \mu\text{F}$  y  $C_3 = 4.5 \mu\text{F}$ . b) Una diferencia de potencial  $\Delta V = 12.5 \text{ V}$



**FIGURA 30-9.** Problema resuelto 30-5. a) Combinación de tres capacitores. b) La combinación en paralelo de  $C_1$  y  $C_2$  ha sido sustituida por su equivalente,  $C_{12}$ . c) La combinación en serie de  $C_{12}$  y  $C_3$  ha sido reemplazada por su equivalente  $C_{123}$ .

se aplica a las terminales en la figura 30-9a. ¿Qué carga se tendrá en  $C_1$ ?

**Solución** a) Los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  están en paralelo. Conforme a la ecuación 30-16 su capacitancia equivalente es

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 12.0 \mu\text{F} + 5.3 \mu\text{F} = 17.3 \mu\text{F}.$$

En la figura 30-9b,  $C_1$  y  $C_2$  han sido reemplazados con su combinación en paralelo,  $C_{12}$ . Como se aprecia en la figura  $C_{12}$  y  $C_3$  están en serie. A partir de la ecuación 30-21, la combinación equivalente final (Fig. 30-9c) se obtiene de

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{17.3 \mu\text{F}} + \frac{1}{4.5 \mu\text{F}} = 0.280 \mu\text{F}^{-1},$$

o bien de

$$C_{123} = \frac{1}{0.280 \mu\text{F}^{-1}} = 3.57 \mu\text{F}.$$

b) Tratamos los capacitores equivalentes  $C_{12}$  y  $C_{123}$  exactamente como si fueran capacitores reales que tuvieran esa capacitancia. La carga en  $C_{123}$  de la figura 30-9c será entonces

$$q_{123} = C_{123} \Delta V = (3.57 \mu\text{F})(12.5 \text{ V}) = 44.6 \mu\text{C}.$$

La misma carga existe en todos los capacitores de la combinación en serie de la figura 30-9b. Así pues, en ella la diferencia de potencial a través de  $C_{12}$  es

$$\Delta V_{12} = \frac{q_{12}}{C_{12}} = \frac{44.6 \mu\text{C}}{17.3 \mu\text{F}} = 2.58 \text{ V}.$$

Esta misma diferencia de potencial aparece en  $C_1$  de la figura 30-9a, de modo que

$$q_1 = C_1 \Delta V_1 = (12 \mu\text{F})(2.58 \text{ V}) = 31 \mu\text{C}.$$

## 30-5 ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA EN UN CAMPO ELÉCTRICO

Un uso importante de los capacitores consiste en almacenar energía electrostática en aplicaciones que incluyen desde linternas hasta sistemas láser (Fig. 30-10); ambos se basan en la carga y descarga de los capacitores.

En la sección 28-2 demostramos que cualquier configuración de carga tiene cierta *energía potencial eléctrica*  $U$ ,



**FIGURA 30-10.** Este banco de 10,000 capacitores en el Lawrence Livermore National Laboratory almacena 60 MJ de energía eléctrica y la libera en 1 ms a lámparas de destello que activan un sistema de láseres. La instalación forma parte del proyecto Nova, que intenta producir reacciones sostenidas de fusión nuclear.

igual al trabajo  $W$  (que puede ser positivo o negativo) efectuado por un agente externo que produce la configuración de carga de sus componentes individuales; inicialmente se supone que se encuentran muy lejos y en reposo. Esta energía potencial se parece a la de los sistemas mecánicos; por ejemplo, un resorte comprimido o el sistema Tierra-Luna.

He aquí un ejemplo simple: se realiza trabajo cuando separamos dos cargas iguales y opuestas. La energía se almacena en forma de energía potencial eléctrica dentro del sistema; puede recobrase como energía cinética si se permite que las cargas vuelvan a reunirse. De modo similar, un capacitor cargado tiene guardada una energía potencial eléctrica  $U$  igual al trabajo  $W$  efectuado por el agente externo al cargar al capacitor. Esa energía se recupera si se permite que el capacitor se descargue. Otra forma de visualizar el trabajo de cargar un capacitor consiste en imaginar que un agente externo extrae electrones de la placa positiva y los lleva a la placa negativa, produciendo con ello una separación de carga. Normalmente, el trabajo de cargar lo hace una batería a costa de su depósito de energía química.

Supóngase que en el tiempo  $t$  una carga  $q'$  ha sido transferida de una placa a otra. La diferencia de potencial  $\Delta V'$  en-

tre las placas en ese momento es  $\Delta V' = q'/C$ . Si ahora se transfiere un elemento diferencial de carga  $dq'$ , según la ecuación 28-9 ( $\Delta V = \Delta U/q_0$ ), el correspondiente cambio resultante  $dU$  en la energía potencial eléctrica es

$$dU = \Delta V' dq' = \frac{q'}{C} dq'.$$

Si el proceso continúa hasta que se transfiere una carga total  $q$ , la energía potencial total es

$$U = \int dU = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' \quad (30-23)$$

o bien

$$U = \frac{q^2}{2C}. \quad (30-24)$$

Con base en la relación  $q = C \Delta V$ , la expresión anterior también puede escribirse así

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad (30-25)$$

¿Dónde se encuentra esta energía? Las ecuaciones 30-24 y 30-25 no nos dan una respuesta directa, pero podemos determinar el sitio de la energía almacenada razonando en los siguientes términos. Supóngase que tenemos un capacitor aislado de placas paralelas (es decir, no conectado a una batería) que tiene la carga  $q$ . Sin modificar  $q$ , separamos las placas hasta que su separación sea el doble de la que había al inicio. De acuerdo con la ecuación 30-5, si la separación  $d$  es del doble, la capacitancia alcanza apenas la mitad del tamaño. La ecuación 30-24 indica que se duplicará la energía almacenada, si  $C$  adquiere este tamaño. Al separar las placas no modificamos las placas del capacitor; por tanto, no sería razonable concluir que allí se guarda energía adicional. Lo que hicimos fue duplicar el volumen del espacio entre ellas; y como la energía también se duplica, parece razonable concluir que esta energía potencial eléctrica está en el volumen entre las placas. Más concretamente, la energía se almacena en el campo eléctrico que está en esa región.

En un capacitor de placas paralelas, despreciando el efecto de los bordes, el campo eléctrico posee el mismo valor en todos los puntos entre las placas. Basándonos en la conclusión de que la energía se halla en el campo, se deduce que la densidad de energía  $u$ —o sea la energía almacenada por unidad de volumen—, también debe ser la misma en todas las partes de las placas;  $u$  está dada por la energía almacenada  $U$ , dividida entre el volumen  $Ad$ , o sea

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2} C (\Delta V)^2}{Ad}. \quad (30-26)$$

Al sustituir la relación  $C = \epsilon_0 A/d$  (Ec. 30-5), se obtiene

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{\Delta V}{d} \right)^2. \quad (30-27)$$

Sin embargo,  $\Delta V/d$  es el campo eléctrico  $E$ ; así que

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad (30-28)$$

La ecuación anterior es, en general, verdadera aunque la obtuvimos en el caso especial de un capacitor de placas paralelas. Si un campo eléctrico  $\vec{E}$  existe en cualquier punto del espacio vacío (en un vacío), podemos considerar este último como el sitio donde está la energía almacenada en la cantidad por unidad de volumen de  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ .

En términos generales,  $E$  varía con la posición  $y$ , por lo mismo,  $u$  es una función de las coordenadas. En el caso especial del capacitor de placas paralelas,  $E$  y  $u$  no varían con la posición en la región entre las placas.

**PROBLEMA RESUELTO 30-6.** Por medio de una batería, se carga un capacitor  $C_1$  de  $3.55\text{-}\mu\text{F}$  hasta que alcanza una diferencia de potencial  $\Delta V_0 = 6.30\text{ V}$ . Después se quita la batería y, como se indica en la figura 30-11, se conecta el capacitor a otro capacitor descargado  $C_2$  de  $8.95\text{-}\mu\text{F}$ . Una vez cerrado el interruptor  $S$ , una carga fluye de  $C_1$  a  $C_2$  hasta que se logra el equilibrio, con ambos capacitores a la misma diferencia de potencial  $\Delta V$ . a) ¿Cuál es la diferencia de potencial común? b) ¿Cuál es la energía almacenada en el campo eléctrico antes y después de cerrar el interruptor en la figura 30-11?

**Solución** a) La carga eléctrica se conserva y los dos capacitores comparten la original  $q_0$ , o

$$q_0 = q_1 + q_2.$$

Se aplica la relación  $q = C \Delta V$  en ambos términos y se obtiene

$$C_1 \Delta V_0 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V,$$

o bien

$$\Delta V = \Delta V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{(6.30\text{ V})(3.55\ \mu\text{F})}{3.55\ \mu\text{F} + 8.95\ \mu\text{F}} = 1.79\text{ V}.$$

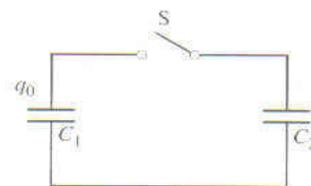
Si conocemos el voltaje de la batería  $\Delta V_0$  y el valor de  $C_1$  es posible determinar una capacitancia desconocida  $C_2$  midiendo el valor de  $\Delta V$  en un arreglo semejante al de la figura 30-11.

b) La energía inicial almacenada es

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2} C_1 (\Delta V_0)^2 = \frac{1}{2} (3.55 \times 10^{-6}\text{ F})(6.30\text{ V})^2 \\ &= 7.05 \times 10^{-5}\text{ J} = 70.5\ \mu\text{J}. \end{aligned}$$

La energía final es

$$\begin{aligned} U_f &= \frac{1}{2} C_1 (\Delta V)^2 + \frac{1}{2} C_2 (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) (\Delta V)^2 \\ &= \frac{1}{2} (3.55 \times 10^{-6}\text{ F} + 8.95 \times 10^{-6}\text{ F})(1.79\text{ V})^2 \\ &= 2.00 \times 10^{-5}\text{ J} = 20.0\ \mu\text{J}. \end{aligned}$$



**FIGURA 30-11.** Problema resuelto 30-6. Previamente se cargó el capacitor  $C_1$  hasta alcanzar la diferencia de potencial  $\Delta V_0$  mediante una batería que se eliminó. Cuando se cierra el interruptor  $S$ , la carga inicial  $q_0$  en  $C_1$  se comparte con  $C_2$ .

Concluimos que  $U_f < U_i$  en 72% aproximadamente. Con esto no se viola la conservación de energía. La energía "faltante" aparece como energía térmica en los alambres conectores, según veremos en el siguiente capítulo.\*

**PROBLEMA RESUELTO 30-7.** Una esfera conductora aislada cuyo radio  $R$  mide 6.85 cm, tiene una carga  $q = 1.25$  nC. a) ¿Cuánta energía se almacena en su campo eléctrico? b) ¿Qué densidad de energía tiene la superficie de la esfera? c) ¿Cuál es el radio  $R_0$  de una superficie esférica imaginaria tal que una mitad de la energía potencial almacenada esté en su interior?

**Solución** a) Con base en las ecuaciones 30-24 y 30-12 tenemos

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{(1.25 \times 10^{-9} \text{ C})^2}{(8\pi)(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(0.0685 \text{ m})} = 1.03 \times 10^{-7} \text{ J} = 103 \text{ nJ}.$$

b) Para calcular la densidad de energía hay que encontrar primero  $E$  en la superficie de la esfera. Esta cantidad está dada por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}.$$

Entonces, empleando la ecuación 30-28, la densidad de energía será

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4} \\ &= \frac{(1.25 \times 10^{-9} \text{ C})^2}{(32\pi^2)(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.0685 \text{ m})^4} \\ &= 2.54 \times 10^{-5} \text{ J/m}^3 = 25.4 \mu\text{J/m}^3. \end{aligned}$$

c) La energía que se halla en un cascarón esférico entre los radios  $r$  y  $r + dr$  es

$$dU = (u)(4\pi r^2)(dr),$$

donde  $(4\pi r^2)(dr)$  es el volumen del cascarón esférico. Si usamos el resultado de la parte b) con la densidad de energía evaluada en el radio  $r$ , obtenemos

$$dU = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}.$$

La condición dada en este problema es

$$\int_R^{R_0} dU = \frac{1}{2} \int_R^\infty dU$$

o, utilizando el resultado obtenido antes para  $dU$  y cancelando los factores constantes en ambos lados,

$$\int_R^{R_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2},$$

que se convierte en

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{2R}.$$

Resolviendo para  $R_0$  obtenemos

$$R_0 = 2R = (2)(6.85 \text{ cm}) = 13.7 \text{ cm}.$$

\* Una parte pequeña de la energía también se irradia y se pierde. Una exposición más rigurosa se da en "Two-Capacitor Problem: A More Realistic View", de R. A. Powell, *American Journal of Physics*, mayo de 1979, p. 460.

La mitad de la energía almacenada está contenida dentro de la superficie esférica cuyo radio es el doble del de la esfera conductora.

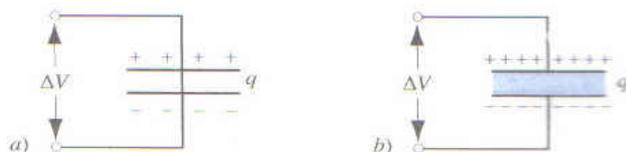
## 30-6 CAPACITOR CON DIELECTRICO

En la sección 29-6 hemos explicado el efecto de aplicar un campo eléctrico a un material aislante (un dieléctrico). Demostramos que consiste en reducir la intensidad del campo en su interior de su valor inicial  $E_0$  en el vacío a  $E = E_0/\kappa_e$  dentro del dieléctrico. El parámetro  $\kappa_e$ , la constante dieléctrica, posee valores mayores que 1 en todos los materiales; así que el campo eléctrico en el dieléctrico es menor que el del vacío.

En la presente sección vamos a examinar el efecto de llenar el interior de un capacitor con un material dieléctrico. Este efecto lo investigó por primera vez Michael Faraday en 1837. Construyó dos capacitores idénticos, llenando uno con un material dieléctrico y dejando el otro con aire entre las placas. Cuando los conectó a baterías con la misma diferencia de potencial, descubrió que la carga en un capacitor lleno con el dieléctrico era mayor que la del que tenía aire entre las placas. Es decir, la presencia del dieléctrico le permite guardar más carga. Como el almacenarla para descarga posterior es uno de los propósitos del uso de capacitores, su presencia mejora el desempeño del capacitor.

El efecto de llenar un capacitor con dieléctrico depende de que lo hagamos con la batería conectada (como en el experimento de Faraday) o desconectada. Consideremos primero la situación del experimento de Faraday (Fig. 30-12). Un capacitor con una capacitancia  $C$  está conectado a una batería de diferencia de potencial  $\Delta V$  y se permite que se cargue por completo, de modo que las placas contengan una carga  $q$ , como se muestra en la figura 30-12a. Con la batería conectada, llenamos entonces el interior del capacitor con un material de constante dieléctrica  $\kappa_e$ , como se ve en la figura 30-12b. La batería conserva la misma diferencia de potencial  $\Delta V$  en las placas.

En la ecuación 30-2 se muestra que, si las diferencias de potencial en las figuras 30-12a y 30-12b son iguales, los campos eléctricos dentro del capacitor han de ser idénticos. Sin embargo, cabría esperar la presencia del dieléctrico para reducir la intensidad del campo eléctrico. Como concluyó Faraday, la



**FIGURA 30-12.** a) Se carga un capacitor vacío conectándolo a una batería que genere una diferencia de potencial  $\Delta V$ . b) La batería permanece conectada mientras el capacitor se llena con un dieléctrico. En este caso, la diferencia  $\Delta V$  permanece constante pero  $q$  aumenta.

tendencia del dieléctrico a disminuir el campo se ve balanceada por la carga adicional que la batería suministra a las placas cuando se inserta el dieléctrico.

Supongamos que estamos utilizando un capacitor de placas paralelas. Con el capacitor vacío, el campo eléctrico está dado por la ecuación 30-3:  $E = \sigma/\epsilon_0 = q/\epsilon_0 A$ . Cuando el dieléctrico está presente, el factor  $1/\kappa_e$  aminora al campo eléctrico debido a su presencia, pero también el campo cambia porque ahora las placas llevan la carga  $q'$ , de modo que el campo es  $E' = q'/\kappa_e \epsilon_0 A$ . Puesto que los campos han de ser iguales, podemos hacer  $E' = E$  y concluir que

$$q' = \kappa_e q. \quad (30-29)$$

La constante dieléctrica es mayor que 1 y, por ello, el capacitor puede almacenar más carga con el dieléctrico presente que cuando está vacío. A medida que el material dieléctrico se introduce en el capacitor ya cargado, la batería traslada más carga  $q' - q = q(\kappa_e - 1)$  de la placa positiva a la negativa.

La capacitancia con el dieléctrico presente es  $C' = q'/\Delta V'$ . Empleamos  $q' = \kappa_e q$  y  $\Delta V' = \Delta V$  y así obtenemos

$$C' = \kappa_e C. \quad (30-30)$$

La presencia del dieléctrico aumenta la capacitancia en el factor  $\kappa_e$ . En un capacitor de placas paralelas con dieléctrico, la capacitancia puede obtenerse combinando las ecuaciones 30-5 y 30-30:

$$C' = \frac{\kappa_e \epsilon_0 A}{d}. \quad (30-31)$$

Se incrementa la capacitancia de un capacitor *cualquiera* en el mismo factor, cuando la sustancia dieléctrica llena el espacio entre las placas. Pueden modificarse en forma parecida las ecuaciones 30-8 y 30-11 para explicar la presencia de un dieléctrico que llena al capacitor.

Aunque el efecto en la capacitancia es el mismo, la demostración será muy diferente si introducimos el material dieléctrico con la batería *no* conectada. Primero conectamos el capacitor a ella, a fin de que las placas adquieran una diferencia de potencial  $\Delta V$  y una carga  $q$ ; después se desconecta la batería como se indica en la figura 30-13a. En seguida, llenamos el capacitor con el dieléctrico, según se muestra en la figura 30-13b. En este caso *la carga ha de permanecer cons-*

*tante* pues no hay una batería que lleve la carga de una placa a otra. Con la carga constante, el campo eléctrico se altera sólo por la presencia del dieléctrico; así que  $E' = E/\kappa_e$ . Sustituyendo este campo eléctrico en la ecuación 30-2 encontramos la diferencia de potencial, obtendremos  $\Delta V' = \Delta V/\kappa_e$ . Es decir, en este caso la diferencia de potencial disminuye en el factor  $1/\kappa_e$ . Con  $\Delta V' = q'/C'$  y  $q' = q$ , una vez más obtendremos  $C' = \kappa_e C$ , como en la ecuación 30-30. La capacitancia no depende de *cómo* carguemos el capacitor, ni *cómo* insertemos el dieléctrico; depende exclusivamente de la geometría del capacitor y del material con que esté lleno.

**PROBLEMA RESUELTO 30-8.** Un capacitor de placas paralelas, cuya capacitancia  $C$  es 13.5 pF, presenta una diferencia de potencial  $\Delta V = 12.5$  V en sus placas. La batería de carga se desconecta en seguida y una lámina gruesa de porcelana ( $\kappa_e = 6.5$ ) se introduce entre las placas como se observa en la figura 30-13b. ¿Cuál es la energía almacenada de la unidad antes y después de introducirla?

**Solución** La energía inicial almacenada está dada por la ecuación 30-25 así

$$U_i = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} (13.5 \times 10^{-12} \text{ F})(12.5 \text{ V})^2 \\ = 1.055 \times 10^{-9} \text{ J} = 1055 \text{ pJ}.$$

A partir de la ecuación 30-24 podemos escribir la energía final en la forma  $U_f = q^2/2C'$  porque, según las condiciones del planteamiento del problema,  $q$  (pero no  $\Delta V$ ) permanece constante a medida que introducimos la lámina gruesa. Una vez colocada en su sitio, la capacitancia aumenta a  $C' = \kappa_e C$  y, por lo mismo,

$$U_f = \frac{q^2}{2\kappa_e C} = \frac{U_i}{\kappa_e} = \frac{1055 \text{ pJ}}{6.5} = 162 \text{ pJ}.$$

Una vez introducida la lámina, la energía es menor por un factor de  $1/\kappa_e$ .

En teoría, la energía "faltante" sería evidente para quien introdujera la lámina. El capacitor ejercería una fuerza sobre ella y realizaría en ella el trabajo

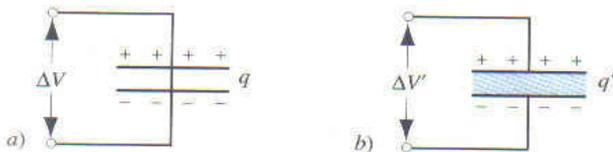
$$W = U_i - U_f = 1055 \text{ pJ} - 162 \text{ pJ} = 893 \text{ pJ}.$$

Si introdujéramos la lámina sin ninguna restricción y si no hubiera fricción, oscilaría dentro y fuera de la región entre las placas. El sistema formado por capacitor + lámina tiene una energía constante de 1055 pJ; la energía fluctúa entre la energía cinética de la lámina en movimiento y la energía almacenada del campo eléctrico. En el instante en que la lámina oscilante llene el espacio entre las placas, su energía cinética será de 893 pJ.

## Los dieléctricos y la ley de Gauss

Hasta ahora hemos empleado la ley de Gauss en situaciones donde no hay un dieléctrico. A continuación vamos a aplicarla a un capacitor de placas paralelas lleno con un material de constante dieléctrica  $\kappa_e$ .

En la figura 30-14 se muestra el capacitor con dieléctrico y sin él. Suponemos que la carga  $q$  en la placa es igual en todos los casos. Se trazaron las superficies gaussianas en parte a través de la placa superior y, en parte, a través de la región entre ellas.



**FIGURA 30-13.** a) Se carga un capacitor vacío y luego se desconecta de la batería. b) En seguida se llena con un dieléctrico. La carga permanece constante, pero la diferencia de potencial disminuye de  $\Delta V$  a  $\Delta V'$ .

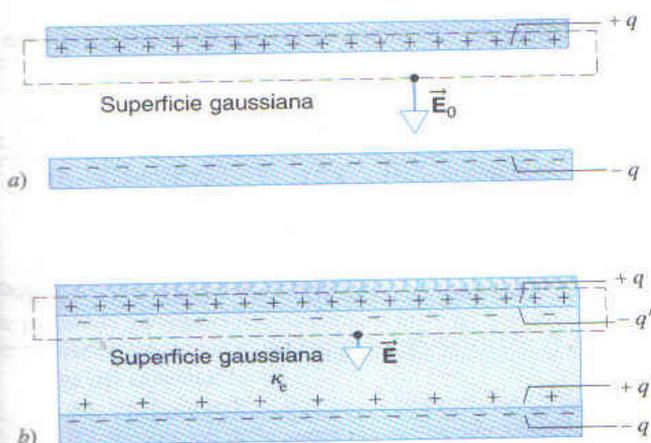


FIGURA 30-14. a) Capacitor de placas paralelas. b) Se inserta una lámina dieléctrica, mientras la carga  $q$  permanece constante. La carga inducida  $q'$  aparece en la superficie de la lámina.

Si no existe un dieléctrico (Fig. 30-14), la ley de Gauss nos da

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 E_0 A = q,$$

porque el campo eléctrico existe sólo en la parte de la superficie gaussiana situada entre las placas. Por tanto,

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} \quad (30-32)$$

Si existe el dieléctrico (Fig. 30-14b), la ley de Gauss nos da

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 EA = q - q'$$

o bien

$$-E = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A} \quad (30-33)$$

donde  $-q'$ , la carga inducida superficial, ha de distinguirse de  $q$ , la carga libre en las placas. Estas dos cargas  $+q$  y  $-q'$ , que se encuentran en el interior de la superficie gaussiana, tienen signo opuesto; la carga neta dentro de ella es  $q + (-q') = q - q'$ .

El dieléctrico reduce el campo eléctrico en el factor  $\kappa_e$  y, por tanto,

$$E = \frac{E_0}{\kappa_e} = \frac{q}{\kappa_e \epsilon_0 A} \quad (30-34)$$

Insertando esto en la ecuación 30-33 obtenemos

$$\frac{q}{\kappa_e \epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

$$q' = q \left( 1 - \frac{1}{\kappa_e} \right) \quad (30-35)$$

La expresión anterior muestra que la carga superficial inducida  $q'$  siempre tiene menor magnitud que la carga libre  $q$  y que es igual a cero si no hay un dieléctrico, es decir, cuando  $\kappa_e = 1$ .

A continuación escribimos así la ley de Gauss en el caso de la figura 30-14b:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q - q', \quad (30-36)$$

una vez más  $q - q'$  es la carga neta dentro de la superficie gaussiana. Al hacer en la ecuación 30-35 la sustitución de  $q'$ , obtenemos después de un poco de rearrreglo

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \vec{E} \cdot d\vec{A} = q. \quad (30-37)$$

En general, esta relación tan importante, aunque obtenida de un capacitor de placas paralelas, es verdadera, en general, y es la forma en que suele escribirse la ley de Gauss cuando hay dieléctricos. Nótese lo siguiente:

1. La integral de flujo se refiere ahora a  $\kappa_e \vec{E}$  y no a  $\vec{E}$ . Esto concuerda con la reducción de  $E$  en un dieléctrico en el factor  $\kappa_e$ , porque  $\kappa_e \vec{E}$  (con el dieléctrico presente) es igual a  $\vec{E}_0$  (sin dieléctrico). Para generalizar admitimos la posibilidad de que el dieléctrico no sea uniforme y para ello colocamos  $\kappa_e$  dentro de la integral.

2. Se supone que la carga  $q$  contenida dentro de la superficie es la carga libre exclusivamente. La carga inducida superficial se omite deliberadamente en el lado derecho de la ecuación 30-37, teniendo en cuenta mediante la introducción de  $\kappa_e$  en la izquierda. Las ecuaciones 30-36 y 30-37 son formulaciones equivalentes por completo.

**PROBLEMA RESUELTO 30-9.** La figura 30-15 muestra un capacitor de placas paralelas con una superficie  $A$  y con una separación  $d$  entre las placas. En ellas se aplica una diferencia de potencial  $\Delta V$ . Después se desconecta la batería y una lámina dieléctrica de espesor  $b$  y una constante dieléctrica  $\kappa_e$  se coloca entre las placas como se indica. Suponga que

$$A = 115 \text{ cm}^2, \quad d = 1.24 \text{ cm}, \quad b = 0.78 \text{ cm}, \\ \kappa_e = 2.61, \quad \Delta V = 85.5 \text{ V}.$$

a) ¿Cuál es la capacitancia  $C$  antes de introducir la lámina? b) ¿Qué carga libre aparece en las placas? c) ¿Cuál es el campo eléctrico  $E_0$

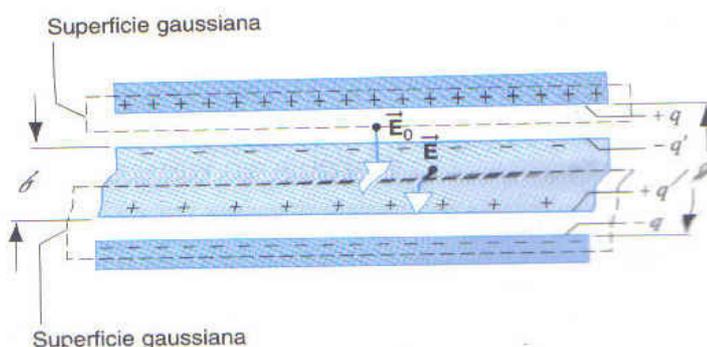


FIGURA 30-15. Problema resuelto 30-9. Un capacitor de placas paralelas contiene un dieléctrico que llena sólo en parte el espacio entre ellas.

en las zonas entre las placas y la lámina dieléctrica? d) Calcule el campo eléctrico  $E$  en ellas. e) ¿Cuál es la diferencia de potencial  $\Delta V'$  entre las placas una vez introducida la lámina? f) ¿Cuál es la capacitancia  $C'$  después de colocar la lámina?

**Solución** a) A partir de la ecuación 30-5 tenemos

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(115 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{1.24 \times 10^{-2} \text{ m}} = 8.21 \times 10^{-12} \text{ F} = 8.21 \text{ pF.}$$

b) La carga libre en las placas puede obtenerse de la ecuación 30-1,

$$q = C\Delta V = (8.21 \times 10^{-12} \text{ F})(85.5 \text{ V}) = 7.02 \times 10^{-10} \text{ C} = 702 \text{ pC.}$$

Como se desconectó la batería de carga antes de introducir la lámina, la carga libre permanece inalterada cuando se coloca la lámina.

c) Apliquemos la ley de Gauss, en la forma expresada en la ecuación 30-37, a la superficie superior gaussiana de la figura 30-15, que encierra sólo la carga libre en la placa superior del capacitor. Tenemos

$$\epsilon_0 \oint \kappa_c \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0(1)E_0 A = q$$

o

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{7.02 \times 10^{-10} \text{ C}}{(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(115 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} = 6900 \text{ V/m} = 6.90 \text{ kV/m.}$$

Nótese que hacemos  $\kappa_c = 1$  en esta ecuación porque la superficie gaussiana en que se integró la ley de Gauss no atraviesa dieléctrico alguno. Nótese asimismo que el valor de  $E_0$  no se altera al introducir la lámina. Depende sólo de la carga libre de las placas.

d) Volvemos a aplicar la ecuación 30-37, esta vez a la superficie inferior gaussiana en la figura 30-15 e incluyendo únicamente la carga libre  $-q$ . Obtenemos

$$\epsilon_0 \oint \kappa_c \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\epsilon_0 \kappa_c EA = -q$$

**TABLA 30-1** Resumen de los resultados del problema resuelto 30-9

Cantidad	Unidad	Sin lámina	Lámina parcial	Lámina completa
$C$	pF	8.21	13.4	21.4
$q$	pC	702	702	702
$q'$	pC	—	433	433
$\Delta V$	V	85.5	52.3	32.8
$E_0$	kV/m	6.90	6.90	6.90 <sup>a</sup>
$E$	kV/m	—	2.64	2.64

<sup>a</sup> Supone que hay una zona muy estrecha.

o bien

$$E = \frac{q}{\kappa_c \epsilon_0 A} = \frac{E_0}{\kappa_c} = \frac{6.90 \text{ kV/m}}{2.61} = 2.64 \text{ kV/m.}$$

El signo negativo aparece cuando evaluamos el producto punto  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ , porque  $\vec{E}$  y  $d\vec{A}$  siguen dirección contraria.  $d\vec{A}$  siempre está en dirección de la normal hacia fuera a la superficie cerrada gaussiana.

e) Para calcular la diferencia de potencial  $\Delta V'$  utilizamos la ecuación 30-2:

$$\begin{aligned} \Delta V' &= \int E ds = E_0(d - b) + Eb \\ &= (6900 \text{ V/m})(0.0124 \text{ m} - 0.0078 \text{ m}) \\ &\quad + (2640 \text{ V/m})(0.0078 \text{ m}) \\ &= 52.3 \text{ V.} \end{aligned}$$

Esto contrasta con la diferencia potencial original aplicada de 85.5 V.

f) Conforme a la ecuación 30-1, la capacitancia con la lámina en su sitio es

$$\begin{aligned} C' &= \frac{q}{\Delta V'} = \frac{7.02 \times 10^{-10} \text{ C}}{52.3 \text{ V}} \\ &= 1.34 \times 10^{-11} \text{ F} = 13.4 \text{ pF.} \end{aligned}$$

En la tabla 30-1 se resumen los resultados de este problema y también los que se hubieran conseguido en caso de que la lámina dieléctrica hubiera llenado por completo el espacio entre las placas.

## OPCIÓN MÚLTIPLE

### 30-1 Capacitores

1. Dos placas metálicas paralelas tienen cargas  $q_1$  y  $q_2$ . ¿Es un ejemplo de capacitor?
- A) Sí.  
B) Sólo si  $q_1 = -q_2$ .  
C) Sólo si los signos  $q_1$  y  $q_2$  son distintos.  
D) No.

### 30-2 Capacitancia

2. Los centros de dos esferas conductoras idénticas de radio  $r$  están separados por una distancia  $d > 2r$ . Una carga  $+q$  se encuentra en una esfera y una carga  $-q$  en la otra. La capacitancia del sistema es  $C_0$ . La carga adicional se transfiere ahora de modo que se duplica en cada esfera.
- a) ¿Cuál es la nueva capacitancia  $C'$  ahora que las cargas han cambiado.

- A)  $C' = 4C_0$       B)  $C' = 2C_0$   
C)  $C' = C_0$       D)  $C' = C_0/2$

E) No existe suficiente información para contestar la pregunta.

b) ¿Cuál es la nueva diferencia de potencial  $\Delta V$  entre las esferas?

- A)  $\Delta V' = 4q/C_0$       B)  $\Delta V' = 2q/C_0$   
C)  $\Delta V' = q/C_0$       D)  $\Delta V' = q/2C_0$

E) No hay suficiente información para contestar la pregunta.

3. Los centros de dos esferas conductoras idénticas de radio  $r$  están separados por una distancia  $d > 2r$ .

a) ¿Cómo cambia la capacitancia de este sistema si se disminuye la separación entre ellas?

- A)  $C$  aumenta.                      B)  $C$  disminuye.  
 C)  $C$  no se altera.  
 D) No hay suficiente información para contestar la pregunta.
- b) ¿Cómo cambia la capacitancia de este sistema si se disminuye  $r$ ?
- A)  $C$  aumenta.                      B)  $C$  disminuye.  
 C)  $C$  no se altera.  
 D) No hay suficiente información para contestar la pregunta.

### 30-3 Cálculo de la capacitancia

4. ¿Cuál de los siguientes cambios en un capacitor ideal de placas paralelas conectado a una batería también ideal incrementará la carga del capacitor?
- A) Reducción de la diferencia de potencial en las placas.  
 B) Reducción de la superficie de las placas.  
 C) Reducción de la separación de las placas.  
 D) Ninguno de los anteriores.
5. La ecuación 30-5 no incluye los efectos de bordes cercanos al borde de las placas. ¿Hace esto que la ecuación 30-5 subestime o sobrestime la capacitancia de un capacitor real de placas paralelas?
- A) Sobrestimar                      B) Subestimar  
 C) Ninguna de las dos, la expresión es correcta
6. ¿Cuál es la capacitancia de un conductor esférico simple de radio  $r$ ?
- A)  $4\pi\epsilon_0$                       B)  $4\pi\epsilon_0 r$                       C)  $4\pi\epsilon_0/r$   
 D) La capacitancia no está definida para un solo objeto.

### 30-4 Capacitores en serie y en paralelo

7. Dos capacitores  $C_1$  y  $C_2$  están conectados en serie; suponga que  $C_1 < C_2$ . La capacitancia equivalente de este sistema es  $C$ , donde
- A)  $C < C_1/2$ .                      B)  $C_1/2 < C < C_1$ .  
 C)  $C_1 < C < C_2$ .                      D)  $C_2 < C < 2C_2$ .  
 E)  $2C_2 < C$ .
8. Dos capacitores  $C_1$  y  $C_2$  están conectados en paralelo; suponga que  $C_1 < C_2$ . La capacitancia equivalente de este sistema es  $C$ , donde
- A)  $C < C_1/2$ .                      B)  $C_1/2 < C < C_1$ .  
 C)  $C_1 < C < C_2$ .                      D)  $C_2 < C < 2C_2$ .  
 E)  $2C_2 < C$ .
9. Cuatro arreglos posibles de capacitores se incluyen en la figura 30-16 para tres capacitores idénticos.

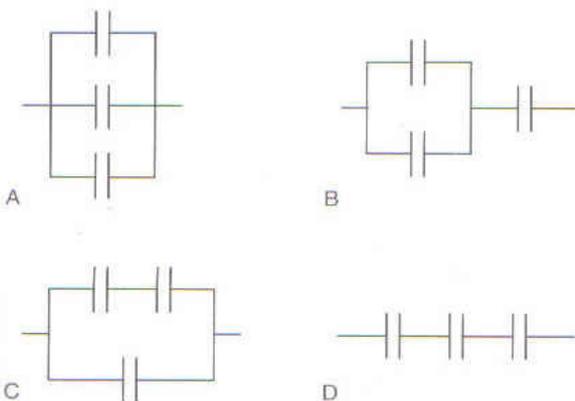


FIGURA 30-16. Pregunta de opción múltiple 9.

- a) ¿Cuál arreglo tendrá la mayor capacitancia equivalente?  
 b) Si los arreglos estuvieran conectados a una diferencia de potencial de 12 V, de modo que se transfiriese la misma cantidad de carga. ¿Cuál requiere transferir la máxima carga?  
 c) Los arreglos están conectados a una diferencia de potencial de modo que se transfiera la misma cantidad de carga? ¿Cuál requiere la mayor diferencia de potencial?

### 30-5 Almacenamiento de energía en un campo eléctrico

10. Un capacitor de placas paralelas está conectado a una batería ideal que produce una diferencia de potencial fija. Originalmente la energía almacenada en el capacitor es  $U_0$ . Si la distancia entre las placas se duplica, la nueva energía almacenada en él será
- A)  $4U_0$ .                      B)  $2U_0$ .                      C)  $U_0$ .  
 D)  $U_0/2$ .                      E)  $U_0/4$ .
11. Un capacitor de placas paralelas se carga conectándolo a una batería ideal; después se desconecta. Originalmente la energía almacenada en él es  $U_0$ . Si la distancia entre las placas se duplica, la nueva energía almacenada en él será
- A)  $4U_0$ .                      B)  $2U_0$ .                      C)  $U_0$ .  
 D)  $U_0/2$ .                      E)  $U_0/4$ .
12. Un estudiante originalmente carga un capacitor fijo para que tenga una energía potencial de 1 J. Si quiere obtener una energía potencial de 4 J, debe
- A) cuadruplicar la diferencia de potencial en el capacitor pero sin alterar la carga.  
 B) duplicar la diferencia de potencial en el capacitor, pero sin alterar la carga.  
 C) duplicar la diferencia de potencial en el capacitor y también la carga.  
 D) dejar intacta la diferencia de potencial en el capacitor, pero duplicando la carga.
13. Un globo inflado se cubre con una superficie conductora que lleva una carga  $q$ . El globo sufre una fuga y el radio empieza a disminuir, pero no se pierde carga en la superficie.
- a) ¿Cómo cambia la capacitancia del globo al empezar éste a sufrir fugas?
- A)  $C$  aumenta.                      B)  $C$  disminuye.  
 C)  $C$  no se altera.  
 D) No se cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.
- b) ¿Cómo cambia la energía eléctrica almacenada al empezar el globo a sufrir pérdidas?
- A)  $U$  aumenta.                      B)  $U$  disminuye.  
 C)  $U$  no se altera.  
 D) No se cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.

### 30-6 Capacitor con dieléctrico

14. Considere un capacitor de placas paralelas inicialmente con una carga  $q_0$ , una capacitancia  $C_0$  y una diferencia de potencial  $\Delta V_0$ . Entre las placas hay una fuerza electrostática de magnitud  $F_0$  y el capacitor tiene una energía almacenada  $U_0$ . Sus terminales no están conectadas a nada.

a) Una lámina dieléctrica con  $\kappa_e > 1$  se introduce entre las placas. ¿Cuáles cantidades crecen? (Seleccione todas las que se aplican.)

- A)  $q$                       B)  $C$                       C)  $\Delta V$                       D)  $F$                       E)  $U$

- b) ¿Qué dirección sigue la fuerza electrostática en la lámina dieléctrica mientras está siendo introducida?
- La fuerza empuja la lámina al interior del capacitor.
  - La fuerza empuja la lámina fuera del capacitor.
  - No hay fuerza electrostática sobre la lámina.
- c) Más tarde se quita la lámina dieléctrica. ¿Qué dirección sigue la fuerza electrostática en ella mientras se quita?
- La fuerza empuja la lámina al interior del capacitor.
  - La fuerza empuja la lámina fuera del capacitor.
  - No hay fuerza electrostática sobre la lámina.
15. Considere un capacitor de placas paralelas inicialmente con la carga  $q_0$  y la capacitancia  $C_0$ . Entre las placas hay una fuerza electrostática de magnitud  $F_0$  y el capacitor tiene una energía almacenada  $C_0$ . Las terminales de los capacitores están conectados a una batería ideal, que suministra una diferencia de potencial  $\Delta V_0$ .

a) Una lámina dieléctrica con  $\kappa_e > 1$  se introduce entre las placas. ¿Qué magnitudes aumentarán? (Seleccione todas las que se aplican.)

- |        |        |               |
|--------|--------|---------------|
| A) $q$ | B) $C$ | C) $\Delta V$ |
| D) $F$ | E) $U$ |               |

b) ¿Qué dirección sigue la fuerza electrostática en la lámina dieléctrica mientras es introducida?

- La fuerza empuja la lámina al interior del capacitor.
- La fuerza empuja la lámina afuera del capacitor.
- No hay fuerza electrostática sobre la lámina.

c) Más tarde se quita la lámina dieléctrica. ¿Qué dirección sigue la fuerza electrostática en ella mientras se quita?

- La fuerza empuja la lámina al interior del capacitor.
- La fuerza empuja la lámina fuera del capacitor.
- No hay fuerza electrostática en la lámina.

## PREGUNTAS

- Un capacitor está conectado a una batería. a) ¿Por qué las placas reciben una carga exactamente de la misma magnitud? b) ¿Es esto cierto aun cuando tengan distinto tamaño?
- Recibe usted dos capacitores,  $C_1$  y  $C_2$  en los cuales  $C_1 > C_2$ . ¿Cómo dispondría las cosas de modo que  $C_2$  pudiera contener más carga que  $C_1$ ?
- La relación  $\sigma \propto 1/R$ , donde  $\sigma$  es la densidad de carga superficial, y  $R$  el radio de curvatura (Ec. 28-42), indica que la carga situada en un conductor aislado se concentra en las puntas y evita las superficies planas, donde  $R = \infty$ . ¿Cómo concilia lo anterior con la figura 30-5, en la que la carga se halla en la superficie plana de ambas placas?
- En relación con la ecuación ( $q = C \Delta V$ ) dijimos que  $C$  es un constante. Sin embargo, señalamos (Ec. 30-5) que se basa en la geometría (y también en el medio como veremos luego). Si  $C$  es efectivamente una constante, ¿respecto a qué variables permanece constante?
- En la figura 30-1 suponga que  $a$  y  $b$  son no conductores; la carga se distribuye arbitrariamente en sus superficies. a) ¿Será válida la ecuación ( $q = C \Delta V$ ), con  $C$  independiente de los arreglos de carga? b) ¿Cómo definiría  $\Delta V$  en este caso?
- Recibe un capacitor de placas paralelas con placas cuadradas de superficie  $A$  y una separación  $d$ . ¿Qué efecto cualitativo causan las siguientes operaciones en su capacitancia? a) Reduzca  $d$ . b) Ponga una lámina de cobre entre las placas de manera que no toquen ninguna de las dos. c) Duplique la superficie de ambas placas. d) Duplique la superficie de una placa solamente. e) Deslice las placas paralelas entre sí, de modo que la superficies de sobreposición sea 50%. f) Duplique la diferencia de potencial entre las placas. g) Incline una placa en forma tal que la separación sea  $d$  en un extremo y  $\frac{1}{2}d$  en el otro.
- Tiene dos conductores aislados, cada uno con cierta capacitancia (Fig. 30-17). Si los une por medio de un alambre fino, ¿cómo calculará la capacitancia de la combinación? Al unirlos con el alambre, ¿los ha conectado en serie o en paralelo?

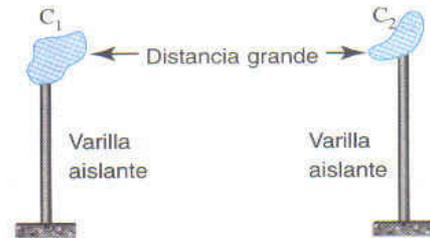


FIGURA 30-17. Pregunta 7.

- La capacitancia de un conductor se ve afectada por la presencia de otro sin carga que esté aislado eléctricamente. ¿Por qué?
- Una hoja de aluminio de espesor insignificante se pone entre las placas de un capacitor como se ve en la figura 30-18. ¿Qué efecto tiene en la capacitancia si a) la hoja está aislada eléctricamente y si b) está conectada a la placa superior?

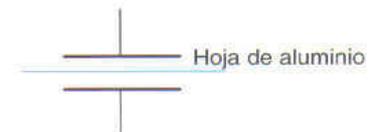


FIGURA 30-18. Pregunta 9.

- A menudo los capacitores se guardan con un alambre conectado en sus terminales. ¿Por qué se hace eso?
- Si no prescindieramos de los bordes de las líneas eléctricas en un capacitor de placas paralelas, ¿calcularía una capacitancia mayor o menor?
- Dos discos circulares de cobre están uno frente a otro a cierta distancia. ¿En qué formas podría reducir usted la capacitancia de esta combinación?
- Explique las semejanzas y las diferencias cuando a) una lámina dieléctrica y b) una lámina conductor se introducen en las pla-

- cas de un capacitor de placas paralelas. Suponga que el espesor de la lámina es la mitad de la separación entre ellas.
- Un capacitor de placas paralelas lleno de aceite ha sido diseñado para que tenga una capacitancia  $C$  y que opere seguramente a cierta diferencia potencial máxima o por debajo de ella  $\Delta V_m$ , sin doblarse. Pero el diseñador no hizo bien su trabajo y el capacitor a veces se dobla. ¿Qué puede hacerse para rediseñarlo, manteniendo invariables  $C$  y  $\Delta V_m$  y utilizando el mismo dieléctrico?
  - En cierta diferencia de potencial, ¿almacena un capacitor mayor o menor cantidad de carga con un dieléctrico que sin él (vacío)? Explique su respuesta utilizando la imagen microscópica de la situación.
  - El agua tiene una gran constante dieléctrica (Tabla 29-2). ¿Por qué no se usa comúnmente como material dieléctrico en los capacitores?
  - La figura 30-19 muestra un capacitor real de 1 F, que se utiliza en laboratorios para estudiantes. Mide apenas unos pocos centímetros de diámetro. Considerando el resultado del problema resuelto 30-2, ¿cómo puede construirse este capacitor?

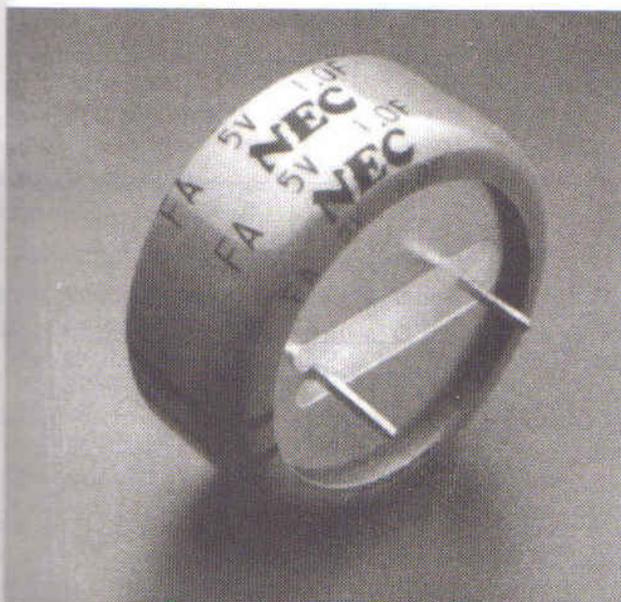


FIGURA 30-19. Pregunta 17.

## EJERCICIOS

### 30-1 Capacitores

#### 30-2 Capacitancia

- El electrómetro es un dispositivo con que se mide la carga estática. Se pone una carga desconocida en las placas de un capacitor y se mide la diferencia de potencial. ¿Qué carga mínima puede medirse mediante un electrómetro con una capacitancia de 50 pF y una sensibilidad de voltaje de 0.15 V?
- Los dos objetos metálicos de la figura 30-21 tienen cargas netas de +73.0 pC y de -73.0 pC y esto produce una diferencia de potencial de 19.2 V entre ellos. a) ¿Qué capacitancia tiene el sistema. b) Si se modifican las cargas a + 210 pC y - 210 pC,

- Una lámina dieléctrica se introduce en un extremo de un capacitor de placas paralelas y cargado (las placas son horizontales y la batería de carga ha sido desconectada) y luego se libera. Describa lo que sucede. No tenga en cuenta la fricción.
- Se carga un capacitor de placas paralelas utilizando una batería, que luego se desconecta. Después una lámina dieléctrica se introduce entre ellas. En términos cualitativos describa lo que sucede con la carga, con la capacitancia, con la diferencia de potencial, con el campo eléctrico y con la energía almacenada.
- Mientras un capacitor de placas paralelas permanece conectado a una batería, se introduce una lámina dieléctrica entre ellas. Describa en términos cualitativos lo que sucede con la carga, con la capacitancia, con el campo eléctrico y la energía total almacenada.
- Imagine una lámina dieléctrica igual a la separación de las placas, introducida sólo en la mitad entre un capacitor de placas paralelas que tiene una carga fija  $q$ . Dibuje cualitativamente su distribución en las placas y la carga inducida  $q'$  en la lámina.
- Dos capacitores idénticos están conectados como se observa en la figura 30-20. Una lámina dieléctrica se introduce entre las placas de uno de ellos, manteniendo conectada la batería de modo que se conserva una diferencia de potencial  $\Delta V$  constante. Describa lo que sucede con la carga, con la capacitancia, con la diferencia de potencial, con el campo eléctrico y la energía almacenada en cada capacitor.

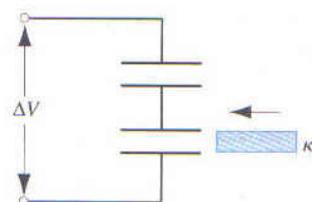


FIGURA 30-20. Pregunta 22.

- En este capítulo hemos supuesto condiciones electrostáticas, es decir, permanece constante la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre las placas del capacitor. Sin embargo, suponga que como ocurre comúnmente en la práctica,  $\Delta V$  varía senoidalmente con el tiempo en una frecuencia angular  $\omega$ . ¿Esperaría usted que la constante dieléctrica  $\kappa_e$  variase con  $\omega$ ?

¿cuál será la capacitancia? c) ¿Cuál será entonces la diferencia potencial?



FIGURA 30-21. Ejercicio 2.

3. El capacitor de la figura 30-22 tiene una capacitancia de  $26.0 \mu\text{F}$  y al inicio no está cargado. Una batería suministra una diferencia de potencial  $\Delta V$  de  $125 \text{ V}$ . Luego de cerrar  $S$  durante largo tiempo, ¿cuánta carga se desplazará de la batería?

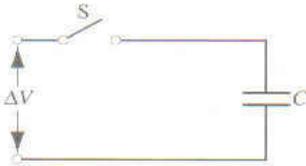


FIGURA 30-22. Ejercicio 3.

11. En la figura 30-24 encuentre la capacitancia equivalente de la combinación. Suponga que  $C_1 = 10.3 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 4.80 \mu\text{F}$  y  $C_3 = 3.90 \mu\text{F}$ .

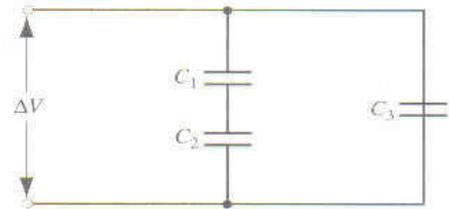


FIGURA 30-24. Ejercicio 11.

### 30-3 Cálculo de la capacitancia

- Un capacitor de placas paralelas tiene placas circulares de  $8.22 \text{ cm}$  de radio y con una separación de  $1.31 \text{ mm}$ . *a)* Calcule la capacitancia. *b)* ¿Qué carga aparecerá en las placas si se aplica una diferencia de potencial de  $116 \text{ V}$ ?
- La placa y el cátodo de un diodo de tubo al vacío tienen la forma de dos cilindros concéntricos con el cátodo como cilindro central. El diámetro del cátodo mide  $1.62 \text{ mm}$  y el de la placa  $18.3 \text{ mm}$ ; ambos elementos tienen una longitud de  $2.38 \text{ cm}$ . Calcule la capacitancia del diodo.
- Dos hojas de aluminio tienen una separación de  $1.20 \text{ mm}$ , una capacitancia de  $9.70 \text{ pF}$  y una carga de  $13.0 \text{ V}$ . *a)* Calcule la superficie de la placa. *b)* Ahora se reduce la separación en  $0.10 \text{ mm}$  manteniendo constante la carga. Encuentre la nueva capacitancia. *c)* ¿Cuánto se altera la diferencia de potencial? Explique de qué manera podría construirse un micrófono aplicando este principio?
- Las placas del capacitor esférico tienen un radio de  $38.0 \text{ mm}$  y de  $40.0 \text{ mm}$ . *a)* Calcule la capacitancia. *b)* ¿Cuál debe ser la superficie de placa de un capacitor de placas paralelas con la misma separación y capacitancia de ellas?
- Suponga que los dos cascarones esféricos de un capacitor esférico tienen radios aproximadamente iguales. En tales condiciones, el dispositivo se aproxima a un capacitor de placas paralelas con  $b - a = d$ . Demuestre que la ecuación 30-8 en un capacitor esférico efectivamente se reduce a la ecuación 30-5 para un capacitor de placas paralelas en este caso.

12. Los capacitores sin carga de la figura 30-25 tienen una capacitancia de  $25.0 \mu\text{F}$ . Se produce una diferencia de potencial de  $4200 \text{ V}$  cuando se cierra el interruptor  $S$ . ¿Cuánta carga fluye entonces por el medidor  $A$ ?

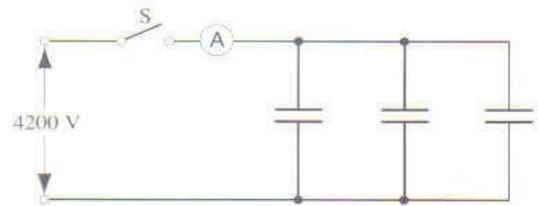


FIGURA 30-25. Ejercicio 12.

### 30-4 Capacitores en serie y en paralelo

- ¿Cuántos capacitores de  $1.00\text{-}\mu\text{F}$  deben conectarse en paralelo para almacenar  $1.00 \text{ C}$  con una diferencia de potencial de  $110 \text{ V}$  en los capacitores?
- En la figura 30-23 encuentre la capacitancia equivalente de la combinación. Suponga que  $C_1 = 10.3 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 4.80 \mu\text{F}$  y  $C_3 = 3.90 \mu\text{F}$ .

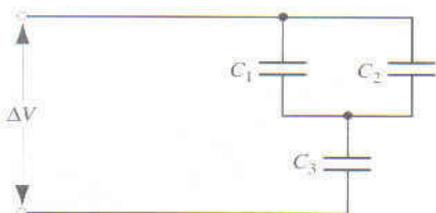


FIGURA 30-23. Ejercicios 10, 17 y 26.

- Un capacitor de  $6.0\text{-}\mu\text{F}$  está conectado en serie a otro de  $4.0\text{-}\mu\text{F}$ ; al par se le aplica una diferencia de potencial de  $200 \text{ V}$ . *a)* Calcule la capacitancia equivalente. *b)* ¿Qué carga contiene cada uno? *c)* ¿Cuál es la diferencia de potencial en cada capacitor?
- Resuelva el ejercicio 13 con los dos capacitores anteriores conectados en paralelo.
- a)* Tres capacitores están conectados en paralelo. Cada uno tiene una superficie de placa  $A$  y un espaciamiento  $d$  entre ellas. ¿Qué espaciamiento debe tener un capacitor con superficie de placa  $A$ , si su capacitancia es igual a la de la combinación en paralelo? *b)* ¿Cuál debe ser el espaciamiento si los tres capacitores están conectados en serie?
- Tenemos varios capacitores de  $2.0\text{-}\mu\text{F}$  cada uno capaz de soportar  $200 \text{ V}$  sin ruptura. ¿Cómo crearía una combinación que tenga una capacitancia equivalente de *a)*  $0.40 \mu\text{F}$  o *b)*  $1.2 \mu\text{F}$ , ambas capaces de soportar  $1000 \text{ V}$ ?
- En la figura 30-23 suponga que el capacitor  $C_3$  se rompe eléctricamente, convirtiéndose en equivalente de una trayectoria de conducción. ¿Qué cambios presentará el capacitor  $C_1$  en *a)* la carga y en *b)* la diferencia de potencial? Suponga que  $\Delta V = 115 \text{ V}$ .
- Un capacitor de  $108\text{-}\mu\text{F}$  tiene una carga con una diferencia de potencial de  $52.4 \text{ V}$ ; después se desconecta la batería de carga. Luego se conecta el capacitor en paralelo con otro (inicialmen-

te sin carga). La diferencia medida de potencial desciende a 35.8 V. Encuentre la capacitancia de este segundo capacitor.

19. Una porción de un arreglo infinito de capacitores idénticos de  $1 \mu\text{F}$  se muestra en la figura 30-26. El inicial no lleva carga. Luego se conecta una batería en dos uniones lejanas. Demuestre que el potencial en cualquiera de ellas es el promedio que hay en las cuatro más cercanas. Utilizará el resultado para encontrar la respuesta del problema para resolver por computadora núm. 1, de este capítulo. (Sugerencia: ¿cuál es la carga neta en una unión cualquiera?)

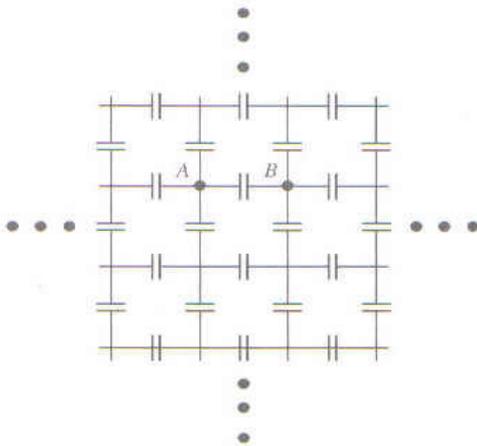


FIGURA 30-26. Ejercicio 19 y problema para resolver por computadora núm. 1.

### 30-5 Almacenamiento de energía en un campo eléctrico

20. ¿Cuánta energía se guarda en  $2.0 \text{ m}^3$  de aire, debido a un campo eléctrico con una intensidad de  $150 \text{ V/m}$  en buenas condiciones meteorológicas?
21. Un banco de capacitores conectados en paralelo con  $2100 \text{ } 5.0\text{-}\mu\text{F}$  se utiliza para almacenar energía eléctrica. ¿Cuánto cuesta cargarlo a  $55 \text{ kV}$ , suponiendo un costo de  $3.0\text{¢/kW}\cdot\text{h}$ ?
22. Si los intentos de construir un reactor controlado de fusión termonuclear tienen éxito, podrían proporcionarle al mundo abundante energía a partir del hidrógeno pesado presente en el agua de mar; generalmente se usan en ellos enormes corrientes eléctricas durante breves periodos en devanados del campo magnético. A menudo las corrientes se consiguen descargando grandes bancos de capacitores. Uno de ellos genera  $61.0 \text{ mF}$  a  $10.0 \text{ kV}$ . Calcule *a*) en joules y *b*) en  $\text{kW}\cdot\text{h}$  la energía almacenada.
23. Un capacitor de placas paralelas lleno de aire, que tiene una superficie  $42.0 \text{ cm}^2$  y un espaciamiento de  $1.30 \text{ mm}$ . Lleva una carga con una diferencia de potencial de  $625 \text{ V}$ . Calcule *a*) la capacitancia, *b*) la magnitud de la carga en ambas placas, *c*) la energía almacenada, *d*) el campo eléctrico entre las placas y *e*) la densidad de energía entre ellas.
24. Dos capacitores,  $2.12 \mu\text{F}$  y  $3.88 \mu\text{F}$  están conectados en serie con una diferencia de potencial de  $328 \text{ V}$ . Calcule la energía total almacenada en ellos.
25. Una esfera metálica aislada, cuyo diámetro mide  $12.6 \text{ cm}$ , tiene un potencial de  $8150 \text{ V}$  (donde  $V = 0$  en el infinito). Calcule la densidad de energía en el campo eléctrico cerca de la superficie de la esfera.
26. En la figura 30-23 determine *a*) la carga, *b*) la diferencia de potencial y *c*) la energía almacenada en cada capacitor. Suponga los mismos valores numéricos que los del ejercicio 10. Con  $\Delta V = 112 \text{ V}$ .

27. Un capacitor cilíndrico tiene radios  $a$  y  $b$  como se muestra en la figura 30-6. Demuestre que la mitad de la energía potencial eléctrica almacenada se halla dentro de un cilindro cuyo radio es  $r = \sqrt{ab}$ .

### 30-6 Capacitor con dieléctrico

28. Un capacitor de placas paralelas lleno de aire tiene una capacitancia de  $51.3 \text{ pF}$ . *a*) Si la superficie de sus placas mide  $0.350 \text{ m}^2$ , ¿cuál es su separación? *b*) Si la región entre las placas está ahora llena de un material que tiene una constante dieléctrica de  $5.60$ , ¿cuál es la capacitancia?
29. Un capacitor de placas paralelas lleno de aire tiene una capacitancia de  $1.32 \text{ pF}$ . Se duplica su separación y se introduce cera entre ellas. La nueva capacitancia es  $2.57 \text{ pF}$ . Encuentre la constante dieléctrica de la cera.
30. Con un capacitor de  $7.40 \text{ pF}$  lleno de aire, se le pide diseñar uno que almacene hasta  $6.61 \mu\text{J}$ , con una diferencia máxima de potencial de  $630 \text{ V}$ . ¿Qué dieléctrico en la tabla 29-2 utilizará para llenar el volumen en el capacitor, en caso de que no deje margen de error?
31. Para construir un capacitor de placas paralelas dispone de dos placas de cobre, de una hoja de mica (espesor =  $0.10 \text{ mm}$ ,  $\kappa_c = 5.4$ ), una hoja de vidrio (espesor =  $0.20 \text{ mm}$ ,  $\kappa_c = 7.0$ ) y una lámina de parafina (espesor =  $1.0 \text{ cm}$ ,  $\kappa_c = 2.0$ ). Si quiere conseguir la mayor capacitancia, ¿cuál hoja debe colocar entre las placas de cobre?
32. Cierta sustancia tiene una constante dieléctrica de  $2.80$  y una intensidad dieléctrica de  $18.2 \text{ MV/m}$ . Si se emplea como material dieléctrico en un capacitor de placas paralelas, ¿qué superficie mínima deben tener a fin de que la capacitancia sea  $68.4 \text{ nF}$  y de que el capacitor logre soportar una diferencia de potencial de  $4.13 \text{ kV}$ ?
33. Un cable coaxial que se utiliza en una línea de transmisión responde como capacitancia "distribuida" al circuito que lo alimenta. Calcule la capacitancia de  $1.00 \text{ km}$  de cable que tiene un radio interno de  $0.110 \text{ mm}$  y uno externo de  $0.588 \text{ mm}$ . Suponga que el espacio entre los conductores está lleno de poliestireno.
34. Le han dejado la tarea de diseñar un capacitor transportable que almacene  $250 \text{ kJ}$  de energía. Seleccione usted un tipo de placas paralelas con dieléctrico. *a*) ¿Cuál es el volumen mínimo del capacitor que puede alcanzarse empleando el dieléctrico escogido entre los de la tabla 29-2 que poseen valores de intensidad dieléctrica? *b*) Los modernos capacitores de alto desempeño, capaces de guardar  $250 \text{ kJ}$ , tienen volúmenes de  $0.087 \text{ m}^3$ . Suponiendo que el dieléctrico usado tenga la misma intensidad dieléctrica que en *a*), ¿cuál debe ser su constante dieléctrica?
35. Se le pide construir un capacitor con una capacitancia cercana a  $1000 \text{ pF}$  y con un potencial de ruptura mayor de  $10 \text{ kV}$ . Piensa utilizar los lados de un vaso alto (pyrex), recubierto de aluminio en su interior y en su exterior (prescinda de los extremos). ¿Cuáles son *a*) la capacitancia y *b*) el potencial de ruptura? Use un vaso de  $15 \text{ cm}$  de altura, con  $3.6 \text{ cm}$  de radio interno y  $3.8$  de radio externo.
36. En el problema resuelto 30-8 suponga que la batería permanece conectada mientras se introduce la lámina dieléctrica. Calcule *a*) la capacitancia, *b*) la carga en las placas del capacitor, *c*) el campo eléctrico en la separación y *d*) el campo eléctrico en la lámina una vez introducida ésta.
37. Una lámina de cobre con espesor  $b$  se introduce en un capacitor de placas paralelas como se indica en la figura 30-27. *a*) ¿Cuál es la capacitancia tras de introducirla? *b*) Si se mantiene la car-

ga  $q$  en las placas, calcule la razón de la energía almacenada antes y después de introducir la lámina. c) ¿Cuánto trabajo se efectúa al momento de hacerlo? ¿Se introduce tirando de ella o hay que empujarla?

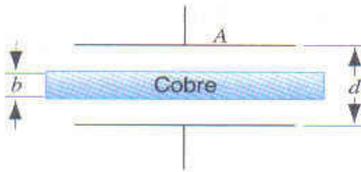


FIGURA 30-27. Ejercicio 37.

## PROBLEMAS

- En la sección 30-2 se calculó la capacitancia de un capacitor cilíndrico. Mediante la aproximación (Ap. 1) de que  $\ln(1+x) \approx x$  cuando  $x \ll 1$ , demuestre que la capacitancia se acerca a la de un capacitor de placas paralelas cuando el espaciamiento entre los dos cilindros es pequeño.
- Debe diseñarse un capacitor para que, con capacitancia constante, funcione en un ambiente de temperatura fluctuante. Como se indica en la figura 30-28, el capacitor es del tipo de placas paralelas como "espaciadores" de plástico que las conservan alineadas. a) Demuestre que la rapidez de cambio de la capacitancia  $C$  con la temperatura  $T$  está dada por

$$\frac{dC}{dT} = C \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dT} - \frac{1}{x} \frac{dx}{dT} \right),$$

donde  $A$  es la superficie de placa y  $x$  es la separación entre ellas. b) Si las placas son de aluminio, ¿cuál es el coeficiente de expansión térmica de los espaciadores a fin de que la capacitancia no varíe con la temperatura? (No tenga en cuenta el efecto que los espaciadores tienen en la capacitancia.)



FIGURA 30-28. Problema 2.

- La figura 30-29 muestra dos capacitores en serie; la sección central rígida de longitud  $b$  se mueve verticalmente. Demuestre que la capacitancia equivalente de la combinación en serie no depende de la posición de la sección central y que está dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{a - b}.$$

- Reconsidere el ejercicio 37, suponiendo que se mantiene constante la diferencia de potencial  $\Delta V$  en vez de la carga.
- Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia de 112 pF, una superficie de placa de 96.5 cm<sup>2</sup> y un dieléctrico de mica ( $\kappa_e = 5.40$ ). Con una diferencia de potencial de 55.0 V calcule la magnitud de a) el campo eléctrico de la mica, b) la carga libre en las placas y c) la carga inducida superficial.
- Dos placas paralelas de superficie 110 cm<sup>2</sup> reciben cargas iguales pero opuestas de 890 nC. El campo eléctrico dentro del material dieléctrico que llena el espacio entre ellas es 1.40 MV/m. a) Calcule la constante dieléctrica del material. b) Determine la magnitud de la carga inducida en las superficies del dieléctrico.

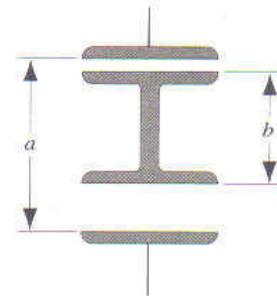


FIGURA 30-29. Problema 3.

- En la figura 30-30 se muestra un capacitor variable y lleno de aire como los que sirven para sintonizar las radios. Se conectan placas alternas: un grupo está fijo en su sitio y el otro puede girar. Suponga un conjunto de  $n$  placas con polaridad alterna, cada una de ellas con una superficie  $A$  y separada de las placas contiguas por una distancia  $d$ . Demuestre que este capacitor tiene una capacitancia máxima de

$$C = \frac{(n-1)\epsilon_0 A}{d}.$$

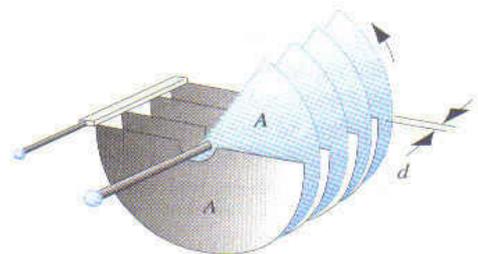


FIGURA 30-36. Problema 4.

- En la figura 30-31 los capacitores  $C_1 = 1.16 \mu\text{F}$  y  $C_2 = 3.22 \mu\text{F}$  están cargados con una diferencia de potencial  $\Delta V = 96.6 \text{ V}$ , pero con polaridad contraria, de manera que los puntos  $a$  y  $c$  se hallan en las placas positivas respectivas de  $C_1$  y  $C_2$ , y que los puntos  $b$  y  $d$  están en las placas negativas respectivas. Los interruptores  $S_1$  y  $S_2$  se encuentran cerrados ahora. a) ¿Cuál es la di-

ferencia entre los puntos  $e$  y  $f$ ?  $b)$  ¿Cuál es la carga en  $C_1$ ?  $c)$  ¿Cuál es la carga en  $C_2$ ?

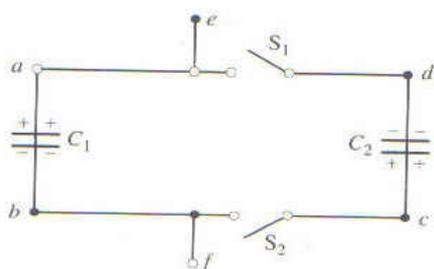


FIGURA 30-31. Problema 5.

6. Cuando se pone el interruptor  $S$  a la izquierda de la figura 30-32, las placas del capacitor  $C_1$  adquieren una diferencia de potencial  $\Delta V_0$ .  $C_2$  y  $C_3$  no llevan carga inicialmente. ¿Cuáles son las cargas finales  $q_1, q_2, q_3$  en los capacitores correspondientes?

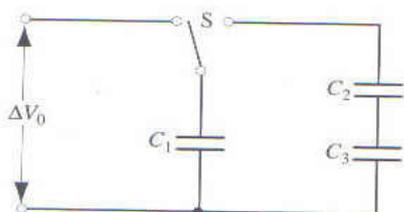


FIGURA 30-32. Problema 6.

7. La figura 30-33 contiene dos capacitores idénticos de capacitancia  $C$  en un circuito con dos diodos (ideales)  $D$ . Se conecta una batería de 100 V a las terminales de entrada:  $a)$  primero con la terminal positiva  $a$  y  $b)$  más tarde con la terminal positiva  $b$ . ¿Cuál es en ambos casos la diferencia de potencial entre las terminales de salida? (Un diodo ideal tiene la propiedad de que la carga positiva fluye por él exclusivamente en dirección de la flecha y que las cargas negativas lo hacen en dirección contraria.)

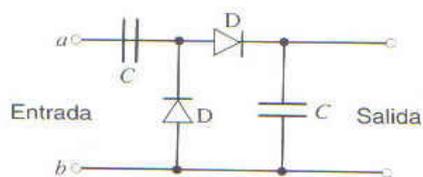


FIGURA 30-33. Problema 7.

8. Un capacitor tiene placas cuadradas, de lado  $a$ , que forman un ángulo  $\theta$  como se muestra en la figura 30-34. Demuestre que con un ángulo  $\theta$ , pequeño la capacitancia está dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \left( 1 - \frac{a\theta}{2d} \right).$$

(Sugerencia: el capacitor puede dividirse en franjas diferenciales que están realmente en paralelo.)



FIGURA 30-34. Problema 8.

9. En la figura 30-35 una batería produce una diferencia de potencial  $\Delta V$  de 12 V.  $a)$  Determine la carga en cada capacitor cuando el interruptor  $S_1$  está cerrado y  $b)$  cuando (más tarde) el interruptor  $S_2$  también lo está. Suponga que  $C_1 = 1.0 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2.0 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 3.0 \mu\text{F}$  y  $C_4 = 4.0 \mu\text{F}$ .

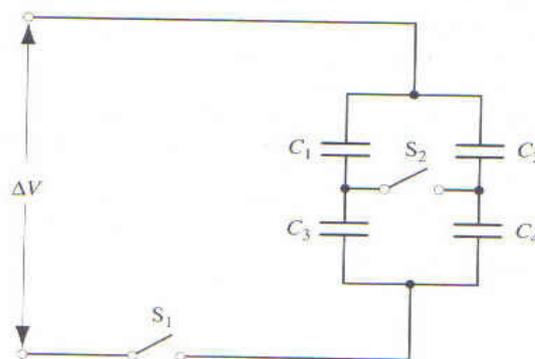


FIGURA 30-35. Problema 9.

10. Encuentre la capacitancia equivalente entre los puntos  $x$  y  $y$  de la figura 30-36. Suponga que  $C_2 = 10 \mu\text{F}$ , y que el resto de los capacitores son de  $4.0 \mu\text{F}$ . (Sugerencia: aplique una diferencia de potencial  $\Delta V$  entre  $x$  y  $y$  y anote todas las relaciones que contienen cargas y diferencias de potencial para los capacitores individuales.)

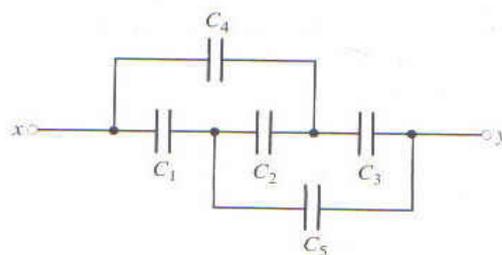


FIGURA 30-36. Problema 10.

11. Un capacitor está cargado hasta que su energía almacenada es 4.0 J y entonces se quita la batería de carga. Otro capacitor sin carga se conecta entonces a él en paralelo.  $a)$  Si la carga se distribuye uniformemente, ¿cuál será ahora la energía total guardada en los campos eléctricos?  $b)$  ¿A dónde fue el exceso de energía?
12. Un fluido con resistividad  $9.40 \Omega \cdot \text{m}$  penetra en el espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas lleno de aire de

110 pF. Cuando el espacio está completamente lleno de fluido, ¿qué resistencia hay entre ellas?

13. a) Calcule la densidad de energía del campo eléctrico a una distancia  $r$  de un electrón (supuestamente una partícula) en reposo. b) Ahora suponga que el electrón no es un punto sino una esfera de radio  $R$  en cuya superficie se distribuye uniformemente la carga del electrón. Calcule la energía asociada al campo eléctrico externo en el vacío de un electrón en función de  $R$ . c) Si ahora la relaciona con la masa del electrón, podrá calcular el valor de  $R$  por medio de  $E_0 = mc^2$ . Evalúe numéricamente este radio; a menudo se le conoce como radio del electrón.
14. Demuestre que las placas de un capacitor de placas paralelas se atraen entre sí con una fuerza dada por

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}$$

Pruebe lo anterior calculando el trabajo necesario para acrecentar la separación de las placas de  $x$  a  $x + dx$ , permaneciendo constante la carga  $q$ .

15. Con el uso del resultado del problema 14, demuestre que la fuerza por unidad de superficie (el *esfuerzo electrostático*) que actúa sobre ambas placas del capacitor está dada por  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ . En realidad, este resultado es generalmente verdadero en un conductor de cualquier forma, con un campo eléctrico  $\vec{E}$  en su superficie.
16. A una burbuja de jabón de radio  $R_0$  se le administra lentamente una carga  $q$ . A causa de la repulsión mutua de las cargas superficiales, el radio aumenta un poco a  $R$ . Debido a la expansión la presión del aire dentro de la burbuja desciende a  $p(V_0/V)$ , donde  $p$  es la presión atmosférica,  $V_0$  es el volumen inicial y  $V$  es el volumen final. Demuestre que

$$q^2 = 32\pi^2\epsilon_0 p R(R^3 - R_0^3)$$

[Sugerencia: considere las fuerzas que operan en un área pequeña de la burbuja cargada, prescindiendo de la tensión superficial. Las fuerzas se deben a i) la presión del gas, ii) la presión atmosférica y iii) el esfuerzo electrostático, Prob. 15.]

17. Una cámara cilíndrica de ionización está provista de un ánodo central de alambre de 0.180 mm de radio y de un cátodo coaxial cilíndrico de 11.0 mm de radio. Está llena de un gas cuya intensidad dieléctrica es de 2.20 MV/m. Determine la máxima diferencia de potencial que debe aplicarse entre el ánodo y el cátodo, para que el gas no experimente una ruptura eléctrica antes que la radiación penetre en la ventana de la cámara.
18. Un capacitor de placas paralelas está lleno con dos dieléctricos como se aprecia en la figura 30-37. Demuestre que la capacitancia está dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \left( \frac{\kappa_{e1} + \kappa_{e2}}{2} \right)$$

Verifique la fórmula anterior en los casos límite que se le ocurran. (Sugerencia: ¿puede justificar este arreglo como dos capacitores en paralelo?)

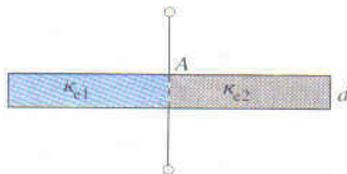


FIGURA 30-37. Problema 18.

19. Un capacitor de placas paralelas está lleno con dos dieléctricos como se ve en la figura 30-38. Demuestre que la capacitancia está dada por

$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d} \left( \frac{\kappa_{e1}\kappa_{e2}}{\kappa_{e1} + \kappa_{e2}} \right)$$

Verifique la fórmula anterior en todos los casos límite que se le ocurran. (Sugerencia: ¿puede justificar este arreglo como dos capacitores en serie?)



FIGURA 30-38. Problema 19.

20. ¿Cuál es la capacitancia del capacitor de la figura 30-39?

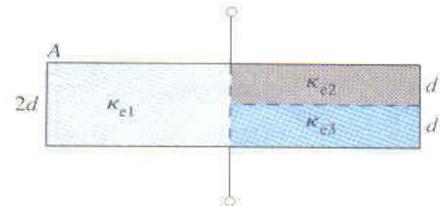


FIGURA 30-39. Problema 20.

21. Un capacitor de placas paralelas tiene placas de superficie  $A$  y una separación  $d$ , está cargado con una diferencia de potencial  $\Delta V$ . Después se desconecta la batería de carga y las placas se separan hasta quedar a una distancia de  $2d$  entre sí. Obtenga las expresiones en función de  $A$ , de  $d$  y de  $\Delta V$  en el caso de a) la nueva diferencia de potencial, b) la energía inicial y final almacenada, c) el trabajo necesario para separar las placas.
22. En el capacitor del problema resuelto 30-9 (Fig. 30-15), a) ¿qué fracción de energía se almacena en las zonas de aire?, b) ¿qué fracción se almacena en la lámina?
23. Un capacitor de placas paralelas tiene placas de superficie  $0.118 \text{ m}^2$  y una separación de  $1.22 \text{ cm}$ . Una batería las carga hasta alcanzar una diferencia de potencial de  $120 \text{ V}$  y luego se desconectan. Una lámina dieléctrica de  $4.30 \text{ mm}$  de espesor y de constante dieléctrica  $4.80$  se coloca entonces simétricamente entre ellas. a) Calcule la capacitancia antes de introducir la lámina. b) ¿Cuál es la capacitancia una vez colocada la lámina en su sitio? c) ¿Cuál es la carga libre  $q$  antes y después de insertarla? d) Determine el campo eléctrico en el espacio entre las placas y el dieléctrico. e) ¿Cuál es el campo eléctrico en el dieléctrico? f) Con la lámina en su sitio, ¿cuál es la diferencia de potencial entre ellas? g) ¿Cuánto trabajo externo se lleva a cabo en el proceso de insertar la lámina?
24. Una lámina dieléctrica de espesor  $b$  se introduce entre las placas de un capacitor de placas paralelas con una separación  $d$  entre ellas. Demuestre que la capacitancia está dada por

$$C = \frac{\kappa_e \epsilon_0 A}{\kappa_e d - b(\kappa_e - 1)}$$

(Sugerencia: Obtenga la fórmula siguiendo el patrón del Prob. 30-9.) ¿Predice esa fórmula el resultado numérico correcto del

problema? Compruebe que dé resultados razonables en los casos especiales de  $b = 0$ ,  $\kappa_c = 1$  y  $b = d$ .

## **P**ROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Con los resultados del ejercicio 19 encuentre la capacitancia equivalente entre dos puntos cualesquiera ( $A$  y  $B$  por ejemplo), separados por un capacitor en el arreglo infinito de ellos en la figura 30-26. Este problema se realiza muy fácilmente por iteración, pudiendo programarse y resolverse con una hoja de cálculo en menos de un minuto.
2. Repita el problema con un toroide en vez de hacerlo con una hoja infinita. Comience con una rejilla cuadrada de capacitores de  $10 \times 10$ . Una los dos bordes opuestos para construir un cilindro y después junte los dos extremos para formar un toroide (una forma de rosquilla). ¿Cuánto cambiaría la respuesta en caso de duplicar el tamaño de la rejilla original?

