TRATADO

DE

ALGEBRA ELEMENTAL,

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

LICENCIADO EN CIENCIAS, INGENIERO DE PUENTES Y CAMINOS APROBADO (CON DIPLOMA) POR LA ESCUELA CENTRAL DE PARIS, CATEDRÁTICO DE ÁLGEBRA SUPERIOR Y GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA UNIVERSIDAD DE MADRID, ETC.

OCTAVA EDICION.

MADRID:

IMPRENTA DE G. ALHAMBRA.

TRAVESÍA DE LA BALLLESTA, NÚM. 7.

1857.

OBRAS DE DON JUAN CORTÁZAR.

Memoria sobre el cálculo del interés. . . . . . 4 rs.

Tratado de aritmética, 9.ª *edicion*, *en rústica*. 1[illegible]

Tratado de álgebra elemental, 8.ª *edicion*, *en rústica*. . . . . 1[illegible]

Tratado de geometría elemental, 6.ª *edicion*, *en rústica*. . . . . 1[illegible]

Tratado de trigonometría, 4.ª *edicion*, *en rústica*. . . . . 1[illegible]

Tratado de álgebra superior, *en rústica*. . . . 14

Tratado de geometría analítica, *en rústica*. . . 34

Aritmética práctica para las escuelas primarias, *en holandesa*. 4

Librerías de Sanchez *calle de Carretas* 21, *y de* Martinez *calle de Relatores*.

ADVERTENCIA.

Esta edicion de nuestro tratado de álgebra elemental sale mejorada en varios puntos respecto de la anterior, como lo conocerán las personas inteligentes que comparen ambas ediciones.

De mas estará el decir que este y los otros tratados de matemáticas elementales que hemos publicado, están señalados en primera línea como obras de testo, y que son los únicos de esta ciencia conformes al programa oficial vigente.

ALGEBRA ELEMENTAL.

LIBRO PRIMERO.

CÁLCULO ALGÉBRICO.

CAPÍTULO I.

Nociones preliminares.

1. La resolucion de todo problema numérico tiene dos partes principales: la 1.ª consiste en hallar las relaciones que ligan á los datos y á las incógnitas, y la 2.ª en deducir de estas relaciones los valores de las incógnitas.

Ejemplo. *Dividir el número 52 en tres partes, tales que la mayor esceda á la mediana en 13, y esta á la menor en 9.*

Para resolver este problema por el razonamiento natural ú ordinario, hemos de observar que dicho problema tiene tres incógnitas, que son las tres partes en que se quiere dividir el número 52; y que, cualquiera que sea la incógnita que lleguemos á conocer, las otras dos se deducirán de ella inmediatamente. Asi, si conociésemos la parte menor, la mediana seria igual á la menor mas 9, y la mayor seria igual á la mediana mas 13. Si conociésemos la parte mediana, la mayor seria igual á la mediana mas 13, y la menor seria igual á la mediana menos 9. Finalmente, si conociésemos la parte mayor, la mediana se hallaria restando 13 de la mayor, y en seguida se hallaria la menor restando 9 de la mediana.

Esto supuesto, vamos á hallar primeramente la parte menor.

La parte mediana es igual á la menor mas 9, la parte ma-

Valv

yor es igual á la mediana mas 13, y por consiguiente la parte mayor es igual á la menor mas 22; luego la suma de las tres partes es igual á 3 veces la menor mas 22 mas 9, ó á 3 veces la menor mas 31. Luego la relacion entre los datos y la incógnita será:

3 veces la parte menor mas 31 componen 52.

Para deducir de esta relacion el valor de la incógnita, observo que 3 veces la parte menor es lo que falta á 31 para componer 52, ó lo que es igual, 3 veces la parte menor es la diferencia entre 52 y 31, que es 21; luego la parte menor valdrá la tercera parte de 21, que es 7.

Siendo 7 la parte menor, la mediana será 7 mas 9 ó 16, y la mayor 16 mas 13 ó 29.

Si quisiéramos hallar primeramente la parte mediana ó la parte mayor, se obtendria su valor por medio de un razonamiento análogo.

Si en el problema que acabamos de resolver, variase la magnitud de los datos, sin otra alteracion, el mismo razonamiento anterior nos daria los valores de las incógnitas; y el mismo razonamiento nos daria tambien los valores de las incógnitas, aun cuando el problema se enunciase de un modo general en los términos siguientes:

Dividir un número dado en tres partes, conociendo los escesos de la mayor á la mediana y de esta á la menor.

Para resolver este problema, hallaremos en primer lugar la relacion entre los datos y cualquiera de las tres incógnitas, por ejemplo la parte menor.

Para facilitar algo el razonamiento, llamaremos *primer esceso* al que lleva la parte mayor á la mediana, y *segundo esceso* al que lleva la mediana á la menor.

La parte mediana es igual á la menor mas el segundo esceso, la parte mayor es igual á la mediana mas el primer esceso, y por consiguiente la parte mayor es igual á la menor mas la suma de los dos escesos; luego la suma de las tres partes es igual á 3 veces la menor, mas el primer esceso, mas el duplo del segundo esceso. Luego la relacion entre los datos y la incógnita será:

3 veces la parte menor, mas el primer esceso, mas el duplo del segundo esceso componen el número dado.

Para deducir de esta relacion el valor de la incógnita, observo que 3 veces la parte menor es la diferencia entre el número dado y la suma del primer esceso y duplo del segundo; luego *la parte menor valdrá la tercera parte de la diferencia entre el número dado y la suma del primer esceso y duplo del segundo.*

Conociendo la parte menor, las otras dos se hallarán fácilmente.

Vemos que, si un problema está propuesto en términos generales, el valor de la incógnita nos da una regla para resolver con facilidad todo problema particular comprendido en el general de qué se trata.

Resolvamcs por medio de la regla, que acabamos de hallar, el problema particular anterior.

En primer lugar, la suma del primer esceso y del duplo del segundo será $13+2\times9=31$: restando esta suma del número dado 52, quedan 21; y tomando la tercera parte de esta diferencia, resultan 7 para la parte menor.

2. *Notacion algébrica.* Además de los signos $+$, $-$, $\times$, etc. conocidos ya, se usan en el álgebra ordinariamente las letras x, y, z, etc. para representar las incógnitas, y las letras a, b, c, etc. para representar los datos generales ó indeterminados, los cuales pueden ser números cualesquiera enteros, fraccionarios ó inconmensurables.

Ya hemos visto (*Aritm. núm.* 31) que para indicar el producto de varias cantidades literales, no hay mas que juntarlas sin interposicion de ningun signo. Asi, abc es el producto $a\times b\times c$.

Para indicar el producto de una cantidad literal por una numérica ó literal, se escribe el multiplicador, que en el álgebra se llama *coeficiente*, y á continuacion el multiplicando. Asi, $a\times8=8a$, $a\times m=ma$; las cantidades 8 y m son los coeficientes en estos productos.

Puesto que $a\times1=a$, se infiere que *toda cantidad tiene por coeficiente implícito á la unidad.*

Tambien hemos visto (*Aritm. núm.* 36), que para indicar una potencia de una cantidad, se escribe en la parte superior de la derecha de la cantidad el esponente, es decir, el número que indica las veces que la cantidad entra como factor del producto. Asi, $a^3=a\times a\times a$.

Sabemos (*Aritm. núm.* 36), que la primera potencia de una cantidad es esta misma cantidad; luego *toda cantidad tiene por esponente implícito á la unidad.*

Salvador [illegible]

Sabemos tambien, que para indicar una raiz, cuyo índice sea m, de una cantidad a, se escribe $\sqrt[m]{a}$.

Se llama *igualdad* la reunion por medio del signo $=$ de dos cantidades.

Primer miembro de una igualdad, es la cantidad que está á la izquierda del signo $=$, y *segundo miembro* la que está á la derecha.

Se llama *identidad* la igualdad cuyos dos miembros son idénticos, ó solo se diferencian en la forma. Asi, $a^2+1=a^2+1$, $(a+b)\,m=am+bm$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (*Aritmética núm.* 134) son identidades.

Se llama *ecuacion* la igualdad que contiene una ó varias incógnitas. Asi, $4+x=7$, $3x^2=2y+9$ son ecuaciones.

NOTA. Obsérvese con cuidado, pues es de gran importancia, la diferencia que hay entre identidad y ecuacion: la primera se verifica por cualesquiera valores de sus letras, mientras que la segunda solo se verifica por ciertos valores de la incógnita ó incógnitas que contenga.

4. El razonamiento que nos ha conducido á la resolucion del problema particular (*núm.* 1), se puede simplicar en virtud de la notacion algébrica.

Sea x la parte menor, la mediana será $x+9$, y la mayor será $x+9+13$. La suma de estas tres partes es $x+x+9+x+9+13$, ó $3x+31$: luego la relacion entre los datos y la incógnita, ó la ecuacion que liga á estas cantidades, será

$$3x+31=52.$$

Para deducir de esta ecuacion el valor de x, resto de ambos miembros 31, y tendré

$$3x=52-31,$$

ó bien
$$3x=21;$$

y partiendo ahora ambos miembros por 3, resulta (*Arimética núm.* 16)

$$x=\frac{21}{3}=7.$$

5. Apliquemos este mismo procedimiento al problema general (*núm.* 1).

Sea a el número dado que se trata de dividir, e el esceso de la parte mayor á la mediana, e' el esceso de la parte mediana á la menor, y x la parte menor: la parte mediana será $x+e'$, la mayor será $x+e'+e$. La suma de la tres partes será $x+x+e'+x+e'+e$, ó $3x+2e'+e$: luego la ecuacion que liga á los datos y á la incógnita, será

$$3x+2e'+e=a.$$

Para hallar el valor de x, resto e y $2e'$ de ambos miembros, y tendré

$$3x=a-e-2e';$$

partiendo ahora ambos miembros por 3, será (*Aritm. núm.* 16)

$$x=\frac{a-e-2e'}{3}.$$

Esta espresion de la incógnita se llama *fórmula*, porque traducida al lenguaje vulgar nos da una regla para resolver todo problema particular comprendido en el general propuesto. La regla actual es la siguiente: *la parte menor se halla restando del número dado el esceso de la parte mayor á la mediana y el duplo del esceso de la mediana á la menor, y dividiendo el resto por* 3.

La fórmula es, pues, una espresion que indica las operaciones que se deben hacer con los datos para hallar el valor de la incógnita de todo problema particular comprendido en el general á que corresponde dicha fórmula.

Segun esto, por medio de la fórmula $x=\frac{a-e-2e'}{3}$ podremos resolver, sin necesidad de traducirla al lenguaje vulgar, cualquier problema particular comprendido en el general (*núm.* 1).

Asi, para resolver el problema particular (*núm.* 1), tendremos $a=52$, $e=13$, $e'=9$; y por consiguiente

$$x=\frac{52-13-2.9}{3}=\frac{21}{3}=7.$$

6. Acabamos de ver que por medio del lenguaje simbólico ó razonamiento artificial se simplifica mucho la resolucion de los problemas: este lenguaje simbólico ó razonamiento artificial, aplicado á la resolucion de los problemas matemáticos, se llama *álgebra*.

7. Se llama *cantidad algébrica* ó *literal*, ó *espresion algébrica* ó *literal* una reunion cualquiera de letras ligadas por medio de los signos de las operaciones ordinarias.

Se llama cantidad *racional* la cantidad que no contiene ningun signo radical, é *irracional* ó *radical* la cantidad que contiene algun signo radical.

Llamaremos cantidad algébrica *entera* á la cantidad racional que no contiene ningun denominador literal. Asi, las cantidades algébricas $4a^2b$, $\frac{2}{3}abc - \frac{5}{8}c^3$ son enteras. En el caso en que la cantidad tenga algun denominador literal, se llama *fraccionaria* ó *fraccion algébrica*.

Asi, $\frac{a^2-b^2}{c}$ es una fraccion algébrica.

Una cantidad sola, ó que no está ligada á otra por el signo $+$ ó $-$, se llama *monomio*. Asi, las cantidades $4a^2b^3c$ (1), $\sqrt{a^2+b^2}$; $\frac{a^2+b^2-c^2}{a-b}$ son monomios.

Una cantidad que se compone de varios monomios ligados por los signos $+$ y $-$ se llama *polinomio*. Asi, la cantidad $a - \sqrt{a^2+b^2} + \frac{a^2+b^2-c^2}{a-b}$ es un polinomio.

Términos de un polinomio son los monomios que lo componen.

Asi, el polinomio que acabamos de escribir, tienen tres términos.

Se llama *binomio*, *trinomio*, etc. el polinomio que tiene dos términos, tres términos, etc.

Se llama *grado* de un monomio entero con respecto á una de sus letras el esponente de esta letra. Asi, el monomio $4a^2b^3c$ es de 2.° grado con respecto á la letra a.

Grado de un monomio entero con respecto á varias de sus letras es la suma de los esponentes de estas letras. Asi, el monomio $4a^2b^3c$ es de 5.° grado con respecto á las letras a y b.

Cuando se dice simplemente *grado* de un monomio entero se entiende el grado de este monomio con respecto á todas sus letras. Asi, el monomio $4a^2b^3c$ es de 6.° grado.

Grado de un polinomio con respecto á una de sus letras es el mayor esponente de esta letra; y *grado* de un polinomio con respecto á varias de sus letras es la mayor suma de los esponentes de estas letras en los términos del polinomio. Asi, el polinomio $4a^3b^2c - 5ab^2c^2 + 6bc^4$ es de tercer grado con

(1) Léase $4a$ dos b tres c.

respecto á letra a, de 2.° con respecto á la letra b, y de 4.° con respecto á la letra c.

Se llama polinomio *homogéneo* el polinomio cuyos términos son todos del mismo grado.

El polinomio $4a^2b-3ab^2+b^3$ es homogéneo, pues todos sus términos son de tercer grado.

Se llama *grado* de un polinomio homogéneo el grado de cada uno de sus términos.

El polinomio $4a^2b-3ab^2+b^3$ es de tercer grado.

8. Un número solo sin signo, ó precedido del signo $+$, se llama cantidad *positiva* ó número *positivo*. Asi, 8, $+\frac{2}{3}$ son cantidades positivas.

Un número solo precedido del signo $-$ se llama cantidad *negativa* ó número *negativo*. Asi, -8, $-\frac{2}{3}$ son cantidades negativas.

Para dar á conocer el orígen de las cantidades negativas, supongamos que en la espresion $a-b$ se den á las letras a y b, los valores respectivos 8 y 11: dicha espresion valdrá $8-11$. Mas, restar 11 de un número, equivale á restar primeramente 8 y en seguida 3; luego $8-11=8-8-3=-3$, puesto que $8-8$ es cero.

Segun esto, *siempre que haya que restar de un número otro mayor, el resultado es negativo; y se hallará este resultado, restando el número menor del mayor, y anteponiendo al resto el signo* $-$.

Asi, $5-7=-2$, $1-5=-4$.

9. Llamaremos *menor* de dos números cualesquiera positivos ó negativos á aquel de los dos números á quien falte alguna cantidad positiva para ser igual al otro número.

Segun esta definicion algébrica de la palabra *menor*, serán ciertas las dos proposiciones siguientes:

1.ª *Toda cantidad negativa es menor que cero.*

2.ª *De dos cantidades negativas la menor es aquella cuyo valor absoluto* (a) *es mayor.*

1.° Sea la cantidad negativa -8; añadiéndola 8, resulta

(*a*) Se entiende por valor *absoluto* de un número el mismo número sin ningun signo. Asi, el valor absoluto de $+8$ ó de -8 es 8.

$-8+8=0$; es decir, que al número -8 le falta la cantidad positiva 8 para valer tanto como cero; luego $-8<0$.

2.° Añadamos 5 á la cantidad negativa -8, y será la suma $-8+5=-3$; es decir, que al número -8 le falta la cantidad positiva 5 para valer tanto como -3; luego $-8<-3$.

CAPÍTULO II.

Operaciones con los números negativos.

Artículo 1.°

Adicion de los números negativos.

10. Se llama *suma* de varios números positivos y negativos, ó todos negativos, el polinomio numérico que resulta juntando dichos números con los signos que tienen.

Segun esta definicion, la suma de los números 4, 7, -3 y -5, que puede indicarse asi: $4+7+(-3)+(-5)$ es $4+7-3-5$. Efectuando las operaciones en el órden que están indicadas, dicha suma es 3.

La suma de los números -6, -8 y -9 será $-6-8-9=-23$.

Artículo 2.°

Sustraccion de los números negativos.

11. Se llama *resto* ó *diferencia* de dos números negativos, ó uno positivo y otro negativo, otro número que sumado con el sustraendo da por suma el minuendo.

Esta definicion es la misma que la del resto ó diferencia de dos números absolutos dada en la aritmética.

Para restar de un número positivo ó negativo otro negativo, se suma el minuendo con el sustraendo mudado el signo.

En efecto, supongamos que del número 5 se quiera restar el número -4: la diferencia indicada será $5-(-4)$. La diferencia es un número que sumado con el sustraendo da el minuendo; luego la diferencia será en este caso $5+4$; pues sumando $5+4$ con el sustraendo -4, resulta $5+4-4=5$.

Ejemplos. 1.° $14-(-6)=14+6=20$.
2.° $-14-(-6)=-14+6=-8$.

Artículo 3.°

Multiplicacion de los números negativos.

12. La definicion general del producto de dos números dada en la aritmética, definicion que comprende tambien á los números negativos, es la siguiente: se llama *producto* de dos números un tercer número que es respecto del multiplicando lo que el multiplicador es respecto de la unidad.

Segun esta definicion, el producto de los valores absolutos de los dos factores será el valor absoluto del producto; y el signo del producto debe ser respecto del signo del multiplicando lo que el signo del multiplicador es respecto del signo de la unidad, esto es, respecto del signo $+$.

Por consiguiente, si el multiplicador tiene el signo $+$, es decir, igual signo que la unidad, el signo del producto debe ser el mismo que el del multiplicando: si pues a y b son los valores absolutos de dos números cualesquiera, y p el producto de a por b, será $+a\times+b=+p$, $-a\times+b=-p$.

Si el multiplicador tiene el signo $-$, es decir, signo contrario al de la unidad, el producto tendrá signo contrario al del multiplicando: luego $+a\times-b=-p$, $-a\times-b=+p$.

Luego *el producto de dos números del mismo signo es positivo, y el de dos números de diferente signo es negativo.*

Para enunciar abreviadamente este resultado, se suele decir: $+$ por $+$ da $+$; $-$ por $+$ da $-$; $+$ por $-$ da $-$; y $-$ por $-$ da $+$.

13. El *signo de un producto de cualquier número de factores no varía, aunque se mude el órden de los factores.*

En efecto, es evidente que si el número de factores negativos es par, el producto es positivo; y que si el número de factores negativos es impar, el producto es negativo. Mas, aunque se mude el órden de los factores de un producto, el número de factores negativos no varía; luego tampoco varía el signo del producto.

Nota. Como (*Comp.*[to] *de la Aritm., núm.* 19) el valor absoluto de cualquier número de factores no varía mudando el órden de los factores, podremos decir ahora que *el producto de varios factores no se altera en valor absoluto ni en signo, aunque se mude el órden de los factores.*

14. *Si uno cualquiera de los factores de un producto muda de signo, el producto muda de signo.*

En efecto, si el número de factores negativos de un producto es par, en cuyo caso el producto es positivo, despues de mudar el signo á uno de los factores, positivo ó negativo, el número de factores negativos será impar, y por tanto el producto será negativo. Si el número de factores negativos de un producto es impar, en cuyo caso el producto es negativo, despues de mudar el signo á uno cualquiera de los factores, el número de factores negativos será par, y por tanto el producto será positivo.

Corolario. *Si dos factores cualesquiera de un producto mudan de signo, el producto no muda de signo.*

Artículo 4.°

Division de los números negativos.

15. Se llama *cociente* de dos números negativos, ó uno positivo y otro negativo, un tercer número que multiplicado por el divisor da por producto el dividendo.

Esta definicion es la misma que la del cociente de dos números absolutos, dada en la aritmética.

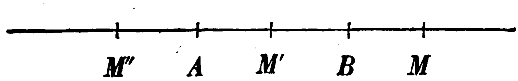
Segun esta definicion, si llamamos c al cociente de los dos números absolutos a y b, tendremos

$$\frac{+a}{+b}=+c,\ \frac{-a}{+b}=-c,\ \frac{+a}{-b}=-c,\ \frac{-a}{-b}=+c.$$

Luego el *cociente de dos números del mismo signo es positivo, y el de dos números de diferente signo es negativo;* ó usando un lenguaje abreviado: $+$ partido por $+$ da $+$; $-$ partido por $+$ da $-$; $+$ partido por $-$ da $-$; y $-$ partido por $-$ da $+$.

Artículo 5.°

Ventajas de la admision de las cantidades negativas.



* 16. Supongamos que sobre una línea indefinida AB tengamos dos puntos A y B, á cuya distancia AB llamo a, y que un móvil ocupe sucesivamente las tres posiciones M, M', M''; sea b la distancia del móvil al punto B; y supongamos tam-

bien, que conocidas a y b, se quiera hallar la distancia del móvil al punto A, á la cual llamo x.

Cuando el móvil se halla en M, es evidente que $x=a+b$.

Cuando el móvil se halla en M', será $x=a-b$.

Cuando el móvil se halla en M'', será $x=b-a$.

Vemos que para hallar la distancia del móvil al punto A, en las tres posiciones M, M', M'', se necesitan tres ecuaciones diferentes.

Mas, si convenimos en considerar como positivas las distancias contadas en el sentido ABM, y como negativas las distancias contadas en el sentido opuesto BAM'', la primera ecuacion servirá para los tres casos.

En efecto, segun este convenio, cuando el móvil se halla en M', será $x=AM'$, $b=-BM'$; sustituyendo estos valores en la primera ecuacion, resulta

$$AM'=AB+-BM',$$

y como (*núm.* 10) $AB+-BM'=AB-BM'$, será $AM'=AB-BM'$, igualdad evidente, la misma que hubiera resultado de la ecuacion del segundo caso $x=a-b$.

Cuando el móvil se halla en M'', será, segun dicho convenio, $x=-AM''$, $b=-BM''$: sustituyendo estos valores en la primera ecuacion, tendremos

$$-AM''=AB+-BM''=AB-BM'',$$

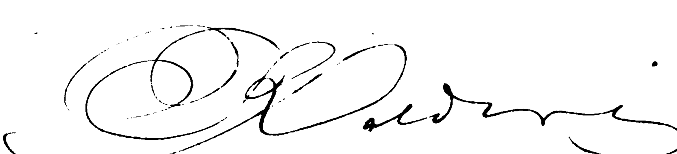
y como (*núm.* 8) $AB-BM''=-(BM''-AB)$, resulta

$$-AM''=-(BM''-AB), \text{ ó } AM''=BM''-AB,$$

la misma igualdad que resultaria de la ecuacion $x=b-a$ del tercer caso.

Vemos, pues, que conviniendo en considerar como precedidas del signo $-$, ó como negativas, á las cantidades opuestas á las positivas ó absolutas, conseguimos la ventaja de que la ecuacion hallada para el primer caso convenga tambien á los otros dos.

Nota. Segun lo que acabamos de ver en este problema, y lo que veremos en adelante, la introduccion de las cantidades negativas en el cálculo tiene por objeto el *generalizar* las ecuaciones.



Artículo 6.°

Valores numéricos de las cantidades literales.

---

17. En adelante una letra, tal como a, puede representar un número cualquiera positivo ó negativo.

Se llama valor *numérico* de una espresion algébrica el número que resulta reemplazando sus letras por números particulares, y efectuando las operaciones indicadas.

Asi, el valor numérico del monomio $4ab^3$, cuando $a=3$ y $b=2$ es $4\times3\times2^3=96$.

El valor del mismo monomio cuando $a=3$ y $b=-2$, será $4\times3\times(-2)^3=4\times3\times-2\times-2\times-2=-96$.

El valor numérico del polinomio $4a^2b-3ab^2+2b^3-4a^3-5abc$, cuando $a=1$, $b=-2$, $c=3$, es
$4\times1^2\times-2-3\times1\times(-2)^2+2\times(-2)^3-4\times1^3-5\times1\times-2\times3$
$=-8-12-16-4+30=-10$.

El valor numérico del polinomio x^3-3x^2+5x-6, cuando $x=2$, es $2^3-3\times2^2+5\times2-6=8-12+10-6=0$.

18. *El valor numérico de un polinomio no varía, cualquiera que sea el órden en que se coloquen sus términos, con tal que estos conserven sus signos.*

Pues todo término aditivo, ó que tiene el signo $+$, contribuye, cualquiera que sea el lugar que ocupe en el polinomio, á que el resultado final salga aumentado en su valor absoluto; y todo término sustractivo, ó que tiene el signo $-$, contribuye cualquiera que sea el lugar que ocupe en el polinomio, á que el resultado salga disminuido en su valor absoluto: por consiguiente el polinomio no se alterará, aunque varíe el órden de colocacion de sus términos, con tal que éstos conserven sus signos.

19. Se llaman términos *semejantes* los términos de un polinomio que tienen la misma parte literal.

Asi, en el polinomio $6ab^2+8a^2b+3ab^2-5a^3-6ba^2$ son semejantes los términos $6ab^2$ y $3ab^2$, pues ambos tienen la misma parte literal ab^2. Tambien son semejantes en este polinomio los términos $8a^2b$ y $6ba^2$, pues a^2b y ba^2 son cantidades iguales (*Aritm. núm.* 33 *y Comp.*[to] *de la Aritm. núm.* 19).

Reducir á un solo término varios términos de un polinomio semejantes entre sí.

Sea el polinomio $6ab^2 - 4a^2b + 5ab^2 - 9a^2b$.

Como el polinomio no varía, cualquiera que sea el órden en que se coloquen sus términos, podremos reducir los dos términos semejantes $6ab^2$ y $5ab^2$ á uno solo; y es evidente que $6ab^2 + 5ab^2 = 11ab^2$. Reduciremos ahora á un solo término los dos términos semejantes $4a^2b$ y $9a^2b$, y es tambien evidente que $-4a^2b - 9a^2b = -13a^2b$. Luego el polinomio propuesto equivale al polinomio $11ab^2 - 13a^2b$.

Podremos, pues, enunciar abreviadamente la siguiente regla: *para reducir dos términos semejantes, que tienen el mismo signo, á uno solo, se suman los coeficientes, y al resultado se antepone el signo comun.*

Sea ahora el polinomio $6ab^2 + 4a^2b - 5ab^2 - 9a^2b$.
Tenemos $6ab^2 - 5ab^2 = ab^2, + 4a^2b - 9a^2b = -5a^2b$: luego el polinomio propuesto equivale á $ab^2 - 5a^2b$.

Luego tambien podemos enunciar abreviadamente esta otra regla: *para reducir dos términos semejantes, que tienen diferente signo, á uno solo, se restan los coeficientes, y al resultado se antepone el signo del mayor.*

Si en un polinomio hay mas que dos términos semejantes entre sí, se reducen los dos primeros á uno solo, despues se reducen este y el tercero á uno solo, y asi sucesivamente; ó bien, se reducen todos los términos aditivos á uno solo, todos los sustractivos á uno solo, y en seguida se reducen á uno solo los dos términos que han resultado de las dos primeras reducciones.

Ejemplo. $5ab^2 - 8ab^2 + 6ab^2 + 9ab^2 - 8ab^2$.

Diré: $5ab^2 - 8ab^2 = -3ab^2, -3ab^2 + 6ab^2 = 3ab^2, 3ab^2 + 9ab^2 = 12ab^2, 12ab^2 - 8ab^2 = 4ab^2$, ó bien $5ab^2 + 6ab^2 + 9ab^2 = 20ab^2, -8ab^2 - 8ab^2 = -16ab^2, 20ab^2 - 16ab^2 = 4ab^2$.

Cualquiera que sea el órden en que se efectúen estas reducciones, el resultado final será siempre el mismo; puesto que un polinomio no varía, aunque se mude el órden de colocacion de sus términos, con tal que estos conserven sus signos.

Nota. Hemos supuesto, para hallar las reglas de la reduccion de los términos semejantes, que los coeficientes eran conmensurables: en la multiplicacion de un polinomio por un monomio se demostrarán dichas reglas de una manera general.

CAPÍTULO III.

Operaciones fundamentales.

Artículo 1.°

Adicion de las cantidades literales enteras.

20. Se llama *suma algébrica*, ó simplemente *suma*, de varias cantidades literales un monomio ó polinomio cuyo valor numérico equivalga siempre á la suma algébrica de los valores numéricos de dichas cantidades.

Asi, la suma de las cantidades a, $e+d-e$ y $f-g$ debe ser una espresion cuyo valor numérico sea siempre la suma de los valores numéricos de dichas cantidades.

Para sumar cantidades literales, se forma un polinomio con todos los términos de las cantidades propuestas, conservando dichos términos los signos que tienen en los sumandos.

Sean las cantidades a, $c+d-e$ y $f-g$: la suma indicada de estas cantidades será (*Aritm. núm.* 31) $a+(c+d-e)+(f-g)$: digo que esta suma indicada es igual á $a+c+d-e+f-g$.

En efecto, el trinomio $a+(c+d-e)+(f-g)$ puede escribirse (*núm.* 18) asi: $(c+d-e)+a+(f-g)$, que significa lo mismo que $c+d-e+a+(f-g)$. En este polinomio puede colocarse al principio el término último $(f-g)$, y por tanto este polinomio equivale al polinomio $(f-g)+c+d-e+a$, que significa lo mismo que $f-g+c+d-e+a$, y este equivale al polinomio $a+c+d-e+f-g$.

Ejemplo. Hallar la suma de los polinomios $4a^2b-5ab^2+8b^3-a^3$, $6a^3+9a^2b-5b^3$, a^2b+5ab^2.

Disposicion de esta operacion.

$$\begin{array}{l} 4a^2b-5ab^2+8b^3-a^3 \\ 6a^3+9a^2b-5b^3 \\ \;a^2b+5ab^2 \\ \hline \end{array}$$

Suma...$4a^2b-5ab^2+8b^3-a^3+6a^3+9a^2b-5b^3+a^2b+5ab^2$; ó reduciendo términos semejantes, $14a^2b+3b^3+5a^3$.

ARTÍCULO 2.°

Sustraccion de las cantidades literales enteras.

21. Se llama *diferencia algébrica* ó *resto algébrico*, ó simplemente *diferencia* ó *resto* de dos cantidades literales, otra cantidad que sumada con el sustraendo da por suma el minuendo.

Para restar una cantidad literal de otra, se escribe el minuendo, y á continuacion los términos del sustraendo con los signos mudados.

Sea el minuendo el monomio ó polinomio M, y el sustraendo el polinomio $c-b-c+d$: digo que

$$M-(a-b-c+d)=M-a+b+c-d.$$

En efecto, sumando la cantidad $M-a+b+c-d$ con el sustraendo $a-b-c+d$, la suma es (*núm.* 20)

$$M-a+b+c-d+a-b-c+d=M;$$

luego, segun la definicion, $M-a+b+c-d$ es el resto.

Ejemplo. Restar del polinomio $14a^2b-5ab^2+8b^3-a^3$ el polinomio $6a^3+9a^2b-5b^3$.

Disposicion de esta operacion.

$$\begin{array}{l} 14a^2b-5ab^2+8b^3-a^3 \\ \;6a^3\;+9a^2b-5b^3 \\ \hline \textit{Resto}....14a^2b-5ab^2+8b^3-a^3-6a^3-9a^2b+5b^3, \end{array}$$

ó efectuando la reduccion, $5a^2b-5ab^2+13b^3-7a^3$.

NOTA. Acabamos de demostrar que

$$M-(a-b-c+d)=M-a+b+c-d.$$

A veces conviene reemplazar el segundo miembro de esta igualdad por el primero (*Aritm. núm.* 32, *nota*), transformacion que enunciaremos del modo siguiente: *siempre que se ponga el signo — delante de un paréntesis, se mudarán los signos á los términos que se escriban dentro;* ó bien, *cuando se quiera mudar los signos á varios términos de un polinomio, sin que este se altere, se escribirán dichos términos con los signos mudados dentro de un paréntesis, y se antepondrá al paréntesis el signo —.*

Asi,
$$a-b+c=a-(b-c),$$
$$a^2-b^2-c^2+2bc=a^2-(b^2+c^2-2bc).$$

Artículo 3.°

Multiplicacion de las cantidades literales enteras.

---

§. 1.° Nociones preliminares.

22. Se llama *producto* de varias cantidades literales una espresion cuyo valor numérico es siempre igual al producto de los valores numéricos de los factores.

El producto de dos potencias de una cantidad es una potencia de la misma cantidad cuyo esponente es la suma de los esponentes de los factores.

Sean a^3 y a^2 dos potencias de la cantidad a: digo que

$$a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5.$$

En efecto, $a^3 \times a^2 = aaa \times aa$: pero está demostrado (*Comp.° de la Aritm. núm.* 20) que este producto es igual al producto $aaaaa = a^5$; luego $a^3 \times a^2 = a^5$.

Repitamos la demostracion, tomando esponentes indeterminados.

Vamos á demostrar que $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

En efecto, $a^m = aaa\ldots$, entrando m veces por factor la a,
$a^n = aa\ldots$, entrando n veces por factor la a;
luego $a^m \times a^n = aaa\ldots \times aa\ldots$; y como (*Comp.*^{to} *de la Arit. número* 20) $aaa\ldots \times aa\ldots = aaaaa\ldots$ en donde la a entra $m+n$ veces por factor, será $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Nota. La igualdad $a^m \times a^n = a^{m+n}$ sirve, como toda igualdad (*Aritm. núm.* 32, *nota*), unas veces para reemplazar el primer miembro por el segundo, y otras para reemplazar el segundo miembro por el primero. Si en el caso actual tenemos por objeto reemplazar el primer miembro por el segundo, se enunciará el teorema abreviadamente en los términos siguientes: *para multiplicar cantidades iguales, se suman sus esponentes.*

§. 2.° Multiplicacion de monomios.

---

23. *Para multiplicar un monomio por otro monomio, se multiplican los coeficientes, se suman los esponentes de las letras iguales, y las letras desiguales entran en el producto del mismo modo que en los factores.*

En efecto, $5a^3b^4 \times 8a^2bc^2 = 5.a^3.b^4.8.a^2.b.c^2$ (*Comp.*[to] *de la Arit. núm.* 20). Ahora, segun el mismo número de la Aritmética, el producto último equivale al producto de varios productos $5.8 \times a^3.a^2 \times b^4.b \times c^2$; y pues $a^3.a^2 = a^{3+2}$, $b^4.b = b^{4+1}$ (*Números* 22 y 2), será el producto $5a^3b^4 \times 8a^2bc^2 = 5.8.a^{3+2}.b^{4+1}.c^2$, conforme al enunciado de la regla.

Ejemplos. 1.° $6a^3b^2c^4f^2 \times 5a^4b = 30a^7b^3c^4f^2$,

2.° $-a^4b^2c^3 \times 5a^3b = -5a^7b^3c^3$,

3.° $-3a \times -bc^2 = 3abc^2$.

§. 3.° MULTIPLICACION DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO.

24. *Para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplica cada término del polinomio por el monomio, y la suma de los productos parciales será el producto total.*

Sea $a+b+c$ el multiplicando, cuyos términos son en primer lugar todos aditivos, enteros, fraccionarios ó inconmensurables; sea m el multiplicador, entero, fraccionario ó inconmensurable, positivo ó negativo: digo que en todos casos es

$$(a+b+c)m = am + bm + cm.$$

1.° Sea m un número positivo entero, por ejemplo 4: tendremos evidentemente

$$(a+b+c)\,4 = a \times 4 + b \times 4 + c \times 4,$$

pues haciéndose 4 veces mayor cada una de las partes de un todo, queda el todo hecho 4 veces mayor.

2.° Sea m un número positivo fraccionario, es decir, un quebrado ó un mixto, que siempre puede reducirse á un quebrado ordinario, tal como $\frac{7}{8}$: el producto indicado será $(a+b+c) \times \frac{7}{8}$. Este producto significa $\frac{7}{8}$ de $a+b+c$ (*Aritmética, núm.* 100); y es evidente que tomando $\frac{7}{8}$ de cada una de las partes del multiplicando, tendremos $\frac{7}{8}$ del todo; luego

$$(a+b+c) \times \tfrac{7}{8} = a \times \tfrac{7}{8} + b \times \tfrac{7}{8} + c \times \tfrac{7}{8}.$$

3.° Sea m un número positivo inconmensurable, m' un valor conmensurable mayor ó menor que m, pero tan próximo á m como se quiera: segun el caso anterior,

$$(a+b+c)\,m' = am' + bm' + cm'.$$

Ahora, el límite del primer miembro es $(a+b+c)\,m$, y el del segundo es $am+bm+cm$; luego, segun el teorema de los límites (*Comp. de la Aritm.* 15),

$$(a+b+c)\,m=am+bm+cm.$$

4.° Sea ahora m un número negativo $-n$, entero, fraccionario ó inconmensurable: tenemos, segun queda demostrado,

$$(a+b+c)\times n=an+bn+cn;$$

mudando los signos á ambos miembros, y recordando que para mudar el signo al primer miembro, basta mudar el signo al factor n (*núm.* 14), tendremos

$$(a+b+c)\times -n=-an-bn-cn=a\times -n+b\times -n+c\times -n.$$

Nos falta ahora demostrar el teorema en el caso en que el multiplicando consta de términos aditivos y sustractivos.

Sea el multiplicando $a-b-c+d$, que puede ser positivo ó negativo.

1.° Sea k el valor positivo del multiplicando, esto es,

$$a-b-c+d=k:$$

añadiendo á ambos miembros $b+c$, será

$$a-b-c+d+b+c=k+b+c,$$

ó

$$a+d=k+b+c.$$

Por consiguiente, siendo m positivo ó negativo, $(a+d)m=(k+b+c)\,m$. Segun queda demostrado para todos los casos en que el multiplicando consta de términos todos aditivos, será

$$am+dm=km+bm+cm;$$

y restando $bm+cm$ de ambos miembros, resulta

$$am-bm-cm+dm=km=(a-b-c+d)m.$$

2.° Sea $-k$ el valor negativo del multiplicando, esto es,

$$a-b-c+d=-k;$$

añadiendo $k+b+c$ á ambos miembros, será

$$a-b-c+d+k+b+c=k+b+c-k,$$

ó

$$a+d+k=b+c.$$

Por consiguiente, siendo m positivo ó negativo,

$$am+dm+km=bm+cm,$$

y restando ahora de ambos miembros $km+bm+cm$, será

$$am-bm-cm+dm=-km=(a-b-c+d)m.$$

Queda demostrada la regla en todos los casos.

Nota. Segun la igualdad

$$(a-b-c+d)m=am-bm-cm+dm,$$

toda vez que un número sea factor comun á varios términos de un polinomio, se podrá escribir dicho factor comun fuera de un paréntesis, y dentro los números por quienes está multiplicado; y esto demuestra generalmente las reglas dadas (*núm.* 19) para la reduccion de términos semejantes.

Asi, $a^2x - b^2x + c^2x + a^2b$, se podrá escribir:

$$(a^2 - b^2 + c^2)x + a^2b,$$

ó de este otro modo:

$$\left.\begin{array}{r} a^2 \\ -b^2 \\ +c^2 \end{array}\right| x + a^2b.$$

Si dado el polinomio $\sqrt{3}.\ a^2b - 5a^2b + \frac{3}{\sqrt[3]{2}}a^2b$, queremos reducir sus tres términos semejantes á uno solo, separaremos el factor comun a^2b, y tendremos

$$\left(\sqrt{3} - 5 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)a^2b.$$

§. 4.° Multiplicacion de polinomios.

25. *Para multiplicar un polinomio por otro polinomio, se multiplica el multiplicando por cada término del multiplicador, y la suma de los productos parciales será el producto total.*

Sea el multiplicando $a - b + c$, y el multiplicador $d - e - f$, polinomios cualesquiera positivos ó negativos: digo que

$$(a - b + c)(d - e - f) = (a - b + c)d + (a - b + c) \times -e$$
$$+ (a - b + c) \times -f.$$

En efecto, sea m el valor positivo ó negativo del multiplicando $a - b + c$: tendremos

$$(a - b + c)(d - e - f) = m(d - e - f).$$

Como puede mudarse el órden de los factores de un producto sin que este varíe (*núm.* 13, *nota*), el producto propuesto será igual á $(d - e - f)m$. Segun la regla de la multiplicacion de un polinomio por un monomio, es

$$(d - e - f)m = dm - em - fm = md + m \times - e + m \times f.$$

Luego poniendo en lugar de m su igual $a - b + c$, será

$$(a - b + c)(d - e - f) = (a - b + c)d + (a - b + c) \times - e.$$
$$+ (a - b + c) \times - f.$$

Ejemplo. Supongamos que se quiera multiplicar el polinomio $4a^2b^2 + 5a^4 - 2a^3b$ por el polinomio $2ab^2 + a^3 - 4a^2b$.

Para facilitar la reduccion de los productos parciales semejantes, conviene *ordenar* los polinomios con respecto á una letra, llamada *letra principal*; es decir, conviene colocar sus términos de modo que los esponentes de dicha letra vayan contínuamente disminuyendo (*a*).

Ordeno, pues, estos dos polinomios con respecto á la letra a, que tomo por principal, y dispongo la operacion como sigue:

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Multiplicando} & 5a^4 & -\ 2a^3b & +\ 4a^2b^2 & & & \\
\text{Multiplicador} & a^3 & -\ 4a^2b & +\ 2a\,b^2 & & & \\
\hline
\text{Productos par-} & \left\{\begin{array}{l} 5a^7 \\ \\ \\ \end{array}\right. & -\ 2a^6b & +\ 4a^5b^2 & & & \\
\text{ciales.} & & -20a^6b & +\ 8a^5b^2 & -\ 16a^4b^3 & & \\
 & & & +\ 10a^5b^2 & -\ 4a^4b^3 & +\ 8a^3b^4 & \\
\hline
\text{Producto. . .} & 5a^7 & -22a^6b & +\ 22a^5b^2 & -20a^4b^3 & +\ 8a^3b^4. &
\end{array}$$

*26. Si la letra principal se hálla con un mismo esponente en varios términos de un polinomio, se ordenará dicho polinomio, reduciendo antes todos estos términos á uno solo (*Núm.* 24, *nota*).

Ejemplo. Multiplicar el polinomio $2a^2x^2 - 3abx^2 + 2b^2x^2 - 5b^3x + 6ab^2x + b^4$ por el polinomio $ax + bx + ab$.

Disposicion.

$$\begin{array}{r|l|l|l}
2a^2 & x^2 + 6ab^2 & x + b^4 & \\
-3ab & \quad -\ 5b^3 & & \\
+2b^2 & & & \\
 & & & \\
a & x +\ ab & & \\
+b & & & \\
\hline
2a^3 & x^3 + 6a^2b^2 & x^2 +\ ab^4 & x \\
-3a^2b & \quad -5ab^3 & \quad +\ b^5 & \\
+2ab^2 & \quad +6ab^3 & & \\
+2a^2b & \quad -5b^4 & & \\
-3ab^2 & & & \\
+2b^3 & & & \\
 & +2a^3b & x^2 + 6a^2b^3 & x + ab^5 \\
 & -3a^2b^2 & \quad -5ab^4 & \\
 & +2ab^3 & & \\
\hline
2a^3 & x^3 + 2a^3b & x^2 + 6a^2b^3 & x + ab^5 \\
-\ a^2b & \quad +3a^2b^2 & \quad -4ab^4 & \\
-\ ab^2 & \quad +3ab^3 & \quad +\ b^5 & \\
+\ 2b^3 & \quad -5b^4 & &
\end{array}$$

(*a*) A veces se ordenan los polinomios con respecto á las *potencias crecientes de una letra*, es decir, se colocan sus términos de modo que los esponentes de dicha letra vayan aumentando contínuamente de izquierda á derecha. Asi, el polinomio $3 + 2x + 5x^2 - 4x^3 + 8x^4$ está ordenado con respecto á las potencias crecientes de x.

§. 3.° Consecuencias de la multiplicacion de polinomios.

27. *El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, mas el duplo del primero por el segundo, mas el cuadrado del segundo.*

Sea el binomio $a+b$, siendo a y b números cualesquiera, positivos ó negativos, ó uno positivo y otro negativo: digo que

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

En efecto, $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b$.

Nota. Segun este teorema, tendremos

$$(a-b)^2=(a+-b)^2=a^2+2a\times-b+(-b)^2,$$

ó

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

28. *El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, mas el triplo del cuadrado del primero por el segundo, mas el triplo del primero por el cuadrado del segundo, mas el cubo del segundo*; esto es

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

En efecto, $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$
$a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Nota. Segun este teorema, tendremos

$$(a-b)^3=(a+-b)^3=a^3+3a^2\times-b+3a\times(-b)^2+(-b)^3;$$

ó

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

29. *El producto de la suma de dos cantidades por su diferencia es igual á la diferencia de los cuadrados de dichas cantidades:* es decir, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

En efecto,

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2.$$

30. *El producto de dos polinomios homogéneos es homogéneo, y de un grado igual á la suma de los grados de los factores.*

Sean los dos polinomios homogéneos $5a^4-2a^3b+4a^2b^2$ y $a^3-4a^2b+2ab^2$. Consideremos dos productos parciales cualesquiera de estos polinomios, por ejemplo $5a^4\times a^3$ y $4a^2b^2\times 2ab^2$: como los dos multiplicandos $5a^4$ y $4a^2b^2$ tienen cuatro factores y los multiplicadores a^3 y $2ab^2$ tiene tres factores, cada uno de estos dos productos parciales tendrá siete factores. Luego cada producto parcial tendrá siete factores, y por consiguiente cada uno de los términos del producto final, que resultan de la reduccion de los productos parciales, tendrá tambien siete factores. Queda pues demostrado que el producto es homogéneo y de un grado igual á la suma de los grados de los factores.

31. *Si se multiplican dos polinomios, ordenados con respecto á una misma letra, el primer término del producto final, ordenado tambien con respecto á la misma letra, es el producto de los dos primeros términos de los factores, y el último término del producto final es el producto de los dos últimos términos de los factores.*

En efecto, el primer producto parcial es el producto de los dos primeros términos de los factores; luego el esponente de la letra principal en este primer producto parcial será mayor que el esponente de la misma letra en los demás productos parciales; y por tanto el primer producto parcial no puede ser semejante á ninguno de los otros productos parciales. Luego al hacer la reduccion de estos términos, el primer producto parcial no sufrirá alteracion alguna: y como la letra principal tiene en el mismo producto parcial mayor esponente que en los demas términos del producto final, se infiere que el primer producto parcial será el primer término del producto final, si este está órdenado con respecto á la misma letra principal. Del mismo modo se demuestra la segunda parte del teorema.

Artículo 3.º

Division de las cantidades literales enteras.

---

§. 1.º Nociones preliminares.

32. Se llama *cociente* de dos cantidades literales otra cantidad que multiplicada por el divisor da por producto el dividendo.

33. Se llama fraccion *algébrica* el cociente indicado de dos espresiones algébricas.

Asi, $\frac{4a^2-2bc}{2c-d}$ es una fraccion algébrica.

34. La division de dos cantidades literales enteras se llama *exacta* cuando su cociente es entero; y en el caso contrario la division se llama *inexacta*.

Se dice que una cantidad entera es *divisible* por otra entera, cuando el cociente de la division de la primera por la segunda es entero.

Asi, a^2-b^2 es divisible por $a-b$, puesto que el cociente es la cantidad entera $a+b$.

35. *Una fraccion algébrica no varía multiplicando ó dividiendo sus dos términos por una cantidad cualquiera.*

Sea la fraccion algébrica $\frac{a}{b}$: digo que $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$, siendo m un número cualquiera conmensurable ó inconmensurable; igualdad en que están incluidas las dos partes del teorema.

En efecto, $\frac{a}{b}\times b=a$ (*núm.* 32); luego $\frac{a}{b}\times b\times m=am$, ó

(*Comp.*[to] *de la Aritm. núm* 19) $\frac{a}{b}\times bm=am$; luego (*núm.* 32)

$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$.

36. *El cociente de dos potencias de una cantidad es una potencia de la misma cantidad, cuyo esponente es la diferencia de los esponentes del dividendo y divisor*; es decir, que

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}, \text{ siendo } m>n.$$

En efecto, $a^{m-n}\times a^n=a^{m-n+n}=a^m$; luego (*núm.* 32) a^{m-n} es el cociente de $\frac{a^m}{a^n}$.

Nota. La igualdad $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ sirve para reemplazar el cociente indicado $\frac{a^m}{a^n}$ por el monomio a^{m-n}; y al contrario para reemplazar el monomio a^{m-n} por el cociente $\frac{a^m}{a^n}$ (*Aritm. número* 39, *nota* (a)).

Si se tiene por objeto lo primero, se enuncia abreviadamente el teorema en estos términos: *para partir cantidades iguales, se restan sus esponentes.*

37. Hagamos $m=n$ en la igualdad $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, demostrada solamente para el caso en que $m>n$: el primer miembro se reduce á 1, y el segundo es a^0. Luego, conviniendo en que $a^0=1$, tendremos la ventaja de que la igualdad $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, demostrada para el caso en que $m>n$, se estienda tambien al caso en que $m=n$.

Segun esto, y con objeto de generalizar el teorema *número* 36, admitiremos en adelante que *toda cantidad, cuyo esponente es cero, equivale á la unidad.*

§. 2.° DIVISION DE MONOMIOS.

Division exacta.

38. *Para dividir un monomio entero por otro entero*, cuando la division es exacta, *se divide el coeficiente del dividendo por el coeficiente del divisor, se resta el esponente que tiene cada letra en el divisor del esponente que tiene la misma letra en el dividendo, y las letras del dividendo, que no se hallan en el divisor, entran en el cociente del mismo modo que en el dividendo*; es decir que, por ejemplo,

$$\frac{40a^{3+4}b^2d^3}{5a^3b^2}=8a^4d^3=8a^4b^0d^3.$$

En efecto, segun la regla (*núm.* 23), tenemos $8a^4d^3\times5a^3b^2=40a^{3+4}b^2d^3$; luego es cierto (*núm.* 32) que $8a^4d^3$ es el cociente de $40a^{3+4}b^2d^3$ dividido por $5a^3b^2$.

Ejemplos. 1.° $\frac{9a^5b^2}{18a^2}=\frac{1}{2}a^3b^2$, 2.° $\frac{7a^2b}{-7a^2}=-b$.

La division de un monomio por otro será exacta, toda vez que los esponentes de las letras del divisor no sean mayores que los que tienen las mismas letras en el dividendo.

Division inexacta de monomios.

39. La division de monomios es inexacta: 1.° cuando en el divisor existe alguna letra que no entra en el dividendo; 2.° cuando el esponente de alguna letra del divisor es mayor que el de la misma letra del dividendo. En estos casos se indica la division de los dos monomios, y se simplifica, si se puede, la fraccion que resulta, en virtud de la segunda parte del teorema del núm. 35.

Ejemplos. 1.° $\frac{9ab}{3a^4d}=\frac{3b}{a^3d}$, 2.° $\frac{3a^2b}{6a^4b^2}=\frac{1}{2a^2b}$.

§. 3.º DIVISION DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO.

40. *Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio, y la suma de los cocientes parciales será el cociente total.*

Sea el polinomio $a-b+c$ y el monomio m: digo que

$$\frac{a-b+c}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}.$$

En efecto, si multiplicamos el polinomio $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$ por el monomio m, tendremos (*núm.* 27) $\frac{a}{m}.m-\frac{b}{m}.m+\frac{c}{m}.m=a-b+c$; luego (*núm.* 32) $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$ es el cociente de la division de $a-b+c$ por m.

La division de un polinomio por un monomio será exacta, si todos los cocientes parciales son enteros.

Ejemplo. $$\frac{4a^6b^2+8a^4b^4-3a^2b^6}{2a^2b^2}=2a^4+4a^2b^2-\frac{3b^4}{2}.$$

41. La division de un polinomio por un monomio será inexacta, si uno ó mas cocientes parciales son fraccionarios.

En efecto, si un solo cociente parcial es fraccionario, el cociente total no es entero, y por consiguiente la division es inexacta. Si dos ó mas cocientes parciales son fraccionarios, se puede dudar de que estos cocientes fraccionarios se destruyan unos con otros, y que el cociente final sea entero: pero esto es imposible, porque no siendo semejantes los términos del dividendo, los cocientes parciales tampoco pueden ser semejantes, y por lo tanto no pueden reducirse unos con otros; luego el cociente final es fraccionario, y la division inexacta.

Ejemplo. $$\frac{5a^7b+8a^6d^2-7a^5b^2d}{7ab}=\frac{5}{7}a^6+\frac{8a^5d^2}{7b}-a^4bd.$$

§. 4.° Division de polinomios.

Division exacta.

42. Representemos el dividendo por $A+B+C+\ldots\ldots$, el divisor por $a+b+c+\ldots\ldots$, y el cociente incógnito por $m+n+p+\ldots\ldots$, é imaginemos que estos tres polinomios estén ordenados con respecto á una misma letra x. Siendo el dividendo el producto del divisor por el cociente, será

$$A+B+C\ldots=(a+b+c+\ldots)(m+n+p+\ldots),$$

y por consiguiente (*núm.* 31) $A=ma$, de donde $m=\frac{A}{a}$; es decir que partiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor, resulta el primer término del cociente.

Ahora, considerando al polinomio $m+n+p+\ldots\ldots$ como un binomio cuya primera parte sea m y la segunda $n+p+\ldots\ldots$ tendremos

$$A+B+C+\ldots=(a+b+c+\ldots)m+(a+b+c+\ldots)(n+p+\ldots);$$

luego, restando $(a+b+c+\ldots)m$ de ambos miembros de esta igualdad, será

$$A+B+C+\ldots-(a+b+c+\ldots)m=(a+b+c+\ldots)(n+p+\ldots)$$

Despues de reducido y ordenado el primer miembro, representémosle por $A'+B'+C'+\ldots$, y tendremos

$$A'+B'+C'+\ldots=(a+b+c+\ldots)(n+p+\ldots).$$

Como (*núm.* 31) $A'=na$, será $n=\frac{A'}{a}$; luego partiendo el primer término del resto $A'+B'+C'+\ldots$ por el primero del divisor, tendremos el segundo término del cociente.

Tenemos ahora, considerando al polinomio $n+p+q+\ldots$ como un binomio cuya primera parte sea n, y la segunda $p+q+\ldots$

$$A'+B'+C'+\ldots=(a+b+c+\ldots)n+(a+b+c+\ldots)(p+q+\ldots);$$

y restando $(a+b+c+\ldots)n$ de ambos miembros, será

$$A'+B'+C'+\ldots-(a+b+c+\ldots)n=(a+b+c+\ldots)(p+q+\ldots).$$

Ordenando y reduciendo el primer miembro, y llamándole $A''+B''+C''+\ldots$ será

$$A''+B''+C''+\ldots=(a+b+c+\ldots)(p+q+\ldots).$$

Siendo (*núm.* 31) $A''=ap$, será $p=\frac{A''}{a}$, es decir que partiendo el primer término del resto $A''+B''+C''+\ldots$ por el primero del divisor, se tendrá el tercer término del cociente.

Este razonamiento puede continuarse hasta que se hallen todos los términos del cociente; *y cuando se halle el último de estos términos, el resto correspondiente será cero.*

En efecto, llamemos, para abreviar, D al dividendo propuesto, P al producto del primer término del cociente por el divisor, P' al producto del segundo término del cociente por el divisor, P'' al producto del tercer término del cociente por el divisor, y supongamos, para fijar las ideas, que el cociente no tenga mas que tres términos: el primer resto es $D-P$, el segundo $D-P-P'$, y el tercero $D-P-P'-P''$. Mas siendo, por suposicion, el dividendo D igual al producto del divisor por el cociente, esto es, igual á $P+P'+P''$, resulta que el resto final $D-P-P'-P''$ es cero.

Al contrario, *cuando se llegue á un resto cero, el cociente hallado será el cociente verdadero.*

Supongamos, por ejemplo, que habiendo restado sucesivamente los tres productos P, P', P'' del divisor por los tres primeros términos del cociente, el resto sea cero: digo que el trinomio hallado es el cociente verdadero.

En efecto, siendo $D-P-P'-P''=0$, es $D=P+P'+P''$; es decir, que el dividendo es igual al producto del divisor por el trinomio hallado; luego este trinomio es el cociente verdadero.

Segun las operaciones que hemos visto deben ejecutarse en la division exacta de un polinomio por otro, estableceremos la regla siguiente:

Para dividir un polinomio por otro, cuando el cociente es entero ó la division es exacta, *ordeno dividendo y divisor con respecto á una misma letra cualquiera, y partiendo el primer término del dividendo por el primero del divisor, tendré el primero del cociente. Multiplico este término por todo el divisor, resto el producto del dividendo, y partiendo el primer término del resto por el primero del divisor, tendré el segundo término del cociente. Multiplico este término por todo el divisor, resto el producto del dividendo último, y partiendo el primer término del resto por el primero del divisor, tendré el tercer término del cociente. Continúo del mismo modo hasta que halle el último termino del cociente, que será aquel que dé cero de resto.*

El lector debe repetir la demostracion haciendo uso del razonamiento ordinario.

Ejemplo.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
6a^5 & -23a^4b & -\ \ a^3b^2 & +54a^2b^3 & +\ \ 2ab^4 & -24b^5 & 2a^3-5a^2b-3ab^2+4b^3 \\
\cline{7-7}
-6a^5 & +15a^4b & +\ \ 9a^3b^2 & -12a^2b^3 & & & 3a^2-4ab-6b^2 \\
\cline{1-6}
 & -\ \ 8a^4b & +\ \ 8a^3b^2 & +42a^2b^3 & +\ \ 2ab^4 & -24b^5 & \\
 & +\ \ 8a^4b & -20a^3b^2 & -12a^2b^3 & +16ab^4 & & \\
\cline{1-6}
 & & +12a^3b^2 & +30a^2b^3 & +18ab^4 & -24b^5 & \\
 & & -12a^3b^2 & -30a^2b^3 & -18ab^4 & +24b^5 & \\
\cline{1-6}
 & & 0 & & & &
\end{array}
$$

Estando ordenados los dos polinomios con respecto á la letra a, se parte el primer término $6a^5$ del dividendo por el primero $2a^3$ del divisor, y el primer término del cociente es $3a^2$. Multiplico todo el divisor por $3a^2$, y resto el producto del dividendo; pero en vez de restar dicho producto despues de obtenido, es mas sencillo restar cada producto parcial á medida que se va obteniendo; de este modo: $+$ por $+$ da $+$, para restar —, que se escribe debajo del primer término del dividendo, $2a^3 \times 3a^2$ es $6a^5$, que escribo á continuacion del signo — escrito ya. Sigo diciendo: — por $+$ da —, para restar $+$, que escribo debajo del segundo término del dividendo; $5a^2b$ por $3a^2$ es $15a^4b$, que escribo á continuacion del signo $+$ que acabo de escribir; y asi sucesivamente.

Nota. Cuando se multiplica un término del cociente por el divisor para restar el producto del dividendo correspondiente, el producto del primer término del divisor por dicho término del cociente es igual al primer término del mismo dividendo; es pues inúltil hallar este producto parcial: se rayará desde luego el primer término del dividendo, y se multiplicará el término del cociente por los términos del divisor, desde el segundo inclusive.

* 43. Si la letra que se toma por principal, entra en varios términos con un mismo esponente, se ordenarán los polinomios reduciendo antes á un solo término todos aquellos en que dicha letra tiene el mismo esponente, y se efectuarán aparte las divisiones parciales del coeficiente del primer término de cada dividendo por el coeficiente del primer término del divisor.

Ejemplo.

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
4b^2 & a^4-b^4 & a^2+2b^4c & a-b^6 \\
-4bc & \quad -2b^3c & \quad +2b^5 & \\
+c^2 & \quad -b^2c^2 & & \\
 & & & \\
+2b^2c & a^3-2b^4 & a^3 & \\
+2b^3 & \quad +b^3c & & \\
-bc^2 & & & \\
-b^2c & & & \\
\hline
2b^3 & a^3-3b^4 & a^2+2b^4c & a-b^6 \\
+b^2c & \quad -b^3c & \quad +2b^5 & \\
-bc^2 & \quad -b^2c^2 & & \\
 & & & \\
 & +b^3c & a^2-b^5 & a \\
 & +b^4 & \quad -b^4c & \\
 & +b^2c^2 & & \\
 & +b^3c & & \\
\hline
 & -2b^4 & a^2+b^4c & a-b^6 \\
 & +b^3c & \quad +b^5 & \\
 & & & \\
 & & -b^4c & a-b^6 \\
 & & -b^5 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l|l}
2b & a^2-bc & a+b^3 \\
-c & \quad -b^2 & \\
\hline
2b & a^2+b^2 & a-b^3 \\
-c & \quad +bc &
\end{array}
$$

Divisiones parciales.

$$
1.^{a}\quad
\begin{array}{r|l}
4b^2-4bc+c^2 & 2b-c \\
\cline{2-2}
+2bc & 2b-c \\
\cline{1-1}
-2bc+c^2 & \\
-c^2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
2.^{a}\quad
\begin{array}{r|l}
2b^3+b^2c-bc^2 & 2b-c \\
\cline{2-2}
+b^2c & b^2+bc \\
\cline{1-1}
+2b^2c-bc^2 & \\
+bc^2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Si se tomase por principal la letra b ó la c, se obtendria el mismo resultado.

* **44.** Se puede efectuar una division de polinomios, sin ordenarlos: pues observando que el primer término de cada dividendo parcial y el primer término del divisor son los términos en que la letra principal tiene el mayor esponente, se hallarán los diferentes términos del cociente, dividiendo el

término en que la letra principal tiene en cada dividendo parcial el mayor esponente por el término del divisor en que la misma letra tiene tambien el mayor esponente.

Division inexacta de polinomios.

45. *Cualquiera que sea la cantidad que se tome por cociente, si se multiplica por el divisor, y se resta el producto del dividendo, el cociente verdadero, entero ó fraccionario, será igual á dicha cantidad, mas una fraccion cuyo numerador es el resto y cuyo denominador es el divisor.*

Sea A el dividendo, B el divisor y m una cantidad cualquiera que se toma por cociente: el resto será $A-mB$. Digo que

$$\frac{A}{B}=m+\frac{A-mB}{B}.$$

En efecto, tenemos evidentemente $A=mB+(A-mB)$ luego (40) $\frac{A}{B}=m+\frac{A-mB}{B}$.

46. Si, siguiendo la regla de la division exacta de dos polinomios, se llega á un resto, en cuyo primer término la letra principal tenga menor esponente que en el primero del divisor (á cuyo resto llamaremos en adelante *residuo* de la division), la division será inexacta: pues no puede existir cantidad alguna entera (*núm.* 7) que multiplicada por el divisor dé por producto dicho resto. En este caso, segun el teorema que acabamos de demostrar, se tendrá el cociente completo, añadiendo al cociente entero obtenido un quebrado cuyo numerador es el residuo y cuyo denominador es el divisor.

Ejemplo.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4+ & 9x^3- & 6x^2- & 8x+ & 9 & x^2-4x+1 \\
\cline{6-6}
 & +20x^3- & 5x^2 & & & 5x^2+29x+105+\dfrac{383x-96}{x^2-4x+1} \\
\cline{1-5}
 & 29x^3- & 11x^2- & 8x+ & 9 & \\
 & & +116x^2- & 29x & & \\
\cline{2-5}
 & & 105x^2- & 37x+ & 9 & \\
 & & & +420x- & 105 & \\
\cline{3-5}
 & & & 383x- & 96 &
\end{array}$$

Tenemos pues la identidad

$$\frac{5x^4+9x^3-6x^2-8x+9}{x^2-4x+1}=5x^2+29x+105+\frac{385x-96}{x^2-4x+1}.$$

Vemos por este ejemplo, que el quebrado propuesto, cuyo numerador es de un grado mayor que su denominador, se ha transformado en una espresion entera, sumada con una fraccion cuyo numerador es de un grado menor que su denominador. Esta transformacion, análoga á la de un quebrado impropio en número mixto, es muy frecuente en la parte elevada de las matemáticas.

* 47. La division es tambien inexacta, cuando ordenando el dividendo y el divisor con respecto á una cualquiera de sus letras, el primer término del dividendo no es divisible por el primero del divisor, ó el último término del dividendo no es divisible por el último del divisor: pues ya se sabe, que si la division es exacta, el primer término del dividendo es el producto del primer término del divisor por el primero del cociente, y el último término del dividendo es el producto del último término del divisor por el último del cociente; es decir, que el primer término del dividendo es divisible por el primero del divisor, y que el último término del dividendo es divisible por el último del divisor.

Asi, si el dividendo es $12a^2x^3+7a^3x^2+8a^4x+2a^5$, y el divisor $4ax^2+5a^2x-6a^2c$, la division será inexacta; pues estando el dividendo y el divisor ordenados con respecto á x, el último término $2a^5$ del dividendo no es divisible por el último $-6a^2c$ del divisor.

En todos los casos de divisiones inexactas se pueden hallar tantos términos del cociente como se quieran, y completarlo en seguida añadiendo á la parte hallada un quebrado cuyo numerador sea el resto correspondiente, y cuyo denominador sea el divisor.

§.5.° Consecuencias de la division.

48. *Si un polinomio entero* (7) $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Kx+L$, *ordenado con respecto á una letra* x, *se divide por el binomio* $x-a$, *el residuo de la division será el mismo polinomio, reemplazando* x *por* a; es decir, que el residuo será

$$Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots+Ka+L.$$

En efecto, como x entra en el divisor elevada á la primera potencia, se podrá continuar la division hasta que se llegue al residuo, el cual será, en este caso, independiente de x (*num.* 46). Sea Q el cociente entero obtenido y R el residuo: tendremos la identidad

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Kx+L=(x-a)Q+R.$$

Si en esta identidad damos á x un valor cualquiera, los dos miembros tomarán valores iguales (*Núm.* 3). Demos pues á x el valor a: Q, que es un polinomio entero con respecto á x, toma un valor determinado, y $x-a$ se reduce á cero; luego $(x-a)Q$ se reduce á cero; y por tanto

$$Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots+Ka+L=R.$$

49. *Si un polinomio entero* $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Kx+L$, *ordenado con respecto á una letra* x, *se reduce á* 0, *poniendo en vez de* x *el valor* a, *dicho polinomio es divisible por* $x-a$; *y no lo será en el caso contrario.*

1.° Acabamos de demostrar que el residuo de la division del polinomio $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Kx+L$ por $x-a$ es $Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots+Ka+L$; y como por suposicion esta cantidad es cero, se infiere que el cociente es entero, ó que $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Kx+L$ es divisible por $x-a$.

2.° Si a no reduce á cero á dicho polinomio, el residuo $Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots+Ka+L$ no es cero, y por tanto el polinomio propuesto no es divisible por $x-a$.

Corolario. *La diferencia* x^m-a^m *de dos potencias del mismo grado de dos cantidades es divisible por la diferencia de estas cantidades*: pues poniendo a en vez de x en el polinomio x^m-a^m, este polinomio se reduce á cero.

50. Hallemos el cociente de x^m-a^m dividido por $x-a$.

El primer término del cociente es x^{m-1}, y el resto correspondiente $ax^{m-1}-a^m=a(x^{m-1}-a^{m-1})$; luego (*Núm.* 45)

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+a\times\frac{x^{m-1}-a^{m-1}}{x-a}.$$

Luego, *teniendo el cociente* $\frac{x^{m-1}-a^{m-1}}{x-a}$, *se tendrá el cociente* $\frac{x^m-a^m}{x-a}$, *escribiendo el término* x^{m-1}, *y añadiendo á este término el producto del cociente anterior multiplicado por* a.

Ahora bien, $\frac{x^2-a^2}{x-a}=x+a$ (*Núm.* 31); luego, segun la regla que acabamos de hallar, tendremos sucesivamente:

$$\frac{x^3-a^3}{x-a}=x^2+ax+a^2,$$

$$\frac{x^4-a^4}{x-a}=x^3+ax^2+a^2x+a^3,$$

etc.,

y en general

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots\ldots+a^{m-3}x^2+a^{m-2}x+a^{m-1}.$$

Para comprobar esta igualdad, no hay mas que multiplicar el 2.° miembro por $x-a$, y resulta, hechas las reducciones, x^m-a^m, es decir, que $x^{m-1}+ax^{m-2}+\ldots+a^{m-1}$ es una cantidad que multiplicada por el divisor da por producto el dividendo; luego dicha cantidad es el cociente.

Ejemplos.

1.° $\frac{x^7-a^7}{x-a}=x^6+ax^5+a^2x^4+a^3x^3+a^4x^2+a^5x+a^6$:

2.° $\frac{x^5-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1$.

CAPÍTULO IV.

Fracciones algébricas.

51. Sabemos que una fraccion literal es el cociente indicado de dos espresiones literales, las cuales pueden representar números enteros, fraccionarios ó inconmensurables. Las fracciones literales comprenden como casos particulares á las fracciones numéricas, es decir, á las fracciones cuyos dos términos son números enteros; y por tanto todo lo que se demuestre de las fracciones literales, quedará demostrado para las numéricas (*a*).

(*a*) No debe admitirse sin demostracion, invirtiendo este principio, que las fracciones literales se calculan por las mismas reglas que las numéricas.

52. *Si el numerador de un quebrado, cuyos dos términos son positivos, crece ó disminuye, el quebrado crece ó disminuye.*

Sea el quebrado $\frac{a}{b}$; añadiendo c á su numerador, el nuevo quebrado será $\frac{a+c}{b}$. Mas (*Núm.* 42) $\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$; luego $\frac{a+c}{b}>\frac{a}{b}$; desigualdad què demuestra las dos partes del teorema.

Si el denominador de un quebrado, cuyos dos términos son positivos, crece ó disminuye, el quebrado disminuye ó aumenta.

Añadiendo c al denominador del quebrado $\frac{a}{b}$, el nuevo quebrado será $\frac{a}{b+c}$. Ahora bien, tenemos $\frac{a}{b}\times b=a$, $\frac{a}{b+c}(b+c)=a$; luego $\frac{a}{b}\times b=\frac{a}{b+c}(b+c)$; y pues el factor b es menor que el factor $b+c$, el factor $\frac{b}{a}$ será mayor que el factor $\frac{b+c}{a}$.

53. *Para reducir varios quebrados literales á un comun denominador, se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás.*

Los nuevos quebrados serán respectivamente iguales á los propuestos, pues resultan de la multiplicacion de los dos términos de estos por una misma cantidad.

Asi, los quebrados literales $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, reducidos á un comun denominador, serán.

$$\frac{adf}{bdf}, \frac{cbf}{bdf}, \frac{ebd}{bdf}.$$

54. El *múltiplo mas simple* de varias cantidades literales es el producto del menor número posible de factores, que sea divisible por dichas cantidades.

Segun esta definicion, se hallará el múltiplo mas simple de varios monomios, multiplicando el menor múltiplo de los coeficientes por las potencias de mayor grado de cada uno de los factores literales.

Asi, el múltiplo mas simple de los monomios $4a^3b^2d^2$, $6a^4bc^2$ y $8a^3bc^3$, es $24a^4b^2c^3d^2$.

55. Si en los denominadores existen factores comunes á dos ó mas, se reducirán los quebrados á un comun denominador, *hallando el múltiplo mas simple de los denominadores, y multiplicando en seguida los dos términos de cada quebrado por el factor que falta á su denominador para componer dicho múltiplo mas simple.*

Ejemplo. Reducir á un comun denominador las fracciones $\frac{m}{48a^3b^2c^2}$, $\frac{n}{54a^2b^3c^2}$, $\frac{p}{80a^4b^2c}$.

El múltiplo mas simple de los denominadores será $2^4.3.^3 5\,a^4b^3c^2$: los factores que faltan á los denominadores para componer el múltiplo mas simple, son respectivamente $3^2.5ab$, $2^3.5a^2$ y $3^3.bc$; luego los quebrados reducidos al comun denominador $2^4.3^3.5a^4b^3c^2$ serán

$$\frac{3^2.5abm}{2^4.3^3.5a^4b^3c^2},\ \frac{2^3.5a^2n}{2^4.3^3.5a^4b^3c^2},\ \frac{3^3.bcp}{2^4.3^3.5a^4b^3c^2}.$$

36. *Si á los dos términos de un quebrado, cuyo numerador y denominador son positivos, se les añade una misma cantidad positiva, el nuevo quebrado será mayor que el propuesto, si el numerador de este es menor que su denominador; y el nuevo quebrado sera menor que el propuesto, si el numerador de este es mayor que su denominador.*

Sea el quebrado $\frac{a}{b}$: añadiendo á sus dos términos el número m, el nuevo quebrado será $\frac{a+m}{b+m}$. Reducidos estos dos quebrados á un comun denominador, el primero se transforma en $\frac{ab+am}{b(b+m)}$, y el segundo en $\frac{ab+bm}{b(b+m)}$. Ahora, si $a<b$, será $am<bm$, y $ab+am<ab+bm$; luego (*Núm.* 52) el segundo quebrado es mayor que el primero; es decir, que en este caso $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$. Si $a>b$, será $am>bm$, $ab+am>ab+bm$, y por con-

CAPITULO V.

Esponentes negativos. — Interpretacion de las espresiones $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{0}$

Artículo 1°.

Esponentes negativos.

62. Hemos visto, que cuando $m>n$, $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$; y que admitiendo que a^0 sea 1, esta igualdad se estiende al caso en que $m=n$.

Supongamos ahora que $m<n$, y que d sea la diferencia; será $n=m+d$. La espresion $\frac{a^m}{a^n}$ será en esto caso $\frac{a^m}{a^{m+d}}=\frac{a^m}{a^m \times a^d}$ (*Núm.* 25); ó simplificando, resulta $\frac{1}{a^d}$. La espresion a^{m-n} se convierte, poniendo $m+d$ en vez de n, en a^{-d}. Luego, si convenimos en considerar como equivalentes las dos espresiones $\frac{1}{a^d}$ y a^{-d}, la igualdad $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ demostrada para los casos en que $m>n$ y $m=n$, será tambien cierta cuando $m>n$, es decir que será general.

Segun esto, *toda cantidad que tiene esponente negativo, es un quebrado, cuyo numerador es la unidad, y cuyo denominador es la misma cantidad con el mismo esponente hecho positivo.*

63. *Para multiplicar ó partir cantidades iguales cuyos esponentes sean negativos, se siguen las mismas reglas que para multiplicar ó partir cantidades iguales cuyos esponentes son enteros y positivos; esto es, se suman ó restan los esponentes* (Número 22).

Digo que $a^{-m} \times a^{-n}=a^{-m-n}$.

En efecto, $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; luego

$$a^{-m} \times a^{-n}=\frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-m-n}$$

Digo ahora que $\frac{a^{-m}}{a^{-n}}=a^{-m+n}=a^{n-m}$.

En efecto, $a^{n-m}\times a^{-n}=a^{n-m-n}=a^{-m}$; luego es cierta la igualdad $\frac{a^{-m}}{a^{-n}}=a^{n-m}$.

Nota. De la igualdad $a^{-d}=\frac{1}{a^d}$ resulta $a^d\times a^{-d}=1$, y por consiguiente $a^d=\frac{1}{a^{-d}}$.

Luego *toda cantidad de esponente positivo equivale á un quebrado cuyo numerador es la unidad, y cuyo denominador es la misma cantidad con el mismo esponente hecho negativo.*

64. Tomemos la espresion $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$, que puede escribirse asi:

$$\frac{a^m b^n}{c^p}\times\frac{1}{d^q}=\frac{a^m b^n}{c^p}\times d^{-q}=\frac{a^m b^n d^{-q}}{c^p}.$$

La misma espresion puede escribirse asi: $\frac{a^m}{c^p d^q}\times b^n$; y como $b^n=\frac{1}{b^{-n}}$, será $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}=\frac{a^m}{c^p d^q}\times\frac{1}{b^{-n}}=\frac{a^m}{c^p d^q b^{-n}}$.

Por consiguiente *todo factor puede trasladarse del numerador al denominador, ó al contrario, mudando el signo á su esponente.*

Artículo 2.°

Interpretacion de las espresiones $\frac{a}{0}$ *y* $\frac{0}{0}$.

---

65. *Si quedando fijo el numerador de un quebrado, el denominador va disminuyendo, y puede acercarse á cero cuanto se quiera, el valor del quebrado irá aumentando y llegará á ser mayor que cualquiera cantidad, por grande que esta sea.*

En efecto, sea el quebrado $\frac{a}{b}$, y supongamos que, permaneciendo el numerador a constante, el denominador b tenga sucesivamente los valores $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, etc.; los valores respectivos del quebrado serán $10a$, $100a$, $1000a$, $10000a$, etc. Luego es claro que, disminuyendo suficientemente el denominador b, podrá llegar el quebrado á valer mas que cualquiera cantidad dada. Por esta razon la espresion $\frac{a}{0}$ debe considerarse como una cantidad mayor que cualquiera cantidad asignable, y se le da el nombre de *cantidad infinitamente grande*, ó de *infinito*, y se representa por el signo ∞.

Tenemos $$\frac{a}{\frac{1}{b}}=ab.$$

Si $b=0$, será $\frac{1}{b}=\infty$; y por consiguiente $\frac{a}{\infty}=0$

Luego, *cuando el denominador de un quebrado es infinito, el valor del quebrado es cero*; lo que tambien puede demostrarse directamente del mismo modo que el teorema inmediato anterior.

66. La espresion $\frac{0}{0}$ representa una cantidad que multiplicada por 0 da de producto 0 (*Núm.* 32); y como cualquier número finito multiplicado por 0 da 0 de producto, se infiere que la espresion $\frac{0}{0}$ es igual á cualquier número, ó es una espresion indeterminada.

* 67. Si en el quebrado $\frac{Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Kx+L}{A'x^n+B'x^{n-1}+C'x^{n-2}+\ldots+K'x+L'}$ damos á x un valor a que anule á numerador y denominador, este quebrado se convertirá en $\frac{0}{0}$. Como el numerador y denominador del quebrado propuesto son divisibles por $x-a$ (*Núm.* 51), si quiero hallar el verdadero valor de la fraccion propuesta, cuando $x=a$, suprimiré el factor $x-a$ comun á numerador y denominador, y haré en seguida $x=a$.

Asi pues, *siempre que por un valor* a *dado á una letra* x *se convierta un quebrado en* $\frac{0}{0}$, *no debe inferirse que el valor del quebrado es entonces un número cualquiera, si no que existe un factor* x—a *comun á numerador y denominador; y el verdadero valor de la fraccion, en el caso en que* x=a, *se hallará suprimiendo dicho factor comun* x—a, *y haciendo en seguida en la fraccion simplificada* x=a.

Ejemplos. 1.° Si en la fraccion $\frac{x^2-4x+3}{x^3-6x^2+11x-6}$ damos á x el valor 3, la fraccion se convierte en $\frac{0}{0}$; lo que prueba que el numerador y el denominador son divisibles por $x-3$. Simplificando el quebrado, resulta $\frac{x-1}{x^2-3x+2}$; y haciendo ahora $x=3$, resulta $\frac{2}{2}=1$, valor del quebrado propuesto cuando $x=3$.

2.° Si en el quebrado $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ hacemos $x=1$, resulta $\frac{0}{0}$. Para hallar el verdadero valor de la fraccion propuesta cuando $x=1$, simplifico el quebrado, partiendo numerador y denominador por $x-1$, y tendré $\frac{x-1}{x+1}$; y haciendo ahora $x=1$, resulta 0, valor del quebrado propuesto cuando $x=1$.

3.° Si en la fraccion $\frac{x^2-4}{x^2-4x+3}$ hago $x=2$, resulta $\frac{0}{0}$. Para hallar el verdadero valor del quebrado propuesto, suprimo el factor $x-2$ comun á numerador y denominador, y tendré $\frac{x+2}{x-2}$, y haciendo ahora $x=2$, resulta ∞, valor del quebrado propuesto cuando $x=2$.

4.° Sea el quebrado $\frac{a^4+a^3b-3a^2b^2-ab^3+2b^4}{a^4-a^2b^2-13a^2b^2+25ab^3-12b^4}$: haciendo $a=b$, se convierte en $\frac{0}{0}$; luego los dos términos del quebrado son divisibles por $a-b$. Suprimiendo el factor $a-b$, comun á numerador y denominador, resulta $\frac{a^3+2a^2b-ab^2-2b^3}{a^3-13ab^2+12b^3}$, y haciendo ahora $a=b$, resulta $\frac{0}{0}$; luego los dos términos del nuevo quebrado son tambien divisibles por $a-b$. Simplificando el nuevo quebrado, se halla $\frac{a^2+3ab+2b^2}{a^2+ab-12b^2}$; y haciendo en este quebrado $a=b$, resulta $\frac{6a^2}{-10a^2}=-\frac{3}{5}$; verdadero valor del quebrado propuesto cuando $a=b$.

LIBRO SEGUNDO.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

CAPÍTULO I.

Nociones preliminares.

68. Se llama ecuacion *numérica* la ecuacion en que todas las cantidades conocidas, que entran en ella, son números particulares; y ecuacion *literal* la ecuacion en que una ó mas de dichas cantidades conocidas estan representadas por letras.

Asi, la ecuacion $4x-8=3x+12$ es una ecuacion numérica. La ecuacion $ax^2-3=y-bx$ es una ecuacion literal.

En una ecuacion con una sola incógnita se llama *valor* de esta ó *solucion* de la ecuacion toda cantidad conocida que puesta en la ecuacion en vez de la incógnita la *verifica* ó *satisface*, es decir, la transforma en una identidad.

Asi, en la ecuacion $3x=6$ el único valor de la incógnita ó la única solucion de la ecuacion es 2. En la ecuacion $x^2=4x-3$ los valores de la incógnita ó las soluciones de la ecuacion son 1 y 3.

Se llama *solucion* de una ecuacion con varias incógnitas la combinacion de valores de estas que verifican dicha ecuacion.

Asi, en la ecuacion $2x+3y=6$ la combinacion de valores 0 y 2 de las incógnitas x é y forman una solucion; otra la combinacion de valores 1 y $\frac{4}{3}$ de las mismas incógnitas, etc.

Se dice que se ha *resuelto* una ecuacion, cuando se han hallado sus soluciones.

Dos ecuaciones con una misma ó con varias incógnitas se llaman *equivalentes*, cuando tienen las mismas soluciones.

Asi, las dos ecuaciones $3x=6$, $3x+1=7$, que tienen la misma solucion $x=1$, son equivalentes. Las dos ecuaciones $2x+3y=6$, $4x+6y=12$, que tienen las mismas soluciones, son equivalentes.

Se dice que una ecuacion *no se altera* cuando se transforma en otra equivalente.

69. *Una ecuacion no se altera añadiendo sus dos miembros, ó restando de ellos, una misma cantidad.*

Sea la ecuacion $A=B$ con una ó varias incógnitas: añadamos á sus dos miembros la cantidad m positiva ó negativa, y la nueva ecuacion será $A+m=B+m$. Toda solucion de la ecuacion $A=B$ hace que A y B reciban valores idénticos; la misma solucion satisface por lo tanto á la ecuacion $A+m=B+m$; luego toda solucion de la primera ecuacion es solucion de la segunda. Al contrario, toda solucion de la segunda ecuacion, hace que los valores que toman $A+m$ y $B+m$ sean idénticos, luego tambien lo son los valores que toman A y B; es decir que toda solucion de la segunda ecuacion es solucion de la primera. Queda pues demostrado que dichas dos ecuaciones tienen las mismas soluciones, y que por tanto son equivalentes.

Del mismo modo se demuestra que *una ecuacion no se altera multiplicando ó dividiendo sus dos miembros por una misma cantidad conocida diferente de* 0.

70. *Una ecuacion se altera multiplicando sus dos miembros por* 0.

Sea la ecuacion $3x+y=7$: multiplicando sus dos miembros por 0, será $(3x+y)0=7\times 0$. Esta ecuacion se verifica por cualesquiera valores de las incógnitas x é y, los cuales pueden no formar solucion de la ecuacion propuesta. Asi, la segunda ecuacion se verifica por los valores 1 y 1 de x é y, y esta solucion no satisface á la ecuacion primera.

71. *Multiplicando los dos miembros de una ecuacion por una cantidad desconocida, la nueva ecuacion puede tener mayor número de soluciones que la propuesta.*

1° Sea la ecuacion $3x=6$: multipliquemos estos dos miembros por la cantidad desconocida $x-3$, y la nueva ecuación será $3x(x-3)=4(x-3)$. La solucion $x=2$ de la primera ecuacion es solucion de la segunda; pero la solucion $x=3$ de esta no lo es de la primera.

2.° Sea la ecuacion $\frac{4}{x}=\frac{3}{x-3}$: multiplicando sus dos miembros por $x(x-3)$, resulta $4(x-3)=3x$, que tiene la misma y única solucion $x=12$ que la propuesta.

Dividiendo los dos miembros de una ecuacion por una cantidad desconocida, la nueva ecuacion puede tener menor número de soluciones que la propuesta.

1.° Pues si dividimos la ecuacion $3x(x-3)=6(x-3)$ por $x-3$, la nueva ecuacion será $3x=6$, la cual no tiene la solucion $x=3$ que tiene la primera.

2.° Si dividimos por x los dos miembros de la ecuacion $4(x-3)=3x$, la nueva ecuacion $\frac{4(x-3)}{x}=3$ tiene la misma y única solucion $x=12$ que la propuesta.

72. *Elevando los dos miembros de una ecuacion á una misma potencia, la nueva ecuacion puede tener mayor número de soluciones que la propuesta.*

1.° Si elevamos al cuadrado los dos miembros de la ecuacion $x-3=1$, resulta $(x-3)^2=1$, y esta nueva ecuacion tiene, ademas de la solucion $x=4$ de la propuesta, la solucion $x=2$.

2.° Si elevamos al cuadrado la ecuacion $\sqrt{x-1}=1$, resulta la nueva ecuacion $x-1=1$, la cual tiene la misma y única solucion $x=2$ que la primera.

Estrayendo una misma raiz de los dos miembros de una ecuacion, la nueva ecuacion puede tener menor número de soluciones que la propuesta.

1.° Sea la ecuacion $(x-3)^2=1$: estrayendo de los dos miembros la raiz cuadrada, resulta $x-3=1$, ecuacion á la cual conviene la solucion única $x=4$; pero la propuesta tiene ademas la solucion $x=2$.

2.° Sea la ecuacion $x-1=1$: estrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros, es $\sqrt{x-1}=1$, la cual tiene la misma y única solucion $x=2$ que la propuesta.

Nota. En vista de los cuatro últimos teoremas, toda vez que se multipliquen ó partan los dos miembros de una ecuacion por una cantidad desconocida, se ha de examinar con cuidado si la nueva ecuacion es ó no equivalente á la propuesta; é igualmente siempre que los dos miembros de una ecuacion se eleven á una misma potencia, ó se estraiga de ellos una misma raiz.

73. Cualquiera que sea la ecuacion que se quiera resolver, las primeras operaciones que hay que hacer son las siguientes: 1.ª quitar denominadores; 2.ª efectuar las operaciones indicadas, si la incógnita se halla dentro de algun paréntesis; 3.ª *hacer la transposicion*, es decir, reunir en un miembro todos los términos conocidos, y en el otro todos los desconocidos: 4.ª *hacer la reduccion*, es decir, reducir á un solo término todos aquellos en que las incógnitas tengan el mismo esponente.

74. *Para quitar los denominadores de una ecuacion, se multiplica el numerador de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demas quebrados, y los términos enteros se multiplican por el producto de todos los denominadores.* De este modo, se multiplican todos los términos por el producto de todos los denominadores, y por consiguiente, si estos denominadores son conocidos, la ecuacion no se altera (*Núm.* 69).

Ejemplo. $$\frac{x}{7}+\frac{5x}{3}-8=\frac{3(x-2)}{4}+14.$$

Para quitar los denominadores, multiplico el numerador x por 12, el numerador $5x$ por 28, el entero 8 por 84, el numerador $3(x-2)$ por 21, y el entero 14 por 84, y resultará

$$12x+140x-672=63(x-2)+1176.$$

Hemos multiplicado el numerador x por 12, y como al mismo tiempo hemos dejado de escribir el denominador 7, hemos vuelto á multiplicar por 7 el quebrado $\frac{12x}{7}$ que resulta de la multiplicacion del quebrado $\frac{x}{7}$ por 12; de modo que el producto $12x$ es igual al quebrado $\frac{x}{7}$ multiplicado por 12 y por 7, esto es por 84. Del mismo modo se demuestra que los otros dos quebrados se han multiplicado por 84; y como los enteros se han multiplicado tambien por 84, todos los términos de la ecuacion se han multiplicado por 84.

Para quitar los denominadores de una ecuacion, cuando dos ó mas de ellos tienen factores comunes, se multiplican todos sus *términos por el múltiplo mas simple de los denominadores*; regla preferible en este caso á la anterior.

Para multiplicar los quebrados por el múltiplo mas simple, en vez de multiplicar el numerador por dicho múltiplo, y dividir en seguida el producto por el denominador, es mas sencillo (*Comp.*[to] *de la Aritm. núm.* 8) dividir el múltiplo por el denominador, y multiplicar el cociente por el numerador (*a*).

Ejemplo. $\frac{2x}{3}-4+\frac{y}{2}+x=8-\frac{3y}{4}+\frac{1}{12}.$

Como en los denominadores existe el factor 3 comun á los denominadores 3 y 12, el factor 2 comun á 2, 4 y 12, y el factor 4 comun á 4 y 12, hallaremos su mas simple múltiplo, que es 12, y multiplicando todos los términos por 12, y tendremos

$$8x-48+6y+12x=96-9y+1.$$

Para multiplicar el quebrado $\frac{2x}{3}$ por 12, parto 12 por 3, y multiplico el cociente 4 por $2x$. Del mismo modo se multiplican los otros quebrados por 12.

75. *Para pasar un término de un miembro á otro, se muda el signo á dicho término.*

En efecto, si tenemos la ecuacion $ax-b=cx+d$, y queremos pasar el término cx al primer miembro, restaremos cx de ambos miembros, lo que no alterará á la ecuacion (*Núm.* 69), y tendremos

$$ax-b-cx=cx+d-cx,$$

ó $\quad ax-b-cx=d$, conforme á la regla.

Si en la misma ecuacion $ax-b=cx+d$, queremos pasar el término b al segundo miembro, añadiremos b á ambos miembros, lo que no alterará á la ecuacion (*Núm.* 69), y tendremos

$$ax-b+b=cx+d+b,$$

ó $\quad ax=cx+d+b$, conforme á la regla.

(*a*) Aplicando esta regla de quitar denominadores al caso en que estos son primos entre sí dos á dos, su múltiplo mas simple será el producto de todos ellos (*Aritm. núm.* 77, *nota*); y el cociente de la division del múltiplo mas simple por el denominador de cada quebrado es el producto de los denominadores de los demás quebrados; de manera que dicha regla se reduce en tal caso á multiplicar el numerador de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás quebrados, es decir, se reduce á la regla ordinaria.

Ejemplos para hacer las cuatro primeras operaciones en las ecuaciónes.

1.° $$\frac{x}{7}+\frac{5x}{3}-8=\frac{3(x-2)}{4}+14.$$

Quitando denominadores, resulta
$$12x+140x-672=63(x-2)+1176.$$
Efectuando las operaciones indicadas, será
$$12x+140x-672=63x-126+1176.$$
Haciendo la transposicion, tendremos
$$12x+140x-63x=672-126+1176.$$
Haciendo la reduccion, $89x=1722$.

2.° $$\frac{4}{x}+9=\frac{3}{x-3}.$$
$$4(x-3)+9x(x-3)=3x.$$

Para quitar los denominadores de esta ecuacion, hemos multiplicado los dos miebmros por el producto $x(x-3)$, múltiplo el mas simple de los denominadores; y como por hallarse x y $x-3$ en los denominadores ninguno de estos factores resulta comun á todos los términos de la nueva ecuacion, se infiere que esta nueva ecuacion no tiene ninguna de las soluciones $x=0$, $x=3$, y que por tanto es equivalente á la propuesta. Continuando la operacion, tendremos
$$4x-12+9x^2-27x=3x,$$
$$9x^2+4x-27x-3x=12,$$
$$9x^2-26x=12.$$

3.° $$\frac{2x}{3}-4+\frac{y}{2}+x=8-\frac{3y}{4}+\frac{1}{12}.$$
$$8x-48+6y+12x=96-9y+1,$$
$$8x+6y+12x+9y=96+1+48,$$
$$20x+15y=145.$$

4.° $$\frac{a(x-g)}{b}-\frac{c(x-d)}{f}-1=h-\frac{x-c}{bf}.$$
$$af(x-g)-bc(x-d)-bf=bfh-x+c,$$
$$afx-afg-bcx+bcd-bf=bfh-x+c,$$
$$afx-bcx+x=afg+bfh+c-bcd+bf.$$

Para hacer la reduccion en este caso, separo el factor comun x (*Número* 27), y será
$$(af-bc+1)x=afg+bfh+c-bcd+bf.$$

Este segundo miembro puede escribirse asi:

$$f(ag+bh+b)+c(1-bd).$$

76. Si todos los términos de una ecuacion tienen un factor comun, se simplifica la ecuacion, suprimiendo dicho factor comun.

Ejemplo. $6abx-9bcd=12bdx+15abc.$

Todos los términos de esta ecuacion tienen el factor comun $3b$: partiéndolos por él, tendremos

$$2ax-3cd=4dx+5ac.$$

Haciendo la transposicion y la reduccion, se hallará

$$(2a-4d)x=c(5a+3d).$$

77. Si en los dos miembros de una ecuacion hay una misma cantidad precedida del mismo signo, se simplificará la ecuacion, suprimiendo dicha cantidad.

Ejemplo. $\frac{x+3}{2}+2=2+\frac{2x-9}{3}.$

Suprimiendo el 2 en ambos miembros, queda la ecuacion

$$\frac{x+3}{2}=\frac{2x-9}{3},$$

la cual, despues de quitar los denominadores, transponer y reducir, se reduce á $x=27$.

78. A veces resultan negativos los dos miembros de una ecuacion, y esto consiste en que, en vez de pasar los términos incógnitos á un miembro, se pasan al otro. En este caso se mudan los signos á todos los términos de la ecuacion; lo que es posible, pues la nueva ecuacion se hallaria pasando todos los términos del primer miembro de la primera ecuacion al segundo, y todos los del segundo al primero; ó multiplicando por -1 todos los términos de la primera ecuacion.

Ejemplo. $4x+9=7x+1.$

Pasando al primer miembro los términos incógnitos y al segundo los conocidos, resulta $4x-7x=1-9$, ecuacion en la que los dos miembros son negativos. Mudando los signos á todos los términos, se tiene

$$7x-4x=9-1.$$

Reduciendo es $3x=8$.

79. El *grado* de una ecuacion con una incógnita es el mayor esponente de esta no hallándose la misma bajo ningun

radical, ni en ningun denominador, y habiendo reducido mental ó efectivamente los términos semejantes.

Asi, la ecuacion $4x-5=2x+9$ es de primer grado.

Para conocer de qué grado es la ecuacion $\frac{4}{x}+9=\frac{5}{x-3}$, quitaremos sus denominadores, efectuaremos las operaciones indicadas, haremos la reduccion de los términos semejantes, y veremos que resulta una ecuacion de segundo grado.

Para conocer de qué grado es la ecuacion $x(3x+1)=3(5-2x+x^2)$, efectuaremos las multiplicaciones indicadas, y tendremos $3x^2+x=15-6x+3x^2$; y como los términos en x^2 se anulan, resulta la ecuacion de primer grado $x=15-6x$.

El *grado* de una ecuacion con dos ó mas incógnitas es la mayor suma de los esponentes de las incógnitas en cada uno de sus términos; no hallándose ninguna de las incógnitas en ningun denominador, ni bajo ningun radical; y habiendo reducido los términos semejantes.

Asi, la ecuacion $xy^4-2x^3=y^3x-1$ es de 5.° grado, pues la mayor suma de los esponentes de las incógnitas en cada término es 5.

CAPÍTULO II.

Resolucion de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

80. Quitando los denominadores, efectuando las operaciones indicadas, haciendo la transposicion y la reduccion, es claro que la ecuacion de primer grado con una incógnita tendrá la forma $ax=b$; de donde resulta (*Núm.* 52) $x=\frac{b}{a}$.

Luego, *para resolver una ecuacion de primer grado con una incógnita, se quitan los denominadores, se efectúan las operaciones indicadas, se hace la transposicion y la reduccion, y entonces la incógnita es igual al otro miembro dividido por su coeficiente.*

Ejemplos de resolucion de una ecuacion de primer grado.

1.° $$\frac{5x}{3}-8=\frac{3(x-2)}{4}+14;$$

$$x=\frac{246}{11}.$$

Nota. Al resolver una ecuacion, puede cometerse algun error, y por eso conviene comprobar el valor hallado para la incógnita. Para esto, se sustituye en la ecuacion en vez de la incógnita su valor, y debe resultar una identidad.

Comprobemos el valor $\frac{246}{11}$, que hemos hallado en este ejemplo.

$$\frac{5\times\frac{246}{11}}{3}-8=\frac{3\times(\frac{246}{11}-2)}{4}+14,$$

$$\frac{1230}{33}-8=\frac{3\times224}{44}+14,$$

$$\frac{966}{33}=\frac{672+616}{44}=\frac{1288}{44},$$

$$\frac{322}{11}=\frac{322}{11}.$$

2.° $$\frac{a(x-g)}{b}-\frac{c(x-d)}{f}-1=h-\frac{x-c}{bf};$$

$$x=\frac{afg+fbh+c-bcd+bf}{af-bc+1}.$$

3.° $$6abx-9bcd=12bdx+15abc;$$

$$x=\frac{5ac+3dc}{2a-4d}.$$

4.° $$4x+9=7x+1;\qquad x=\frac{8}{3}.$$

5.° $$\frac{5x}{2}-\frac{4x}{3}-13=\frac{5}{8}+\frac{x}{32};$$

$$x=12.$$

* 6.° $$\sqrt{x-2}=1+\sqrt{x}.$$

Para resolver esta ecuacion, elevaremos en primer lugar sus dos miembros al cuadrado, con objeto de quitar los signos radicales, y tendremos $x-2=1+2\sqrt{x}+x$, ó $2\sqrt{x}=-3$. Volviendo á elevar esta ecuacion al cuadrado, resulta $4x=9$, de donde $x=\frac{9}{4}$.

Como hemos elevado la ecuacion propuesta al cuadrado, y tambien la que ha resultado de esta elevacion, se puede temer que la última ecuacion tenga mas soluciones que la propuesta; y en efecto, la solucion $x=\frac{9}{4}$ que conviene á la última, no es solucion de la propuesta, pues sustituyendo en esta en vez de x el valor $\frac{9}{4}$, resulta $\sqrt{\frac{9}{4}-2}=1+\sqrt{\frac{9}{4}}$ ó $\frac{1}{2}=1+\frac{3}{2}$, lo que es absurdo; luego la ecuacion propuesta no tiene ninguna solucion.

81. En todas las ecuaciones que hasta ahora hemos resuelto, la incógnita no ha tenido mas que un solo valor.

En general, *en toda ecuacion de primer grado con una incógnita, esta no tiene mas que un solo valor.*

En efecto, la ecuacion de primer grado con una incógnita, despues de las operaciones ordinarias, tiene la forma $ax=b$. El único valor de la incógnita, que satisface á esta ecuacion, es $\frac{b}{a}$; pues no puede existir ningun otro número que multiplicado por a dé por producto b.

CAPÍTULO III.

Eliminacion de una incógnita entre dos ecuaciones de primer grado con dos ó mas incógnitas.

82. *Eliminar* una incógnita entre dos ecuaciones es deducir de ellas, por medio de operaciones que no alteren á los valores de las incógnitas, otra ecuacion que no contenga á dicha incógnita.

En todos los métodos de eliminacion que vamos á esponer, supondremos que las ecuaciones tienen la forma

$$ax+by+cz+\ldots\ldots=k \qquad (1)$$

en que los coeficientes a, b, c..... son números enteros; para lo cual se quitan los denominadores, se efectuan las operaciones indicadas, se hace la transposicion y la reduccion.

§. 1.° Método de sustitucion.

Para eliminar por este método *una incógnita entre dos ecuaciones, se despeja la incógnita en cualquiera de las ecuaciones, y se sustituye su valor en la otra ecuacion.*

Ejemplo. Sean las dos ecuaciones

$$3x-2y+8z=22,$$
$$5x+4y+z=34.$$

Para eliminar entre estas dos ecuaciones la x, despejo esta incógnita en cualquiera de dichas ecuaciones, en la primera por ejemplo. Para esto, se consideran las otras incognitas como si fuesen conocidas, y se aplica el método de resolucion de las ecuaciones de primer grado con una incógnita (*Núm.* 80): tendremos, pues, haciendo la transposicion,

$$3x=22+2y-8z,$$

y por consiguiente $x=\frac{22+2y-8z}{3}$.

Sustituyo ahora el valor de x en la otra ecuacion, y tendré

$$\frac{5(22+2y-8z)}{3}+4y+z=34.$$

Queda eliminada la x.

Si se quiere poner (*Núm.* 82) esta ecuacion bajo la forma de la ecuacion (1), quitaré el denominador, multiplicando todos los términos por 3, y será

$$5(22+2y-8z)+12y+3z=102.$$

Efectuando la multiplicacion indicada, tendremos

$$110+10y-40z+12y+3z=102.$$

Haciendo la transposicion, será

$$10y-40z+12y+3z=102-110.$$

Reduciendo, resulta

$$22y-37z=-8;$$

y mudando los signos á todos los términos de esta ecuacion, es

$$37z-22y=8.$$

Para eliminar la y entre las mismas ecuaciones, despejo esta incógnita en cualquiera de dichas ecuaciones, en la primera por ejemplo, y tendré

$$y=\frac{3x+8z-22}{2}.$$

Sustituyendo el valor de la y en la otra ecuacion, será

$$5x+\frac{4(3x+8z-22)}{2}+z=34.$$

Queda eliminada la y.

Si se quiere escribir esta ecuacion bajo la forma ordinaria (*Núm.* 82), resultará, hechas las operaciones convenientes

$$22x+34z=156,$$

y suprimiendo el factor comun 2,

$$11x+17z=78.$$

Para eliminar la z entre las mismas ecuaciones, la despejaremos en una de las ecuaciones, en la segunda por ejemplo, y tendremos

$$z=34-5x-4y,$$

y sustituyendo su valor en la primera ecuacion, será

$$3x-2y+8(34-5x-4y)=22.$$

Si se quiere escribir esta ecuacion bajo la forma ordinaria, se harán las operaciones convenientes, y resultará

$$37x+54y=250.$$

§. 2.º MÉTODO DE ADICION Ó SUSTRACCION.

Para eliminar por este método *una incógnita entre dos ecuaciones de primer grado, se hace primeramente que la incógnita que se va á eliminar, tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones; para lo cual, se multiplica cada ecuacion* (a) *por el coeficiente que tiene la incógnita en la otra ecuacion: se restan en seguida las dos ecuaciones, si los dos términos en que entra la incógnita tienen el mismo signo; y se suman, si dichos términos tienen signo contrario.*

Ejemplo. Sean las dos ecuaciones

$$7x-5y=22,$$
$$9x+4y=34.$$

Para eliminar la x, multiplico la primera ecuacion por 9 y la segunda por 7, y tendré estas otras dos ecuaciones equivalentes á las propuestas:

$$63x-45y=198,$$
$$63x+28y=238.$$

Restando estas dos ecuaciones, será

$$63x+28y-63x+45y=238-198,$$

y reduciendo, resulta $73y=40.$

(a) Entiéndase *los dos miembros de la ecuacion,* ó todos los términos de la ecuacion. Lo mismo debe entenderse cuando, por abreviar, se dice que con una ecuacion se hace una operacion cualquiera.

Si los coeficientes de la incógnita que se va á eliminar, no son primos entre sí, es preferible, para hacer que los coeficientes de la misma incógnita sean iguales, hallar el menor múltiplo de dichos coeficientes, y multiplicar cada ecuacion por el factor que falta al coeficiente de la incógnita para componer dicho menor múltiplo.

Ejemplo. Sean las dos ecuaciones

$$108x-12y+5z-4u=22,$$
$$45x-3y+11z-9u=13.$$

Para eliminar la x, observo que los coeficientes 108 y 45 tienen el factor comun 9: el menor múltiplo de estos coeficientes es (*Aritm. núm.* 77) $2^2.\ 3^3.\ 5.=108\times5=45\times12$.

Multiplico pues la primera ecuacion por 5 y la segunda por 12, y tendré

$$108.5x-60y+25z-20u=110,$$
$$45.12x-36y+132z-108u=156.$$

Restando estas dos ecuaciones, y haciendo la reduccion, será

$$24y+107z-88u=46.$$

Nota. Este método de eliminacion, que es el mas sencillo en las ecuaciones de primer grado, puede abreviarse en la práctica, efectuando las multiplicaciones y la adiccion ó sustraccion, y aun la reduccion, al mismo tiempo. Asi, para eliminar la z entre las dos ecuaciones de este ejemplo, se escriben á la izquierda de estas ecuaciones los multiplicadores 11 y 5, como se ve á continuacion:

$$\begin{array}{r|l} 11 & 108x-12y+5z-4u=22, \\ 5 & 45x-3y+11z-9u=13. \end{array}$$

Efectuando ahora las multiplicaciones, y al mismo tiempo la sustraccion y reduccion, resulta inmediatamente

$$963x-117y+u=177.$$

§. 3.° Método de igualacion.

Para eliminar por este método *una incógnita entre dos ecuaciones de primer grado, se despeja dicha incógnita en las dos ecuaciones, y se igualan en seguida sus valores.*

Ejemplo. Sean las dos ecuaciones

$$7x-11y=20,$$
$$17x+22y=93.$$

Para eliminar la x, despejo en ambas ecuaciones esta incógnita, y tendré

$$x=\frac{20+11y}{7},\quad x=\frac{95-22y}{17}:$$

igualando ahora los valores de x, resultará la ecuacion

$$\frac{20+11y}{7}=\frac{95-22y}{17},$$

que no contiene á la x.

Para eliminar la y, despejaré esta incógnita en las dos ecuaciones, y tendré

$$y=\frac{7x-20}{11},\quad y=\frac{95-17x}{22}:$$

igualando los dos valores de y, será

$$\frac{7x-20}{11}=\frac{95-17x}{22}.$$

Queda eliminada la y.

83. *Eliminar* una incógnita entre n ecuaciones es deducir de ellas, por medio de operaciones que no alteren á los valores de las incógnitas, $n-1$ ecuaciones que no contengan á dicha incógnita.

Para eliminar una incógnita entre n ecuaciones, se elimina esta incógnita entre dos de dichas ecuaciones; en seguida se elimina la misma incógnita entre dos ecuaciones, cuya combinacion sea diferente de la anterior; despues se elimina dicha incógnita entre dos ecuaciones cuya combinacion sea diferente de las dos anteriores; y asi sucesivamente, hasta que se obtengan $n-1$ ecuaciones (*a*).

* NOTA. Un *sistema* de ecuaciones es una reunion de dos ó mas ecuaciones.

Solucion de un sistema de ecuaciones es la combinacion de valores de las incógnitas que satisfacen á dichas ecuaciones.

(*a*) Siendo el número de estas combinaciones $\frac{n(n-1)}{2}$ (*Núm.* 131), y siendo este número mayor que $n-1$ desde $n=3$ en adelante, se deberán preferir aquellas combinaciones de ecuaciones que den con mas facilidad las $n-1$ ecuaciones que se buscan.

Un sistema de ecuaciones es *equivalente* á otro, cuando ambos sistemas tienen las mismas soluciones.

Se dice que una ecuacion *puede reemplazar* á una de las ecuaciones de un sistema, cuando el sistema no se altera por este cambio, ó lo que es igual, cuando, á pesar de este cambio, el nuevo sistema es equivalente al propuesto.

Demostremos que siguiendo cualquiera de los métodos de eliminacion, que acabamos de esplicar, la ecuacion que resulta eliminando una incógnita entre varias ecuaciones con varias incógnitas, puede reemplazar á cualquiera de estas ecuaciones.

Consideremos dos casos: 1.° que las ecuaciones propuestas sean dos, 2.° que sean un número cualquiera.

1.er *caso. Método de sustitucion.* Supongamos, para fijar las ideas, que las dos ecuaciones tengan tres incógnitas: serán en general

$$ax+by+cz=d \ldots\ldots \quad (1)$$
$$a'x+b'y+c'z=d' \ldots\ldots \quad (2).$$

La ecuacion (1) nos da $x=\dfrac{d-by-cz}{a}$, valor que sustituido en la ecuacion (2), transforma á esta en

$$a'\times\frac{d-by-cz}{a}+b'y+c'z=d' \ldots \quad (3).$$

Sea $x=m$, $y=n$, $z=p$ una solucion de las ecuaciones (1) y (2); tendremos por consiguiente las identidades

$$am+bn+cp=d,$$
$$a'm+b'n+c'p=d'.$$

La primera identidad nos da $m=\dfrac{d-bn-cp}{a}$: sustituyendo en la ecuacion (3) los valores de x, y, z, encontramos el resultado

$$a'\times\frac{d-bn-cp}{a}+b'n+c'p=d',$$

que en virtud del valor de m se convierte en

$$a'm+b'n+c'p=d,$$

que es una identidad por suposicion; luego toda solucion de las ecuaciones (1) y (2) es solucion de la ecuacion (3).

Al contrario, sea $x=m$, $y=n$, $z=p$ una solucion de las ecuaciones (1) y (3): tendremos las identidades

$$am + bn + cp = d,$$

$$a' \times \frac{d - bn - cp}{a} + b'n + c'p = d:$$

de la primera de estas dos identidades resulta $m = \frac{d - bn - cp}{a}$, valor que sustituido en la identidad segunda, la transforma en la

$$a'm + b'n + c'p = d'$$

es decir que la solucion $x = m$, $y = n$, $z = p$ lo es tambien de la ecuacion (2).

Si $x = m$, $y = n$, $z = p$ es una solucion de las ecuaciones (2) y (3), tendremos las identidades

$$a'm + b'n + c'p = d',$$

$$a' \times \frac{d - bn - cp}{a} + b'n + c'p = d',$$

cuya comparacion nos da evidentemente $m = \frac{d - bn - cp}{a}$, ó $am + bn + cp = d$; luego dicha solucion lo es de la ecuacion (1).

Queda pues demostrado que el sistema de las ecuaciones (1) y (2) es equivalente al de las ecuaciones 1 y 3, y tambien al de las ecuaciones (2) y (3).

Método de adicion ó sustraccion.

Demostremos ante todas cosas un teorema útil para nuestro objeto actual, y para en adelante.

Dado un sistema de ecuaciones $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, etc. *la ecuacion* $A \pm B \pm C \pm \ldots = 0$ *puede reemplazar á cualquiera de las propuestas, por ejemplo á la* $A = 0$.

En efecto, claro es que toda solucion de las ecuaciones propuestas es solucion de la $A \pm B \pm C \pm \ldots = 0$. Al conrio, toda solucion del sistema $B = 0$, $C = 0, \ldots$ $A \pm B \pm C \pm \ldots = 0$ es evidentemente solucion de la $A = 0$.

Luego ambos sistemas de ecuaciones tienen las mismas soluciones, y son por lo tanto equivalentes; ó en otros términos, la nueva ecuacion reemplaza á cualquiera de las propuestas.

Pasemos ahora á nuestro objeto presente.

Sean las dos ecuaciones propuestas con cualquier número de incógnitas $A = 0$, $B = 0$: multiplicándolas por dos números m y n, serán $mA=0$, $nB=0$, equivalentes á las propuestas (69). En el método de adicion ó sustraccion, ya se sabe, que despues de multiplicar las dos ecuaciones por números convenientes, se suman ó restan las dos ecuaciones, lo que nos da, si á dichos números llamamos m y n, la ecuacion $mA \pm nB=0$, que segun queda demostrado en el teorema último, reemplaza á cualquiera de las ecuaciones $mA=0$, $nB=0$, y por lo tanto á cualquiera de las ecuaciones $A=0$, $B=0$. Queda pues demostrado que la ecuacion resultante, siguiendo este método de eliminacion, y una cualquiera de las propuestas forman un sistema equivalente al de estas ecuaciones.

Método de igualacion. Es un método de sustitucion despues que se han despejado las dos incógnitas, y por lo tanto puede aplicarse aquí el razonamiento hecho para probar la legitimidad del método de sustitucion.

2.° *caso.* Consideremos ahora un número cualquiera de ecuaciones, tres para fijar las ideas,

$$A=0,\ B=0,\ C=0:$$

digo que si entre estas ecuaciones eliminamos una incógnita, las dos ecuaciones resultantes y una cualquiera de las propuestas, por ejemplo $A=0$, forman un sistema equivalente al dado.

Sean $$(A,\ B)=0,\ (A,\ C)=0$$

las ecuaciones que resultan eliminando una incógnita entre $A=0$ y $B=0$, y entre $A=0$ y $C=0$; y sea $x=m$, $y=n$, $z=p$,... una solucion de las ecuaciones propuestas. Segun el primer caso, esta solucion lo es de la ecuacion $(A,\ B)=0$, y tambien de la $(A,\ C)=0$. Al contrario, sea $x=m$, $y=n$, $z=p$,.... una solucion de las ecuaciones

$$A=0,\ (A,\ B)=0,\ (A,\ C)=0:$$

hemos visto que esta solucion lo es de la ecuacion $B=0$, y tambien de la $C=0$. Luego queda demostrado que toda solucion de las ecuaciones $A=0$, $B=0$, $C=0$ es solucion de las $(A,\ B)=0$, $(A,\ C)=0$; y al contrario, que toda solucion de las ecuaciones $A=0$, $(A,\ B)=0$, $(A,\ C)=0$, lo es de las $B=0$, $C=0$; luego los dos sistemas de ecuaciones

$$A=0,\ B=0,\ C=0,$$

y $$A=0,\ (A,\ B)=0,\ (A,\ C)=0,$$

tienen las mismas soluciones, ó son equivalentes.

CAPÍTULO IV.

Resolucion de un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas.

---

84. *Resolver* una ó mas ecuaciones con varias incógnitas, es hallar sus diferentes soluciones.

Para resolver un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas, se elimina una incógnita entre dichas ecuaciones; y resultará una ecuacion menos y una incógnita menos. Se vuelve á eliminar una incógnita en estas ecuaciones; y continuando del mismo modo, se llegará á una ecuacion con una incógnita. Se halla el valor de esta incógnita, y por medio de ella se hallarán fácilmente los valores de las demás.

Ejemplos. 1.° $9x-11y=39,$
$$7x+4y=68.$$

Eliminando la y, resulta $113x=904$, de donde $x=\frac{904}{213}=8$.

Para hallar el valor de y, se sustituirá el de x en cualquiera de las ecuaciones que contenga á estas dos incógnitas; y despejando en seguida la y, resulta $y=3$.

Nota. Si se ha seguido el método 1.° ó el 3.° para eliminar la y, despues que se ha hallado el valor de x, se hallará el valor de y, sustituyendo el valor de x en la ecuacion en que está despejada la y.

Comprobacion de los valores hallados para las incógnitas.

$$9\times8-11\times3=39,$$
$$7\times8+4\times3=68;$$

ó bien
$$39=39,$$
$$68=68.$$

2.°
$$5x-6y+4z=15,$$
$$7x+4y-3z=19,$$
$$2x+y+6z=46.$$

Eliminemos la y entre 1.ª y 3.ª, y entre 2.ª y 3.ª: resultan las dos ecuaciones
$$17x+40z=291,$$
$$x+27z=165.$$

Eliminando entre estas ecuaciones la x, resulta $419z=2514$, de donde $z=6$, y por consiguiente $x=3$, $y=4$.

Ahora es fácil comprobar estos valores.

3.°
$$\begin{aligned} 4x-3y+2z&=9,\\ 2x+5y-3z&=4,\\ 5x+6y-2z&=18.\end{aligned}$$

Eliminando la z entre 1.ª y 2.ª, y entre 1.ª y 3.ª, resultan
$$\begin{aligned} 16x+y&=35,\\ 3x+y&=9.\end{aligned}$$

Eliminando la y entre estas dos ecuaciones, resulta $13x=26$, de donde $x=2$, y por consiguiente $y=3$, $z=5$.

4.°
$$\begin{aligned} 10x-20y+30z&=60,\\ 8x+12y-16z&=80,\\ 27x-18y+45z&=234.\end{aligned}$$

Antes de proceder á la eliminacion, conviene simplificar las ecuaciones cuando existe algun factor comun á todos sus términos. La primera de estas ecuaciones tiene el factor comun 10, la segunda el factor comun 4, y la tercera el factor comun 9. Suprimiendo estos factores comunes, las nuevas ecuaciones serán
$$\begin{aligned} x-2y+3z&=6,\\ 2x+3y-4z&=20,\\ 3x-2y+5z&=26.\end{aligned}$$

Eliminando la x entre 1.ª y 2.ª, y entre 1.ª y 3.ª, resultan
$$\begin{aligned} 7y-10z&=8,\\ y-z&=2.\end{aligned}$$

Eliminando la y entre estas dos ecuaciones, resulta $3z=6$, de donde $z=2$; y por consiguiente $y=4$, $x=8$.

5.°
$$\begin{aligned} ay+bx&=c;\\ cx+az&=b,\\ bz+cy&=a.\end{aligned}$$

Como en este casó cada incógnita no entra en todas las ecuaciones, la eliminacion es mas breve; pues si, por ejemplo, elimino la x entre las dos primeras, la ecuacion que resulte y la tercera serán dos ecuaciones con dos incógnitas. Hecha la eliminacion, resulta
$$acy-abz=c^2-b^2.$$

Eliminando la z entre esta ecuacion y la $bz+cy=a$, resulta
$$2acy=a^2+c^2-b^2,$$

de donde $$y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Por consiguiente

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

6.°

$$7u-13z=87,$$
$$3u+14x=57,$$
$$10y-3x=11,$$
$$2x-11z=50.$$

En este caso sucede que la incógnita y no entra mas que en la tercera ecuacion; por lo tanto se prescinde de esta ecuacion, y en las otras tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas.

Cada incógnita entra en dos de estas tres ecuaciones; y asi, es indiferente principiar la eliminacion por cualquiera de las incógnitas.

Eliminemos la u entre 1.ª y 2.ª, y resulta

$$98x+39z=138.$$

Esta ecuacion y la 4.ª son dos ecuaciones con dos incógnitas: de ellas resultan $x=3$, $z=-4$; y por consiguiente $y=2$, $u=5$.

7.°

$$3x-2y-5z=11,$$
$$8t-5y=25,$$
$$5x+3y-7u=47,$$
$$2x-13u=5,$$
$$143x+87u=1374.$$

Las dos últimas ecuaciones son dos ecuaciones con dos incógnitas: de ellas resultan $x=9$, $u=1$; y por consiguiente $y=3$, $t=5$, $z=2$.

* 85. *Eliminando una incógnita entre dos ecuaciones de primer grado con cualquier número de incógnitas, la ecuacion que resulta es de primer grado.*

Sean las dos ecuaciones generales de primer grado

$$ax+by+cz+\ldots=k,$$
$$a'x+b'y+c'z+\ldots=k'.$$

Eliminando la x, resulta la ecuacion de primer grado

$$(ba'-ab')y+(ca'-ac')z+\ldots=a'k-ak';$$

lo que demuestra la verdad del teorema.

* *Eliminando* $n-1$ *incógnitas entre* n *ecuaciones de primer grado con* n *incógnitas, la ecuacion final que resulta, es de primer grado.*

En efecto, segun el teorema anterior, de cada dos ecuaciones que se tomen para eliminar una incógnita, resulta una ecuacion de primer grado; luego eliminando una incógnita entre las n ecuaciones (*Núm.* 83), las $n-1$ nuevas ecuaciones que resulten, serán de primer grado. Volviendo á eliminar una incógnita entre estas $n-1$ ecuaciones, las $n-2$ ecuaciones que resulten, serán de primer grado, y asi sucesivamente: luego despues de haber eliminado las $n-1$ incógnitas, la ecuacion final que resulte, será de primer grado.

* 86. En todos los ejemplos que acabamos de resolver, cada incógnita ha tenido un solo valor.

En general, *en un sistema de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas cada incógnita no tiene mas que un solo valor* (a).

Pues si hubiere alguna incógnita que tuviese varios valores, eliminando todas las otras incógnitas, la última ecuacion contendria á dicha incógnita, y de ella resultarian sus valores; pero segun el teorema 2.° del núm. 85, la ecuacion final es de primer grado; luego en una ecuacion de primer grado con una incógnita, esta tendria mas que un solo valor; lo que es imposible (*Núm.* 78).

* 87. Resolvamos las dos ecuaciones generales

$$ax+by=c,$$
$$a'x+b'y=c'.$$

Por cualquiera de los métodos enseñados, hallaremos fácilmente los valores siguientes:

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},\quad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Para resolver por medio de estas fórmulas dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se hallarán los valores particulares de las letras de las dos ecuaciones $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$; y sustituyendo en las dos fórmulas estos valores particulares, se tendrán los valores de las incógnitas de las dos ecuaciones propuestas.

(a) Suponemos aquí que las ecuaciones son distintas y compatibles. Véanse los números 92 y 93.

Ejemplo. Sean las dos ecuaciones

$$-x+y=4,$$
$$3x-y=4.$$

En este caso $a=-1$, $b=1$, $c=3$, $a'=3$, $b'=-1$, $c'=4$.

$$x=\frac{3\times-1-1\times4}{-1\times-1-1\times3}=\frac{-3-4}{1-3}=3\frac{1}{2},$$

$$y=\frac{-1\times4-3\times3}{-2}=\frac{-4-9}{-2}=6\frac{1}{2}.$$

88. Resolvamos ahora las tres ecuaciones con tres incógnitas

$$ax+by+cz=d,$$
$$a'x+b'y+c'z=d',$$
$$a''x+b''y+c''z=d''.$$

Eliminando la y y la z entre estas tres ecuaciones y despejando la x en la ecuacion que resulta, se halla

$$x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

Los valores de y y de z se pudieran hallar por un cálculo enteramente semejante. Pero observando que la x y la y entran en las ecuaciones propuestas del mismo modo, el cálculo que se hiciere para hallar la y, solo se diferenciaria del que se ha hecho para hallar la x, en que estarian permutadas las letras a y b, a' y b', a'' y b''; luego el valor de y puede deducirse del de x, efectuando estas permutaciones.

Por igual razon el valor de z puede deducirse del de x, permutando a y c, a' y c', a'' y c''.

Tendremos pues

$$y=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

$$z=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

89. Observando las fórmulas que resultan para los valores de las incógnitas, tanto en el caso de dos ecuaciones como en el de tres, resultan, para hallar estas fórmulas, las reglas siguientes:

Si son dos las ecuaciones, con las letras a y b se forman las dos permutaciones ab y ba, se pone el signo — entre ellas y un acento á la segunda letra de cada término; y el resultado $ab'-ba'$, es el denominador comun de los valores de x é y.

Si son tres las ecuaciones, se colocará la tercera letra c al fin, en medio y al principio de cada una de las dos permutaciones ab y ba, se alternarán los signos $+$ y $-$, se pondrá un acento á la segunda letra y dos acentos á la tercera, y se tendrá el denominador comun de las tres fórmulas.

La misma regla se seguiria, si las ecuaciones fuesen mas de tres.

Para hallar el numerador de cada fórmula, no hay mas que mudar en el denominador los coeficientes que tiene la incógnita en todas las ecuaciones, en las letras que indican los segundos miembros.

Se pueden demostrar estas reglas; pero el dar esta demostracion es perder el tiempo, pues esta teoría no es mas que curiosa.

La aplicacion de estas fórmulas á la resolucion de ecuaciones particulares es poco conveniente: es incomparablemente mas sencillo el resolver dichas ecuaciones particulares directamente.

* CAPÍTULO V.

Casos de imposibilidad é indeterminacion en las ecuaciones de primer grado. Discusion de las fórmulas generales de las ecuaciones de primer grado.

Artículo 1.°

Ecuacion numérica con una incógnita.

90. Sea la ecuacion

$$\frac{x}{3}+\frac{5x}{12}+40=\frac{3x}{4}+49.$$

Quitando denominadores, resulta

$$4x+5x+480=9x+588,$$

ó

$$9x+480=9x+588,$$

ecuacion evidentemente imposible. Como los dos miembros de esta ecuacion son 12 veces mayores que los de la ecuacion propuesta, se infiere que esta ecuacion es tambien imposible.

La imposibilidad de la ecuacion propuesta se puede manifestar por ella misma; pues si se reducen los dos quebrados del primer miembro á uno solo, dicha ecuacion será

$$\frac{3x}{4}+40=\frac{3x}{4}+49,$$

ecuacion imposible.

Si despues de hacer la transposicion en la ecuacion

$$4x+5x+480=9x+488,$$

se hiciese la reduccion, resultaria la igualdad imposible

$$x\times0=108,\ \text{ó}\ 0=108,$$

y esto nos advertiria la imposibilidad de la ecuacion.

Sea la ecuacion $\frac{x}{3}+\frac{5x}{12}+39=\frac{3(x+52)}{4}$.

Quitando los denominadores, la ecuacion será

$$4x+5x+468=9\,(x+52).$$

Efectuando las operaciones indicadas, resulta la identidad

$$9x+468=9x+468,$$

la cual quedará satisfecha, cualquiera que sea el valor que se dé á la x. Como los dos miembros de esta identidad son 12 veces mayores que los de la ecuacion propuesta, se infiere que tambien esta ecuacion es una identidad; lo que puede comprobarse efectuando las operaciones indicadas en ambos miembros.

Si despues de quitar los denominadores y de efectuar las operaciones indicadas, se hubiesen hecho la transposicion y la reduccion, hubiera resultado la igualdad evidente $0\times x=0$, ó $0=0$; y esto nos indicaria que la ecuacion propuesta era una identidad.

Artículo 2.°

Discusion de la ecuacion literal con una incógnita.

---

91. *Discutir* una ecuacion literal es examinar los diferentes valores que puede tener la incógnita, segun los valores particulares qne se den á los coeficientes.

Despues de quitar denominadores, efectuar las operaciones indicadas, transponer y reducir, la ecuacion general de primer grado con una incógnita tiene la forma $ax=b$, de la cual resulta

$$x=\frac{b}{a}.$$

Si por cierta suposicion es $a=0$, resulta $x=\frac{b}{0}=\infty$; es decir que no existe ningun número finito que satisfaga á la ecuacion; ó bien, que esta ecuacion es imposible: lo que por otra parte es evidente, pues la ecuacion numérica que se quisiera resolver por medio de esta fórmula, se reduciria á $0\times x=b$, ó $0=b$.

Si a y b tienen en la fórmula $x=\frac{b}{a}$ los valores 0 y 0, el valor de x se convierte en $\frac{0}{0}$, y por tanto (*Núm.* 67) x tendrá un valor cualquiera: y en efecto, la ecuacion numérica que se quisiera resolver en el caso en que $a=b=0$ por medio de la fórmula $x=\frac{b}{a}$, se reduciria á $0\times x=0$, ó á $0=0$; luego dicha ecuacion seria una identidad (*Núm.* 90).

Artículo 3.°

Dos ó mas ecuaciones numéricas con igual número de incógnitas.

---

92. Sean las dos ecuaciones con dos incógnitas

$$7x-3y=9,$$
$$14x-6y=23.$$

Eliminando la y, resulta $0\times x=5$; luego no existe valor alguno finito de x, que con otro de y formen una solucion de las dos ecuaciones propuestas.

En este caso se dice que las ecuaciones son ***contradictorias* ó *incompatibles***, ó que ***su sistema es imposible.***

Puede manifestarse fácilmente la incompatibilidad de estas dos ecuaciones; pues, si partimos todos los términos de la segunda ecuacion por 2, resulta

$$7x-3y=11\frac{1}{2},$$

ecuacion evidentemente incompatible con la primera.

93. Se dice que una ecuacion es *consecuencia* de otra, cuando se deduce de esta por medio de una operacion que no la altère.

Se dice que una ecuacion es *consecuencia* de otras, cuando puede deducirse de estas por medio de una operacion que no las altere.

Se dice que dos ecuaciones son *distintas*, cuando una de las ecuaciones no puede deducirse de la otra por medio de una operacion que no altere á esta.

94. Sean las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 7x-3y&=9, \\ 14x-6y&=18. \end{aligned}$$

Eliminada la y, resulta $x\times 0=0$, es decir, que x tiene un valor cualquiera, el cual con el valor correspondiente de y, sacado de cualquiera de las dos ecuaciones propuestas, formará una solucion; de modo que las dos ecuaciones tendrán una infinidad de soluciones.

En este ejemplo es fácil ver que la segunda ecuacion es una consecuencia de la primera; pues multiplicando por 2 todos los términos de esta, resulta la segunda ecuacion.

Como las dos ecuaciones tienen una infinidad de soluciones, se dice que el sistema de dos ecuaciones, de las que la una es consecuencia de la otra, es un sistema *indeterminado*.

Sean las tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{aligned} 4x-3y+2z&=31, \\ x+2y-z&=7, \\ 8x+5y-2z&=82. \end{aligned}$$

Eliminando la x, resultan dos ecuaciones incompatibles; y por consiguiente el sistema de las tres ecuaciones propuestas es imposible.

La imposibilidad de este sistema consiste en que el primer miembro de la tercera ecuacion es la suma del primer miembro de la primera y del cuádruplo del primer miembro de la segunda; mientras que el segundo miembro de la tercera ecuacion no reune estas condiciones.

Sean las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x-3y+2z&=31, \\ x+2y-z&=7, \\ 8x+5y-2z&=59. \end{aligned}$$

Eliminando la x, resultan las dos ecuaciones

$$6z-11y=3,$$
$$6z-11y=3,$$

que no siendo mas que una distinta, prueban que el sistema de las tres ecuaciones propuestas es indeterminado.

La indeterminacion de este sistema consiste en que la tercera ecuacion es una consecuencia de las otras dos; pues la tercera ecuacion resulta de la suma de la primera con el cuádruplo de la sogunda.

Sean las tres ecuaciones

$$7x-\ 6y+5z=20,$$
$$14x-12y+3z=26,$$
$$21x-18y+7z=44.$$

Eliminando la x, resultan $7z=14$, $8z=16$: de cualquiera de estas ecuaciones resulta $z=2$. Conocido el valor de z, tenemos, para hallar los valores de x é y, las dos ecuaciones

$$7x-\ 6y=10,$$
$$14x-12y=20,$$

que siendo la una consecuencia de la otra, prueban que el sistema de las tres ecuaciones es indeterminado, aunque el valor de z sea determinado.

Es fácil hacer ver en las ecuaciones propuestas que el valor de z debe ser 2, para que el sistema de las tres ecuaciones sea posible.

En efecto, la primera y la segunda dan

$$7x-\ 6y=20-5z,$$
$$14x-12y=26-3z;$$

y partiendo por 2 esta última, es

$$7x-6y=13-\frac{3z}{2}:$$

luego, para que estas ecuaciones sean compatibles, es menester que $20-5z=13-\frac{3z}{2}$, de donde resulta $z=2$.

Artículo 4.°

Discusion de dos ó mas ecuaciones literales con igual número de incógnitas.

95. Sean las dos ecuaciones con dos incógnitas

$$ax+by=c,$$
$$a'x+b'y=c'.$$

De ellas resultan

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},$$

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Si el denominador es cero, sin serlo ninguno de los numeradores, resultan

$$x=\frac{cb'-bc'}{0},$$

$$y=\frac{ac'-ca'}{0},$$

valores infinitos; luego las ecuaciones propuestas no pueden en este caso quedar satisfechas por un sistema de valores finitos de las dos incógnitas, y por tanto dichas ecuaciones son incompatibles.

Para manifestar la incompatibilidad de las dos ecuaciones propuestas por medio de ellas mismas, deduzcamos de la ecuacion $ab'-ba'=0$ el valor de una de las letras, de a' por ejemplo, que es $a'=\frac{ab'}{b}$, y sustituyendo este valor en la segunda de las ecuaciones, esta ecuacion se convierte en

$$\frac{ab'}{b}x+b'y=c',$$

ó quitando el denominador, y dividiendo en seguida por b', dicha ecuacion será

$$ax+by=\frac{bc'}{b'} \qquad (m).$$

Como por suposicion $cb' \gtrless bc'$, y por consiguiente $c\gtrless\frac{bc'}{b'}$, la ecuacion (m) es evidentemente incompatible con la ecuacion primera $ax+by=c$; y pues la ecuacion (m) es la misma ecuacion $a'x+b'y=c'$, resulta que las dos ecuaciones propuestas son incompatibles.

Si el denominador es cero al mismo tiempo que lo es uno de los numeradores, es decir, si tenemos al mismo tiempo $ab'-ba'=0$, $cb'-bc'=0$, digo que el otro numerador será tambien cero.

En efecto, de las dos ecuaciones

$$ab'-ba'=0,$$

$$cb'-bc'=0$$

99. Para resolver dos ó mas ecuaciones de primer grado con mayor número de incógnitas, se despejarán tantas incógnitas como son las ecuaciones, considerando á las demás incógnitas como si fuesen cantidades conocidas; y dando en seguida un valor arbitrario á cada una de estas últimas, estos valores y los correspondientes de las incógnitas despejadas formarán una solucion; y es claro que asi se podrán obtener tantas soluciones como se quieran.

Ejemplo. $$3x+2y-z+14u=20,$$
$$2x-y+2z-3u=5.$$

Despejemos las incógnitas y, z, considerando á las otras dos x y u como conocidas. Para esto, paso x y u á los segundos miembros, y las dos ecuaciones serán

$$2y-z=20-3x-14u,$$
$$2z-y=5-2x+3u.$$

De estas ecuaciones resultan

$$z=\frac{30-7x-8u}{3},\quad y=\frac{45-8x-25u}{3}.$$

Dando ahora á x y á u valores arbitrarios, se hallarán los correspondientes de z y de y; de modo que se podrán hallar cuantas soluciones se quieran.

CAPÍTULO VII.

Resolucion de varias ecuaciones de primer grado con menor número de incógnitas.

100. Para resolver varias ecuaciones de primer grado con menor número de incógnitas, se despejarán estas en tantas ecuaciones como ellas son, y se sustituirán en seguida sus valores en las ecuaciones escedentes, para ver si dichos valores satisfacen á estas ecuaciones: si dichos valores no satisfacen á las ecuaciones escedentes, es claro que el sistema de las ecuaciones propuestas será imposible.

Si las ecuaciones son literales, despues de sustituir los valores de las incógnitas en las ecuaciones escedentes, resultarán igualdades sin incógnita, las cuales se llaman *ecuaciones de condicion*, porque indican las condiciones á que deben satisfacer los datos, para que sea posible cualquier sistema particular de ecuaciones comprendido en el general de que se trata.

Ejemplo 1.° Sean cuatro las ecuaciones con tres incógnitas

$$x-az=\alpha,$$
$$y-bz=\beta,$$
$$x-a'z=\alpha',$$
$$y-b'z=\beta'.$$

La primera y tercera ecuaciones me dan los valores de las dos incógnitas x y z, que son

$$x=\frac{a\alpha'-a'\alpha}{a-a'},\ z=\frac{\alpha'-\alpha}{a-a'}.$$

Sustituyendo el valor de z en la segunda, resulta

$$y=b.\frac{\alpha'-\alpha}{a-a'}+\beta.$$

Sustituyendo los valores de y y de z en la cuarta ecuacion, se tendrá la ecuacion de condicion

$$(a-a')(\beta'-\beta)=(b-b')(\alpha'-\alpha),$$

la cual pudiera hallarse en este caso con mas brevedad, igualando los dos valores de z sacados de la primera y tercera ecuaciones, y de la segunda y cuarta.

Ejemplo 2.° Sean las cuatro ecuaciones con dos incógnitas

$$x+y=s,\ x-y=d,\ xy=p,\ \frac{x}{y}=c.$$

Las dos primeras nos dan $x=\frac{s+d}{2}$, $y=\frac{s-d}{2}$; sustituyendo estos valores en las otras dos, resultan las dos ecuaciones de condicion

$$\frac{s+d}{2}\times\frac{s-d}{2}=p,\quad \frac{s+d}{s-d}=c,$$

ó simplificándolas $\quad s^2-d^2=4p,\quad \frac{s}{d}=\frac{c+1}{c-1}.$

LIBRO TERCERO.

PROBLEMAS DETERMINADOS DE PRIMER GRADO.

CAPÍTULO I.

Nociones preliminares.

101. Sabemos ya (*Núm.* 1) que la resolucion de todo problema numérico consta de dos partes: la primera consiste en hallar las relaciones ó ecuaciones que ligan á los datos y á las incógnitas, y se llama *poner el problema en ecuacion*; la segunda consiste en resolver estas ecuaciones, ó en despejar las incógnitas (a).

102. Para poner en ecuacion estos problemas, se hacen con las incógnitas las mismas operaciones que se harian con sus valores si fuesen conocidos, para comprobar el problema.

103. Se llama problema de *primer grado* el problema cuyas ecuaciones son de primer grado; problema de *segundo grado* el problema cuyas ecuaciones son de segundo grado; etc.

Problema *determinado* es el problema cuyas incógnitas no tienen mas que un solo valor, y problema *indeterminado* es el problema cuyas incógnitas tienen dos ó mas valores.

Un problema indeterminado se hace determinado, añadiendo á las condiciones del problema las condiciones suficientes para que cada incógnita no tenga mas que un solo valor.

(a) La primera parte de la resolucion de un problema corresponde á la ciencia ú objeto á que se refiere el problema; es decir, si un problema es de geometría, dicha primera parte corresponde á la geometría; si el problema es de física, dicha primera parte corresponde á la física. Pero en las matemáticas existen ciertos problemas en los que las relaciones entre los datos y las incógnitas son fáciles de hallar: de algunos de estos problemas nos vamos á ocupar, como ejemplos á que se puede aplicar el álgebra.

CAPÍTULO II.

Problemas particulares de primer grado con una incógnita,

Problema 1.° *Diofanto, autor del libro mas antiguo del álgebra, pasó la sesta parte de su vida en la niñez, la duodécima parte en la adolescencia, y entonces se casó: despues de haber estado casado 5 años mas de la séptima parte de su vida, tuvo un hijo, que vivió la mitad que Diofanto, y murió cuatro años antes que este: ¿de qué edad murió Diofanto?*

Sea la x la edad de Diofanto al morir: para poner el problema en ecuacion, haremos con la x las mismas operaciones que haríamos con la edad de Diofanto si fuese conocida, para comprobar el problema. Segun esto $\frac{x}{6}$ es el tiempo que pasó Diofanto en su niñez, $\frac{x}{12}$ en su adolescencia; luego $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}$ era su edad cuando se casó. Casado, y sin tener hijos, vivió $\frac{x}{7}+5$; luego su edad, cuando nació su hijo, era $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5$. El hijo vivió $\frac{x}{2}$; luego la edad de Diofanto, cuando murió su hijo, era

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2};$$

y como Diofanto sobrevivió á su hijo 4 años, su edad al fallecer era $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$. Luego la ecuacion de este problema es

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x;$$

de la cual resulta $x=84$ años, edad de Diofanto al tiempo de su fallecimiento.

Problema 2.° *Queriendo uno distribuir los cuartos que tenia entre varios pobres, vió que le faltaban 10 cuartos para dar á cada pobre 25 cuartos; y que, dando á cada pobre 20 cuartos, le sobraban 30 cuartos: ¿cuántos eran los pobres?*

Sea x el número de pobres: los cuartos que les queria dar eran $25x$; mas como le faltaban 10 para hacer esta distribucion, los cuartos que tenia eran $25x - 10$. En la segunda distribucion los cuartos que les daba eran $20x$; y como le sobraban 30, el dinero que tenia era $20x + 30$. Por consiguiente la ecuacion será

$$25x - 10 = 20x + 30;$$

de la cual resulta $x = 8$ pobres.

Problema 3.° *Hallar dos números cuya suma es 54, y cuya diferencia es 20.*

Sea x el número mayor, el menor será $x - 20$; luego la ecuacion será $$x + x - 20 = 54,$$
de donde resulta $x = 37$, número mayor; y por tanto el menor será $37 - 20 = 17$.

Representemos ahora por x el número menor, el mayor estará entonces representado por $x + 20$; luego la ecuacion será $$x + x + 20 = 54,$$
y de aquí resulta $x = 17$, número menor, y el mayor $17 + 20 = 37$.

Problema 4.° *Se pusieron dos á jugar con otros, y ambos perdieron, el uno 12 rs. y el otro 57 rs.: el dinero con que este segundo se levantó del juego era la cuarta parte del que al primero le habia quedado, siendo asi que los dos se pusieron á jugar con igual cantidad de dinero. ¿Cuál era esta cantidad?*

Sea x el número de reales con que cada uno entró en el juego: puesto que el primero perdió 12 rs., se quedó con $x - 12$, y puesto que el segundo perdió 57 rs., se quedó con $x - 57$; y como, segun el problema, la cantidad que quedó al segundo era la cuarta parte de la que quedó al primero, la ecuacion será

$$x - 57 = \frac{x - 12}{4},$$

de donde resulta $x = 72$ reales.

Problema 5.° *Preguntándole á uno qué edad tenia un hijo suyo, respondió: si del doble de su edad se resta el triplo de la que tenia 6 años há, resultará su edad actual. ¿Cuántos años tenia el hijo?*

Sea x la edad del hijo, el doble de esta edad será $2x$. Hace seis años tenia la edad $x - 6$, cuyo triplo es $3(x - 6)$:

luego la ecuacion será

$$2x - 3(x - 6) = x\ ;$$

de donde resulta $x = 9$ años.

Problema 6.° *Un mercader tiene dos clases de té, la una de á 42 rs. la libra y la otra de á 54 rs. la libra, y quiere saber cuántas libras deberá tomar de cada clase para componer 100 libras, cuyo valor total sea 5040 rs.*

Sean x las libras que debe tomar de á 42 rs., $100 - x$ serán las que debe tomar de á 54 rs., $42x$ será el valor de las primeras libras $54(100 - x)$ será el valor de las segundas: luego la ecuacion será

$$42x + 54(100 - x) = 5040,$$

de donde resulta $x = 30$ libras de á 42 rs., y por consiguiente 70 serán las libras de á 54 rs.

Tambien en este problema se pudiera haber representado por x el número de libras de á 54 rs., y se resolveria el problema con igual facilidad.

Nota. Este problema es una regla de aligacion en que se conocen los precios de las dos especies y el precio medio; que es 50,4 reales; y por lo tanto se puede resolver como en (*Aritm. núm.* 214).

Problema 7.° *Convienen un pescador y su hijo en que por cada lance que este saque pesca, le abonará el padre 5 cuartos, y por cada lance en que no la saque, le descontará 3 cuartos: despues de 12 lances ajustaron cuentas, y tuvo el padre que pagar al hijo 28 cuartos. ¿En cuántos lances de los 12 sacó el hijo pesca y en cuántos no?*

Sea x el número de lances en que sacó pesca, $12 - x$ será el número de lances en que no la sacó: los cuartos que tenia que abonar el padre al hijo serán $5x$, y los que tenia que rebajarle ó descontarle $3(12 - x)$; y puesto que el padre quedó debiendo al hijo 28 cuartos, la ecuacion será

$$5x - 3(12 - x) = 28,$$

de donde resulta $x = 8$, número de lances en que sacó pesca; y por consiguiente 4 fueron los lances en que no la sacó.

Si hubiéramos representado por x el número de lances en que no sacó pesca, se hubiese resuelto el problema con igual facilidad.

Problema 8.° *Se ha llenado de agua en 12 minutos una va-*

sija de 39 azumbres de cabida, habiéndola espuesto primeramente á un caño que arrojaba 3 azumbres de agua en cada minuto, y despues á otro que arrojaba 4 azumbres en cada minuto. ¿Cuántos minutos estuvo espuesta á cada uno de los caños?

Sea x el número de minutos que estuvo espuesta la vasija al primer caño, $12-x$ será el número de minutos que estuvo espuesta al segundo. Como el primer caño arrojaba 3 azumbres de agua por minuto, será $3x$ el número de azumbres que arrojó en la vasija, y como el segundo arrojaba 4 azumbres por minuto, será $4(12-x)$ el número de azumbres que arrojó en la vasija. Como la capacidad de la vasija era de 39 azumbres, y entre los dos caños la llenaron completamente, tendremos

$$3x+4(12-x)=39,$$

de donde resulta $x=9$, número de minutos que estuvo espuesta la vasija al primer caño, y por tanto 3 será el número de minutos que estuvo espuesta al segundo.

Tambien se pudiera haber representado por x el número de minutos que estuvo espuesta la vasija al segundo caño, y se resolveria el problema del mismo modo.

Problema 9.° *Siendo en un relój las 12 en punto, y estando por consiguiente el minutero sobre el horario, ¿qué hora será cuando el minutero vuelva á colocarse sobre el horario?*

A la una el minutero señalará las 12, y el horario la 1. Sea x el camino que anda el horario desde la 1 hasta que le alcance el minutero (tomamos por unidad de camino $\frac{1}{12}$ de la circunferencia del relój), el minutero andará $1+x$; y como en tiempos iguales el minutero camina 12 veces mas que el horario, será $1+x=12x$,

de donde resulta $x=\frac{1}{11}$; es decir, que el horario andará $\frac{1}{11}$ de unidad de camino, y pasará por tanto $\frac{1}{11}$ de hora hasta que le alcance el minutero: luego el minutero alcanza al horario á la $1\frac{1}{11}$ de hora, ó á la 1, 5 minutos y $\frac{5}{11}$ de minuto.

Si representamos por x el camino que anda el minutero, $x-1$ será el camino andado por el horario; luego

$$x=12(x-1),$$

de donde resulta $x=1\frac{1}{11}$; es decir, que el minutero tiene que andar una unidad de distancia y además $\frac{1}{11}$ de unidad. Para hallar el tiempo empleado en andar esta distancia, la multiplicaremos por $5'$, puesto que el minutero tarda $5'$ en andar una unidad de distancia, y resultará que despues de la una tardará el minutero en alcanzar al horario $5\frac{5}{11}$ minutos.

Problema 10. *Un comerciante separa al principio de cada año del capital que tiene 3000 duros para los gastos de su casa; y por haber logrado ganar en cada año la tercera parte del resto con que ha negociado, ha duplicado al cabo de tres años el capital que al principio tenia. ¿Cuál era este capital primitivo?*

Sea x el capital del comerciante: deducidos los 3000 duros para el gasto de su casa, su capital queda reducido á $x-3000$; y como en virtud de su comercio gana la tercera parte de lo que le queda, su capital al fin del primer año será

$$x-3000+\frac{x-3000}{3}=\frac{3x-9000+x-3000}{3}=\frac{4x-12000}{3}(a).$$

En el segundo año, deduciendo 3000 duros para el gasto de su casa, le quedan

$$\frac{4x-12000}{3}-3000=\frac{4x-12000-9000}{3}=\frac{4x-21000}{3}.$$

Como por su comercio gana la tercera parte de lo que le queda, su capital al fin del segundo año será

$$\frac{4x-21000}{3}+\frac{4x-21000}{9}=\frac{12x-63000+4x-21000}{9}=$$
$$\frac{16x-84000}{9}.$$

(*a*) Puede obtenerse este resultado con mas brevedad: pues, añadir á una cantidad su tercio, equivale á multiplicarla por $\frac{4}{3}$. La misma observacion debe hacerse respecto de los resultados siguientes.

En el tercer año, separados los 3000 duros para el gasto de su casa, le quedan

$$\frac{16x-84000}{9}-3000=\frac{16x-84000-27000}{9}=\frac{16x-111000}{9}.$$

Como en virtud de su comercio gana la tercera parte del resto, su capital al fin del tercer año será

$$\frac{16x-111000}{9}+\frac{16x-111000}{27}.$$

Segun el problema, lo que le queda al fin del tercer año es doble de su capital primitivo; luego la ecuacion de este problema es

$$\frac{16x-111000}{9}+\frac{16x-111000}{27}=2x,$$

de donde resulta $x=44400$.

Problema 11. *Dispuso uno en su testamento que del capital que dejaba se diesen al mayor de sus hijos* 1000 *duros y la décima parte del resto; que al hijo segundo se diesen* 2000 *duros y la décima parte del resto; al tercero* 3000 *duros y la décima parte del resto; y asi sucesivamente. Hecho el reparto, se vió que todas las partes eran iguales. ¿Cuánta era toda la herencia, cuántos eran los hijos, y cuánto correspondió á cada uno?*

Sea x el valor de la herencia: dando al primer hijo 1000 duros, queda de la herencia $x-1000$. Además de los 1000 duros hay que dar al hijo mayor la décima parte del resto; por consiguiente lo que toca al primer hijo es

$$1000+\frac{x-1000}{10}=\frac{10000+x-1000}{10}=\frac{9000+x}{10}.$$

Al segundo hijo se le dan 2000 duros y la décima parte del resto. Hallemos este resto. Habiendo entregado al primer hijo $\frac{9000+x}{10}$, y al segundo hijo 2000, el resto es evidentemente

$$x-\frac{9000+x}{10}-2000=\frac{10x-9000-x-20000}{10}=$$
$$\frac{9x-29000}{10}.$$

Por consiguiente la cantidad que toca al segundo hijo es

$$2000+\frac{9x-29000}{100}.$$

Como todos los hijos recibieron partes iguales, la ecuacion es $\frac{9000+x}{10}=2000+\frac{9x-29000}{100}$,

de donde resulta $x=81000$ duros.

Habiendo hallado el valor de la herencia, la parte correspondiente á cada hijo se hallará, sustituyendo en vez de x su valor en la espresion que representa la parte del hijo mayor; y resulta que la parte correspondiente á cada hijo es 9000 duros. Dividiendo el valor de la herencia total por la parte correspondiente á cada hijo, se hallará que el número de hijos es 9.

Problema 12. *Una liebre perseguida por un galgo se halla á 60 saltos suyos distante del galgo: la liebre da 3 saltos mientras el galgo da 2, pero 3 saltos del galgo equivalen á 7 de la liebre. ¿Cuántos saltos dará la liebre hasta que la alcance el galgo, y cuántos el galgo para alcanzar á la liebre?*

Sea x el número de saltos que dará la liebre: el número de saltos que dará el galgo se hallará por la proporcion

$3 : 2 :: x : \frac{2x}{3}$ número de saltos que dará el galgo.

Hallemos ahora á cuántos saltos de la liebre equivalen estos saltos del galgo. Para esto, tenemos la proporcion

$3 : 7 :: \frac{2x}{3} : \frac{14x}{9}$; luego el camino andado por el galgo, espresado en saltos de la liebre, es $\frac{14x}{9}$.

Como el galgo, andando este camino, alcanza á la liebre, la ecuacion del problema será

$$\frac{14x}{9}=60+x,$$

de la cual resulta $x=108$, número de saltos que ha dado la liebre hasta el momento en que la ha alcanzado el galgo; y por consiguiente el número de saltos que ha dado el galgo es 72.

Este problema se puede resolver tambien representando por x el número de saltos del galgo.

Problema 13. *Teniendo 16 libras de pólvora de á 12 rea-*

les, ¿cuántas de á 8 reales se deberán juntar con ellas para que cada libra de la mezcla valga $10\frac{1}{2}$ *reales?*

Sean x las libras que se deben tomar de á 8 reales: estas x libras valen en la mezcla $10\frac{1}{2}\times x$ reales; luego dan la ganancia $(10\frac{1}{2}-8)x=\frac{5x}{2}$ reales. Las 16 libras de á 12 reales valen en la mezcla $16\times 10\frac{1}{2}$, y por lo tanto producen la pérdida de $16\times 1\frac{1}{2}$ reales$=24$ reales. Como se quiere que las libras de pólvora valgan lo mismo antes y despues de estar mezcladas, la ganancia que dan las unas debe ser igual á la pérdida que resulta de las otras: luego $\frac{5x}{2}=24$, de donde resulta $x=9\frac{3}{5}$ libras (*Aritm. núm.* 214, *ejemplo* 1.°).

Problema 14. *Un caño llena una vasija en 30 horas, otro caño la llena en 20 horas, y un tercer caño llena dicha vasija en 10 horas. Se quiere saber en cuántas horas llenarán la misma vasija los tres caños juntos.*

Sea x el número de horas qne tardarán los tres caños en llenar la vasija. Para poner el problema en ecuacion, deberemos someter á la x á las mismas operaciones que haríamos, si fuese conocida, para comprobarla (*Núm.* 102). Deberemos, pues, hallar la parte de la capacidad de la vasija que llenarán los tres caños en el tiempo x, é igualar su suma á 1, capacidad de la vasija.

Estas partes se hallan fácilmente, por el método de reduccion á la unidad (*Arit. núm.* 203), del modo siguiente: si el primer caño llena en 30 horas la vasija, en 1 hora llenará $\frac{1}{30}$ de la capacidad de la vasija, y en x horas llenará $\frac{x}{30}$ de la vasija. Del mismo modo se halla que las partes que en las x horas llenan los otros dos caños son $\frac{x}{30}$ y $\frac{x}{10}$; luego, como estas tres partes deben componer toda la capacidad de la vasija, será $\frac{x}{10}+\frac{x}{20}+\frac{x}{30}=1$;

de donde resulta $x=5\frac{5}{11}$ horas.

Problema 15. *¿Cuánto vale actualmente una letra de* 20000 *reales que vence dentro de* 7 *meses, siendo* 6 *el tanto por* 100 *de interés, segun convenio?*

Sea x el valor actual de la letra, ó el dinero que por ella entrega el tomador: la cantidad x á 6 por 100 al año produce en un año $\frac{6x}{100}$, y admitiendo que el interés sea proporcional al tiempo, el interés de x en 1 mes será $\frac{6x}{100.12}$, y en 7 meses será $\frac{6.7x}{100.12}=\frac{7x}{200}$: luego la ecuacion del problema será $x+\frac{7x}{200}=20000$, de donde $x=19323\frac{139}{207}$ reales (*Aritm. páginas*, 183 *y* 184).

CAPÍTULO III.

Problemas particulares de primer grado con dos ó mas incógnitas.

---

104. Algunos de los problemas que acabamos de resolver, contienen dos incógnitas, y sin embargo los hemos resuelto representando una sola por una letra. Esto se puede hacer, siempre que la relacion entre las dos incógnitas sea bastante sencilla para que, estando representada una de las dos por una letra, pueda representarse la otra por medio de la misma letra combinada con alguna cantidad conocida.

Resolvamos nuevamente dichos problemas, representando cada incógnita por una letra.

Problema 3.° Sea x el número mayor, y el número menor: las ecuaciones serán

$$x+y=54,$$
$$x-y=20,$$

de las cuales resultan $x=37$, $y=17$.

Problema 6.° Sea x el número de libras de á 42 reales, y el número de libras de á 54 reales: las ecuaciones serán

$$x+y=100,$$
$$42x+54y=5040.$$

Resolviéndolas, se hallan $x=30$, $y=70$.

Problema 7.° Sea x el número de lances en que sacó pesca, y el número de lances en que no la sacó: tendremos

$$x+y=12,$$
$$5x+3y=28;$$

y por consiguiente $x=8$, $y=4$.

Problema 8.° Sea x el número de minutos que estuvo espuesta al primer caño, y el número de minutos que estuvo espuesta al segundo caño: las ecuaciones serán

$$x+y=12,$$
$$3x+4y=39,$$

de las cuales resultan $x=9$, $y=3$.

Problema 12. Sea x el número de saltos que da la liebre, y el número de saltos que da el galgo: tendremos

$$x:y::3:2, \text{ ó } 2x=3y.$$

Tenemos tambien $3:7::y:\frac{7y}{3}$; luego la segunda ecuacion será

$$\frac{7y}{3}=60+x.$$

De estas dos ecuaciones resultan $x=108$, $y=72$.

Problema 16. *Una persona tiene monedas en las dos manos: si pasa 7 monedas de la derecha á la izquierda, habrá igual número de monedas en ambas manos; pero si, al contrario, pasa 7 monedas de la izquierda á la derecha, en esta quedará triplo número de monedas que en la izquierda. Se quiere saber cuántas monedas tiene en cada mano.*

Sea x el número de monedas de la mano derecha, y el número de monedas de la izquierda: las ecuaciones serán

$$x-7=y+7,$$
$$x+7=3(y-7).$$

Resolviendo estas dos ecuaciones, hallaremos $x=35$, $y=21$.

*Problema 17. *Con agua, cuya temperatura es de 32°, se quiere mezclar agua á 0°: ¿cuántas azumbres de las dos se deben mezclar para que resulten 100 azumbres á 19°?*

Sean x é y las azumbres que se deben mezclar de las dos aguas: tendremos $x+y=100$.

Ahora, las x azumbres á 32° pierden en la mezcla $13x$ grados, y las y azumbres á 0° ganan en la mezcla $19y$ grados; luego $13x=19y$.

De estas dos ecuaciones resultan $x=59\frac{3}{8}$ azumbres, $y=40\frac{5}{8}$ azumbres (*Aritm. núm.* 214, *ejemplo* 2.°).

Problema 18. *¿Cuántas fanegas de trigo de á 50 reales y de á 40 reales se han de mezclar, para tener trigo de á 47 reales, escediendo el primer número al segundo en 30 fanegas?*

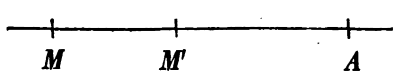
Sean x é y las fanegas de á 50 reales y de á 40 reales: tendremos $x-y=30$.

Ahora, las x fanegas de á 50 reales producen una pérdida de $3x$ reales, y las y fanegas de á 40 reales dan una ganancia de $7y$ reales; luego $3x=7y$.

De estas dos ecuaciones resultan

$x=52\frac{1}{2}$, $y=22\frac{1}{2}$ (*Aritm. núm.* 214, *ejemplo* 3.°).

Problema 19. *Dos móviles* M *y* M′ *salen al mismo tiempo de dos puntos* M *y* M′, *distantes* 49 *pies, en el sentido* MM′A: *el primero camina* 7 $\frac{1}{2}$ *pies por minuto, y el segundo* 5 $\frac{2}{3}$ *pies por minuto: ¿á qué distancia de los puntos* M *y* M′ *alcanzará el primer móvil al segundo?*



Sea x la distancia del punto de alcance A al punto M, é y la distancia del punto A al punto M': tendremos

$$x-y=49.$$

El tiempo empleado por el móvil M en llegar al punto A, será $\frac{x}{7\frac{1}{2}}=\frac{2x}{15}$ minutos, y el tiempo que el móvil M' tarda en llegar al punto A, será $\frac{y}{5\frac{2}{3}}=\frac{3y}{17}$ minutos; y pues el tiempo que ambos están en camino es el mismo, será $\frac{2x}{15}=\frac{3y}{17}$.

De estas dos ecuaciones resultan

$$x=200\frac{5}{11} \text{ pies}, \quad y=151\frac{5}{11} \text{ pies}.$$

Problema 20. *Se obligó uno á transportar una partida de loza, en la cual habia piezas de tres distintos tamaños, con la condicion de que por cada pieza que se quebrase, pagaria tantos reales como hubiese cobrado por el porte si la hubiese entregado entera. Se le entregaron primeramente 2 piezas pequeñas, 4 medianas y 9 grandes; quebró todas las medianas, y percibió 56 reales. Despues se le entregaron 7 piezas pequeñas, 3 medianas y 5 grandes; quebró todas las grandes y percibió solo 6 reales. Por último, se le entregaron 9 piezas pequeñas, 10 medianas y 11 grandes; quebró todas las grandes, y percibió 8 reales. ¿Cuánto llevaba por el porte de cada pieza?*

Sea x el porte de cada pieza pequeña, y el de cada pieza mediana, z el de cada pieza grande: las ecuaciones serán

$$\begin{aligned} 2x-4y+9z&=56, \\ 7x+3y-5z&=7, \\ 9x+10y-11z&=8. \end{aligned}$$

Resolviéndolas, se hallan $x=4$, $y=6$, $z=8$.

Problema 21. *Tres hermanos se han asociado para comprar una finca apreciada en 200000 reales: al primero le faltaba, para poder comprarla por sí solo, la mitad del capital del segundo; á éste le faltaba la tercera parte del capital del primero, y al tercero la cuarta parte del capital del primero. ¿Cuál era el capital de cada uno?*

Sea x el capital del primero, y el del segundo, z el del tercero. Las ecuaciones son

$$x+\frac{y}{2}=200000, \quad y+\frac{x}{3}=200000, \quad z+\frac{x}{4}=200000.$$

Resolviendo estas ecuaciones, resultan

$$x=120000, \; y=160000, \; z=170000.$$

Problema 22. *Se pusieron tres á jugar, y en la primera partida el primero y el segundo ganaron al tercero tantos reales como cada uno de ellos habia sacado para jugar; en la segunda partida ganaron el primero y el tercero al segundo tantos reales como cada uno de aquellos tenia despues de la primera partida;*

en la tercera ganaron el segundo y el tercero al primero tantos reales como cada uno de los dos tenia despues de la segunda partida; y concluida la tercera, tenia cada uno de los tres 120 reales. ¿Con cuántos reales se puso á jugar cada uno?

Sea x el número de reales con que el primero principió á jugar, y el número de reales con que principió el segundo, z el número de reales con que principió el tercero.

Despues de la primera partida el primero se queda con $2x$, el segundo con $2y$, y el tercero con $z-x-y$.

Despues de la segunda partida, se queda el primero con $4x$, el tercero con $2z-2x-2y$, y el segundo con $2y-2x-z+x+y=3y-x-z$.

Despues de la tercera partida se queda el segundo con $6y-2x-2z$, el tercero con $4z-4x-4y$, y el primero con $4x-3y+x+z-2z+2x+2y=7x-y-z$.

Ahora, segun el problema, todos tienen 120 reales; luego las ecuaciones serán

$$7x-y-z=120,$$
$$6y-2x-2z=120,$$
$$4z-4x-4y=120.$$

De estas ecuaciones resultan $x=60$, $y=105$, $z=195$.

Problema 23. *Hallar un número compuesto de 4 cifras, cuya suma es 14: la cifra de las centenas es doble de la de las unidades, la cifra de los millares sumada con la de las unidades es igual á la suma de las cifras de las decenas y centenas, y el duplo de la cifra de las centenas es igual al duplo de la de las decenas sumado con la de las unidades.*

$$x+y+z+u=14,$$
$$z=2x,$$
$$u+x=y+z,$$
$$2z=2y+x.$$

Resolviéndolas, resultan $x=2$, $y=3$, $z=4$, $u=5$; y por consiguiente el número pedido es 5432.

CAPÍTULO IV.

Problemas generales.

---

105. Si del enunciado de un problema particular queremos pasar al enunciado del problema general, que comprenda á dicho problema particular y á otros infinitos de la misma especie (lo que se llama *generalizar* un problema), no habrá mas

que sustituir en lugar de los datos particulares datos generales ó indeterminados.

Tratemos de resolver los problemas 3, 9, 16, 14, 7 y 19 propuestos en términos generales.

Problema 1.° *Dadas la suma y la diferencia de dos cantidades, hallar el valor de dichas cantidades.*

Sea s la suma, d la diferencia, x la cantidad mayor, y la menor: las ecuaciones son

$$x+y=s,$$
$$x-y=d.$$

Resolviéndolas, resultan $x=\frac{s+d}{2}$, ó $x=\frac{s}{2}+\frac{d}{2}$; $y=\frac{s-d}{2}$, ó $y=\frac{s}{2}-\frac{d}{2}$.

106. Ya sabemos (*Núm.* 6) que los valores de las incógnitas de los problemas generales se llaman *fórmulas*. Las fórmulas actuales traducidas al lenguaje vulgar dan la regla siguiente: *la mayor de dos cantidades es igual á la mitad de la suma de las dos mas la mitad de la diferencia de las mismas, y la menor es igual á la mitad de la suma de las dos, menos la mitad de la diferencia de las mismas* (a).

Problema 2.° *En todo relój, cuando el horario señala una hora cualquiera, el minutero señala las doce. ¿Cuánto tiempo tardará el minutero en alcanzar al horario despues de dicha hora?*

Sea a la hora que señala el horario, x el camino que anda el horario hasta que le alcance el minutero (tomamos por unidad de camino $\frac{1}{12}$ de la circunferencia del relój), el minutero andará, para alcanzarle, el camino $a+x$; y como en tiempos iguales el camino andado por el minutero es 12 veces mayor que el andado por el horario, tendremos la ecuacion

$$a+x=12x,$$

de donde $x=\frac{a}{11}$, camino andado por el horario; y pues para

---

(a) Es muy fácil demostrar directamente este teorema: pues si los números son a y b, tenemos evidentemente $a=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$, $b=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}$.

andar una unidad de camino tarda el horario una hora, para andar $\frac{a}{11}$ de unidad de camino tardará $\frac{a}{11}$ de hora; luego el minutero alcanza al horario á la hora a y $\frac{a}{11}$ de hora. Segun esto, le alcanza á la $1\frac{1}{11}$, á las $2\frac{2}{11}$, á las $3\frac{3}{11}$.... á las $11\frac{11}{11}$ ó á las 12.

Problema 3.° *Una persona tiene monedas en ambas manos; si pasa un cierto número de monedas de la derecha á la izquierda, queda igual número de monedas en ambas manos; mas si, en vez de pasar de la derecha á la izquierda, las pasa de la izquierda á la derecha, habrá en esta un cierto número de veces mas monedas que en la izquierda. ¿Cuántas monedas tiene en cada mano?*

Sea x el número de monedas de la derecha, y el número de monedas de la izquierda, a el número de monedas que pasa de una á otra mano, m las veces que en la segunda traslacion es mayor el número de monedas de la derecha que el de la izquierda.

Las ecuacioues serán

$$x-a=y+a,$$
$$x+a=m(y-a).$$

Resolviéndolas, resultan

$$x=\frac{(3m+1)a}{m-1},\ y=\frac{(3+m)a}{m-1}.$$

Resolvamos por medio de estas fórmulas el problema particular 16.

Tendremos $a=7$, $m=3$; y por consiguiente $x=35$, $y=21$.

Problema 4.° *Dados los tiempos que tarda cada uno de tres caños en llenar una vasija, hallar el tiempo que tardarán en llenarla los tres caños juntos.*

Sea t el tiempo que tarda el primer caño en llenar la vasija, t' el tiempo que tarda el segundo, t'' el tiempo que tarda el tercero, x el tiempo que tardarán los tres juntos; y representemos por 1 la capacidad de la vasija.

Para poner este problema en ecuacion, hallaremos, segun la regla (*Núm.* 102), la parte de capacidad de la vasija que llena cada uno de los caños en el tiempo x. Para esto diremos: si en t horas llena el primer caño la capacidad 1 de la vasija, en 1 hora llenará la parte $\frac{1}{t}$, en x horas llenará la parte $\frac{x}{t}$. Del mismo modo se halla que la parte de vasija que llena el segundo en las x horas, es $\frac{x}{t'}$, y la que llena el tercero en las mismas x horas, es $\frac{x}{t''}$. Como las tres partes deben componer toda la capacipad de la vasija, tendremos

$$\frac{x}{t}+\frac{x}{t'}+\frac{x}{t''}=1 \quad . \quad . \qquad (A),$$

de donde resulta $$x=\frac{tt't''}{tt'+tt''+t't''} \qquad (B).$$

107. Nota. Las ecuaciones de todo problema general son relaciones constantes entre las cantidades indeterminadas que estas ecuaciones contienen; y por tanto dichas ecuaciones pueden servir para resolver todos aquellos nuevos problemas en que se consideren como incógnitas cualesquiera de dichas cantidades en número igual al de ecuaciones. Asi, la ecuacion (A), ó la fórmula (B), sirve para resolver todo problema en que se considere como incógnita cualquiera de las cantidados t, t', t'', x, y como conocidas las demás.

Supongamos, por ejemplo, que se quiera resolver el siguiente problema:

Conociendo el tiempo que tardan tres caños juntos en llenar una vasija, y los tiempos que dos de dichos caños tardan cada uno por sí solo en llenar dicha vasija, hallar el tiempo que tardará el tercer caño en llenar la misma vasija.

Sea t'' el tiempo que tarda el tercer caño en llenar la vasija, t'' será la incógnita del problema: despejándola, sea en la ecuacion (A), sea en la fórmula (B), resulta

$$t''=\frac{tt'x}{tt'-tx-t'x}.$$

Problema 5.° *Un pescador y su hijo convienen en que por cada lance que éste saque pesca, le abonará su padre un cierto número de cuartos, con la condicion de descontarle otro cierto número de cuartos por cada lance en que no saque pesca: al cabo* *de un cierto número de lances, quedó el padre debiendo al hijo una cierta cantidad. Se pregunta en cuántos lances sacó el hijo pesca, y en cuántos no.*

Sea l el número total de lances, g los cuartos que abonaba el padre al hijo por cada lance feliz, p los cuartos que le descontaba por cada lance desgraciado, d los cuartos que quedó debiendo por último el padre al hijo, x los lances en que este sacó pesca, $l-x$ serán lances en que no la sacó.

La cantidad que tiene que abonar el padre al hijo será gx, y la que tiene que descontarle será $p(l-x)$. Como el hijo salió al fin ganando d, será $gx-p(l-x)=d$, de donde resulta

$$x=\frac{lp+d}{g+p}.$$

Resolvamos este mismo problema en la suposicion de que el hijo quedase debiendo al padre d cuartos.

En este caso, haciendo el mismo razonamiento anterior, se tendrá la ecuacion

$$p(l-x)-gx=d,$$

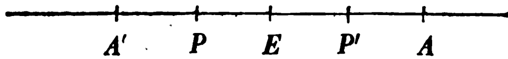
de donde resulta, $$x=\frac{lp-d}{g+p}.$$

Obsérvese que este resultado pudiera haberse deducido de la fórmula del caso anterior, mudando el signo de la d, que en aquel caso era una ganancia para el hijo, y en este otro caso es una pérdida. La fórmula del primer caso puede, pues, servir para los dos problemas, suponiendo para el segundo que d es una cantidad negativa.

Por ejemplo, supongamos que, siendo 12 el total de lances, 5 los cuartos que abonaba el padre al hijo por cada lance feliz, 3 los cuartos que le descontaba por cada lance desgraciado, quedase el hijo debiendo al padre 12 cuartos. Si queremos valernos de la primera fórmula para resolver este problema particular, tendremos $l=12$, $g=5$, $p=3$, $d=-12$. Por consiguiente

$$x=\frac{12.3-12}{5+3}=\frac{36-12}{8}=3.$$

Lo mismo se hubiera hallado por la fórmula del segundo caso, haciendo $d=12$.



Problema 6.° *Dos móviles salen al mismo tiempo de dos puntos P y P', y recorren con movimiento uniforme la línea $A'A$ que pasa por estos dos puntos. Se conocen la distancia PP' de los dos puntos y las velocidades de los dos móviles, y se quiere saber la distancia del punto en que ambos se juntan al punto P.*

Propuesta la cuestion en estos términos, pueden ocurrir tres casos: 1.° que los móviles vayan en el sentido $PP'A$ á alcanzar el primero al segundo; 2.° que los móviles vayan en sentidos opuestos á encontrarse; 3.° que los móviles vayan en el sentido $P'PA'$ á alcanzar el segundo al primero.

1.er *caso.* Sea A el punto de alcance, la distancia $PP'=d$ pies, v y v' las velocidades de los dos móviles primero y segundo, es decir, los pies que cada móvil anda por minuto, y x la distancia PA, $x-d$ será la distancia $P'A$.

El tiempo empleado por el primer móvil en andar la distancia PA será $\frac{x}{v}$, y el tiempo empleado por el segundo móvil en andar la distancia $P'A$ será $\frac{x-d}{v'}$; y como estos tiempos son iguales, tendremos
$$\frac{x}{v}=\frac{x-d}{v'},$$
de donde resulta
$$x=\frac{vd}{v-v'}.$$

2.° *caso.* Sea E el punto de encuentro: siendo x la distancia PE, $d-x$ será la distancia $P'E$; luego $\frac{x}{v}=\frac{d-x}{v'}$,
de donde resulta
$$x=\frac{vd}{v+v'}.$$

3.er *caso.* Sea A' el punto de alcance: siendo x la distancia PA', la distancia $P'A'$ será $x+d$; luego $\frac{x}{v}=\frac{x+d}{v'}$,
de donde resulta
$$x=\frac{vd}{v'-v}.$$

Obsérvese que la fórmula del 2.° caso puede deducirse de la del 1.°, mudando el signo á la velocidad v' del segundo móvil, cantidad que en el 1.er caso representa una distacia andada en el sentido $P'A$, y en el 2.° una distancia andada en el sentido contrario $P'A'$.

Obsérvese tambien que la fórmula del 3.er caso puede deducirse de la del 1.°, mudando los signos á las velocidades v, v' y á la distancia x, cantidades que en el 1.er caso representan distancias andadas en el sentido $PP'A$, y en el 3.° representan distancias andadas en el sentido contrario $P'PA'$.

Considerando, pues, como negativas en la fórmula del primer caso á las cantidades que en los otros dos tienen acepciones enteramente opuestas á las que tenian en el primero, la fórmula del primero podrá servir para los tres.

Ejemplos. 1.° Supongamos que los móviles salen de los puntos P y P', cuya distancia $PP'=50$ pies, á encontrarse, con las velocidades 5 pies y 3 pies por minuto, y que queramos hallar por medio de la fórmula del primer caso la distancia desde el punto de encuentro E al punto P.

Tendremos $d=50$. $v=5$. $v'=-3$, y por consiguiente

$$x=\frac{250}{5--3}=\frac{250}{8}=31\frac{1}{4} \text{ pies.}$$

2.° Supongamos que los dos móviles salen de los mismos puntos P y P' con las velocidades del problema anterior trocadas, que se dirijan hácia el punto A', y que se quiera hallar la distancia del punto A' al punto P por medio de la fórmula del primer caso.

Tendremos $d=50$, $v=-3$, $v'=-5$; y por consiguiente

$$x=\frac{-150}{-3--5}=\frac{-150}{+2}=-75:$$

pero $x=-A'P$; luego $A'P=75$ pies: es decir, que el móvil que sale de P', alcanza al móvil que sale de P á 75 pies de distancia del punto P.

108. Generalizando lo que acabamos de ver en los dos problemas 5.° y 6.°, estableceremos el siguiente principio de la mayor importancia, debido á Descartes.

Las ecuaciones ó las fórmulas de todo problema general, en que entran cantidades que pueden tener dos acepciones opuestas (a), *convienen á todo nuevo problema en que algunas de dichas*

(*a*) Como las ganancias y las pérdidas, las distancias contadas en un sentido y las contadas en su opuesto, el tiempo anterior y posterior á una época, etc.

cantidades tienen acepciones opuestas á las que tenian en el problema propuesto; considerando como negativas á las cantidades que mudan de acepcion.

Este principio no se puede demostrar de una manera general, pero la esperiencia ha probado que siempre es cierto.

CAPÍTULO V.

Casos de imposibilidad en los problemas de primer grado. Valores negativos de las incógnitas.

109. Siempre que el valor de alguna de las incógnitas, deducidas de la ecuacion ó de las ecuaciones de un problema, sea infinito ó indeterminado, el problema será imposible ó indeterminado.

El problema será tambien imposible, cuando resulte negativo el valor de alguna incógnita, si las ecuaciones son la verdadera traduccion al lenguaje algébrico de las condiciones del problema.

Ejemplos. 1.° *Un padre tiene 42 años, su hijo tiene 12 años; ¿dentro de cuántos años será la edad del padre cuádrupla de la del hijo?*

Sea x este número de años: el padre, al cabo de ellos, tendrá la edad $42+x$, y el hijo $12+x$; y como entonces la edad del padre ha de ser cuádrupla de la del hijo, será

$$42+x=4(12+x).$$

De esta ecuacion resulta $x=-2$; luego el problema es imposible.

Obsérvese qne si se muda el signo de la x en la ecuacion propuesta, tendremos la nueva ecuacion

$$42-x=4(12-x),$$

y es evidente que el mismo resultado se obtendrá, poniendo en la primera ecuacion en vez de x el valor -2, que en la segunda ecuacion en vez de x el valor 2; y pues -2 satisface á la primera ecuacion, 2 satisfará á la segunda; luego el problema correspondiente á esta nueva ecuacion será posible.

Conservando las circunstancias del problema propuesto, el nuevo problema posible será el siguiente: *Un padre tiene 42 años, su hijo tiene 12 años; ¿cuántos años han pasado desde que la edad del padre fué cuádrupla de la del hijo?*

Sin necesidad de resolver la nueva ecuacion, sabemos que la incógnita tendrá el valor 2.

2.° *Un particular ha pagado 60 reales por 6 dias de trabajo de un obrero y 5 dias de trabajo de otro. En otra ocasion, ganando los obreros el mismo jornal, les ha pagado 184 reales por 17 dias de trabajo del primero y 13 del segundo. Se pregunta, cuál fué el jornal de estos obreros.*

Sea x el número de reales que ganaba el primer obrero por cada dia de trabajo, y el número de reales que ganaba el segundo. La ganancia del primero en los 6 dias de trabajo es $6x$ reales, y la del segundo en los 5 dias $5y$ reales; luego

$$6x+5y=60.$$

En la segunda ocasion la ganancia del primero en los 17 dias de trabajo era $17x$, y la del segundo en los 13 dias $13y$; luego $17x+13y=184$.

Resolviendo estas dos ecuaciones, resultan $x=20$, $y=-12$; luego el problema es imposible.

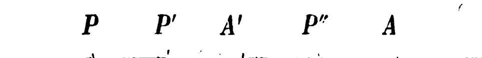
Si en las ecuaciones de este problema mudamos el signo de y, tendremos estas otras dos ecuaciones:

$$6x-5y=60,$$
$$17x-13y=184;$$

y es evidente que, pues las dos ecuaciones propuestas están satisfechas por los valores $x=20$, $y=-12$, las nuevas ecuaciones quedarán satisfechas por los valores $x=20$, $y=12$. Luego el problema correspondiente á estas últimas ecuaciones es posible, y su enunciado, conservando las circunstancias del problema propuesto, será: *Un particular ha empleado á dos obreros, al primero por 6 dias y al segundo por 5, y al pagarlos, el primero recibió 60 reales mas que el segundo. En otra ocasion ha empleado 17 dias al primero y 13 al segundo, y al pagarlos, el primero recibió 184 reales mas que el segundo. ¿Cuál era la ganancia diaria de estos obreros?*

Ya sabemos que $x=20$, $y=12$.

3.° *Dos móviles salen al mismo tiempo de dos puntos* P *y* P′, *cuya distancia es 20 pies, y van con movimiento uniforme hácia el punto* P″ *distante 100 pies de* P. *La velocidad del primero es 7 pies por minuto, y la del segundo 5 pies por minuto. Se pregunta, á qué distancia del punto* P″ *se reunirán los dos móviles.*



Supongamos que sea A el punto de reunion de los dos móviles, y sea $P''A=x$; será $PA=100+x$, y $P'A=80+x$. Los tiempos empleados por los dos móviles en llegar al punto A, serán $\frac{100+x}{7}$ y $\frac{80+x}{5}$; y como estos tiempos son iguales, será

$$\frac{100+x}{7}=\frac{80+x}{5}.$$

Resolviendo esta ecuacion, resulta $x=-30$.

Aunque el valor de la incógnita haya resultado negativo, no se ha de sacar en consecuencia que el problema es imposible; pues es evidente que, andando el primer móvil 2 pies mas por minuto que el segundo, ha de alcanzar á este. Obsérvese que nosotros hemos supuesto que el punto de reunion de los dos móviles estaba á la derecha del punto P''; y pues en esta suposicion ha resultado negativo el valor de la incógnita, el punto de reunion debe estar á la izquierda del punto P''. En efecto, si suponemos que A' sea el punto de reunion de los dos móviles, y llamamos x á la distancia $P''A'$, será $PA'=100-x$, $P'A'=80-x$; luego

$$\frac{100-x}{7}=\frac{80-x}{5}.$$

Esta ecuacion es la misma que la ecuacion anterior, mudando el signo de x: luego, como la ecuacion anterior queda satisfecha por el valor -30 de x, la nueva ecuacion quedará satisfecha por el valor 30 de x.

Luego, si en un problema posible resulta negativo el valor de la incógnita, esto consiste en que, para poner el problema en ecuacion, se ha hecho una suposicion falsa; pero el problema quedará resuelto, tomando el valor absoluto de la incógnita en sentido contrario del que se le habia supuesto al poner el problema en ecuacion.

110. Segun lo que hemos visto en el problema 6.° de los generales, y lo que acabamos de ver en los tres últimos problemas, sacaremos las conclusiones siguientes:

1.ª Puede suceder que el valor de la incógnita de un problema posible resulte negativo, cuando nos valemos, segun el principio de Descartes (*Núm.* 108), de una fórmula que no corresponde directamente al problema en cuestion; y entonces el valor absoluto de la incógnita tomado en sentido contrario de los positivos, resuelve el problema.

2.ª Si la ecuacion es la traduccion verdadera del problema al lenguaje algébrico, el valor negativo de la incógnita da á entender que el problema contiene condiciones incompatibles, ó lo que es igual, que el problema es imposible. En este caso es fácil, en general, modificar el problema y hacerle posible.

3.º Tambien puede provenir el valor negativo de la incógnita, de que al poner el problema en ecuacion, se haya hecho una falsa suposicion; entonces el valor absoluto de la incógnita, tomado en sentido contrario del que se le habia supuesto, resuelve el problema.

111. El problema será imposible, aun cuando los valores de las incógnitas sean positivos, si estos valores no satisfacen á ciertas condiciones del problema no espresadas en las ecuaciones, como de ser enteros, de estar comprendidos entre límites determinados, etc.

Ejemplo. *Queriendo uno distribuir el dinero que tenia entre varios pobres, vió que le faltaban 10 cuartos para dar á cada pobre 25 cuartos; y que, dando á cada pobre 23 cuartos, le sobraban 15 cuartos. Se pregunta, cuántos eran los pobres.*

Sea x el número de pobres; la ecuacion será

$$25x-10=23x+15,$$

de donde resulta $x=12\frac{1}{2}$ pobres, resultado absurdo.

En este problema la incógnita debia ser un número entero; y pues ha resultado para valor de dicha incógnita un número fraccionario, el problema es imposible.

LIBRO CUARTO.

POTENCIAS Y RAICES DE LAS CANTIDADES ALGEBRICAS.

CAPÍTULO I.

86. **Potencias y raices de los monomios.**

ARTÍCULO 1.°

Potencias de los monomios (a).

112. *La potencia de un producto es igual al producto de las potencias del mismo grado de sus factores.*

Sea el producto abc: digo que $(abc)^n = a^n b^n c^n$.

En efecto, $(abc)^n = abc \times abc \times abc \ldots,$

entrando abc n veces por factor. Mas (*Comp.*[to] *de la Aritm.* 20)

$abc \times abc \times abc \ldots = abcabcabc \ldots = aaa \ldots \times bbb \ldots \times ccc \ldots = a^n b^n c^n;$

luego

$$(abc)^n = a^n b^n c^n. \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

NOTA. Esta fórmula demostrada para el caso en que el esponente es entero y positivo, es tambien cierta cuando el esponente es entero y negativo.

En efecto, $(abc)^{-n} = \dfrac{1}{(abc)^n} = \dfrac{1}{a^n b^n c^n} = a^{-n} b^{-n} c^{-n}.$

113. *La potencia de un quebrado es igual á la potencia del numerador partida por la potencia del denominador.*

Sea el quebrado $\dfrac{a}{b}$: digo que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}.$

En efecto, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a}{b} \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} \ldots ,$

(a) La definicion de las potencias dada en el número 36 de la aritmética se estiende á toda clase de cantidades.

entrando $\frac{a}{b}$ n veces por factor. Mas (*Núm.* 61) $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\ldots=$

$\frac{aaa\ldots\ldots}{bbb\ldots\ldots}=\frac{a^n}{b^n}$; luego $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ (*B*).

Nota. Hemos demostrado la fórmula (*B*) para el caso en que el esponente es entero y positivo: demostremos que tambien es cierta cuando el esponente es entero y negativo.

$$\text{Tenemos } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{b^n}{a^n}=\frac{a^{-n}}{b^{-n}}.$$

114. *Para elevar una cantidad que tiene un esponente entero positivo ó negativo á una potencia, cuyo esponente sea tambien entero positivo ó negativo, se multiplican los dos esponentes* (a).

Sea la cantidad a: digo que $(a^m)^n=a^{mn}$.

En efecto, supongamos en primer lugar que n sea un número entero y positivo: tenemos $(a^m)^n=a^ma^ma^m\ldots\ldots$, entrando a^m n veces por factor. Mas (*Núm.* 25) $a^ma^ma^m\ldots\ldots=a^{m+m+m}\ldots\ldots=a^{mn}$; luego $(a^m)^n=a^{mn}\ldots\ldots(C)$.

Nota. La fórmula (*C*) demostrada para el caso en que los dos esponentes m y n son enteros y posivos, es tambien cierta aun cuando el uno de estos esponentes ó los dos, siendo enteros, sean negativos.

En efecto: 1.° $\left(a^{-m}\right)^n=\left(\frac{1}{a^m}\right)^n=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}$.

2.° $\left(a^m\right)^{-n}=\frac{1}{\left(a^m\right)^n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}$.

3.° $\left(a^{-m}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n}=\frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}}=a^{mn}$.

115. Esto supuesto, como un monomio es un producto de varios factores, se elevará á una potencia, elevando á dicha potencia todos sus factores. La potencia será positiva, si el monomio es positivo, ó aunque sea negativo, si el esponente de

---

(*a*) Enunciado abreviado.

la potencia es par; pues en este caso la potencia es el producto de un número par de factores negativos. La potencia será negativa, si el monomio es negativo y el esponente de la potencia es impar; pues la potencia es entonces el producto de un número impar de factores negativos.

Ejemplos. 1.° $(2a^3b^5c)^4=16a^{12}a^{20}c^4$.

2.° $(-3a^{-4}b^3d^2)^2=9a^{-8}b^6d^4=\dfrac{9b^6d^9}{a^8}$.

3.° $(7a^4b^{-3}d^3f)^{-3}=7^{-3}a^{-12}b^9d^{-9}f^{-3}=\dfrac{b^9}{343a^{12}d^9f^3}$.

4.° $\left(\mp\dfrac{a^3b^2}{5m^3n}\right)^3=\mp\dfrac{a^9b^6}{125m^9n^3}$.

Artículo 2.°

Raices de los monomios.

116. Se llama *raiz* de un número positivo ó negativo otro número que elevado á la potencia cuyo esponente es el índice de la raiz, produce el número propuesto.

Asi, la raiz cuadrada de 16 es 4, y tambien -4; pues cualquiera de estos dos números elevado al cuadrado, ó multiplicado por sí mismo, da 16. La raiz cúbica de -8 es -2, puesto que $(-2)^3=-8$.

Pero si se tratase de la raiz de grado par de un número negativo, esta raiz no es número positivo ni negativo; pues un número positivo ó negativo elevado á una potencia de grado par da siempre un resultado positivo. Por eso se llaman cantidades *imaginarias* las raices de grado par de números negativos. Asi, la raiz cuadrada de -4, la raiz 4.ª de -8, etc. son cantidades imaginarias.

Las cantidades que no son imaginarias se llaman cantidades *reales*.

Todo número positivo tiene dos raices reales de grado par, las cuáles solo se diferencian en el signo: pues un número positivo ó negativo elevado á una potencia de grado par da un resultado positivo.

Asi, el número 4 tiene dos raices cuadradas 2 y -2; el número 81 tiene dos raices cuartas 3 y -3.

117. Mas adelante veremos: 1.° que todo número posi-

tivo tiene tantas raices de grado par como unidades tiene el índice: sabemos ya que dos de las raices de este número son reales y solo se diferencian en el signo; las otras raices del mismo número son imaginarias. 2.° que todo número positivo ó negativo tiene tambien tantas raices de grado impar como unidades tiene el índice: la primera raiz, segun la definicion, es cantidad real; las otras son imaginarias.

118. Llamaremos en adelante *raiz aritmética ó valor aritmético de la raiz* de un número positivo, á la raiz real positiva de dicho número.

Esto supuesto, para evitar confusion, indicaremos en adelante la raiz aritmética de un número positivo, ó la raiz real negativa de grado impar de un número negativo, escribiendo el número bajo el signo $\sqrt{}$ con su índice conveniente.

Asi, $\sqrt{5}$ significará la raiz cuadrada aritmética de 5, ó el valor aritmético de la raiz cuadrada de 5; $\sqrt{30}$ significará la raiz cúbica aritmética de 30; $\sqrt[3]{-125}$ significará la raiz cúbica real de -125, la cual es -5 (*a*).

La raiz real negativa de un número negativo es igual á menos la raiz aritmética del mismo número hecho positivo; es decir, por ejemplo, $\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}$.

En efecto, elevando la cantidad $-\sqrt[3]{5}$ á la tercera potencia, tendremos $\left(-\sqrt[3]{5}\right)^3=-\sqrt[3]{5}\times-\sqrt[3]{5}\times-\sqrt[3]{5}=-\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=-5$; luego $-\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{-5}$.

(*a*) Para indicar la raiz cuadrada positiva de un número a, escribimos, segun acabamos de decir, $\sqrt{a}$, y para indicar la raiz cuadrada negativa del mismo número, se escribirá $-\sqrt{a}$. Para indicar la raiz cualquiera del grado m de a, se llamará x á dicha raiz, y se escribirá $x^m=a$, ecuacion en la cual x representa cualquiera de los valores de la raiz del grado m de a. Tambien se podrá representar la raiz cualquiera del grado m de a por $\sqrt[m]{a}$; pero advirtiendo, cuando asi se haga, que esta espresion representa cualquiera de los valores de la raiz del grado m de a, y que no se crea que representa solamente la raiz principal de a, como para nosotros es lo corriente. Por último, se podria adoptar otro signo, como por ejemplo, $\sqrt[m]{a}^{+}$ para representar una raiz cualquiera del grado m de a.

En general, $\sqrt[2m+1]{-a}=-\sqrt[2m+1]{a}$: pues elevando esta cantidad á la potencia del grado $2m+1$, resulta $-a$.

NOTA. En adelante por la palabra *raiz* de un número positivo se entenderá, mientras no se advierta lo contrario, *raiz aritmética* de dicho número.

120. *La raiz de un producto de factores positivos es igual al producto de las raices del mismo grado de dichos factores.*

Sea el producto abc, siendo a, b, c factores positivos: digo que $\sqrt[m]{abc}=\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}$.

En efecto,

$$\left(\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}\right)^m=\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\left(\sqrt[m]{b}\right)^m\left(\sqrt[m]{c}\right)^m.$$

Mas, $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m=a$ (*Núm.* 116), $\left(\sqrt[m]{b}\right)^m=b$, $\left(\sqrt[m]{c}\right)^m=c$;

luego $\left(\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}\right)^m=abc$. Vemos, pues, que $\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}$ es una cantidad que elevada á la potencia del grado m, da la cantidad abc; luego $\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}$ es la raiz del grado m de abc; esto es, $\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{abc}$.

121. *La raiz de un quebrado, cuyos dos términos son positivos, es igual á la raiz del numerador dividida por la raiz del denominador.*

Sea el quebrado $\frac{a}{b}$: digo que $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$.

En efecto, segun el teorema (*Núm.* 115),

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m=\frac{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m}{\left(\sqrt[m]{b}\right)^m}=\frac{a}{b};$$

luego
$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

122. *Para estraer una raiz de una potencia, cuyo esponente*

es divisible por el índice de la raiz, se efectúa esta division (a).

Sea la potencia $a^{\pm mn}$: digo que $\sqrt[m]{a^{\pm mn}}=a^{\pm n}$.

En efecto, segun el teorema (*Núm.* 114), $\left(a^{\pm n}\right)^m=a^{\pm mn}$;

luego $$a^{\pm n}=\sqrt[m]{a^{\pm mn}}.$$

Esto supuesto, para estraer una raiz de un monomio, se estraerá la raiz de cada uno de sus factores.

Ejemplos.

1.° $\sqrt{81a^{-16}b^{12}}=9a^{-8}b^6$, 2.° $\sqrt[3]{-64a^6b^3}=-4a^2b$,

3.° $\sqrt[5]{32a^{-5}b^{10}}=2a^{-1}b^2$, 4.° $\sqrt[4]{\dfrac{16a^4b^8c^{12}}{d^4e^{16}}}=\dfrac{2ab^2c^3}{de^4}$.

123. Se dice que una cantidad racional tiene *raiz exacta*, cuando esta raiz es otra cantidad racional.

Segun esta definicion, es evidente que un producto de factores racionales tendrá raiz exacta, siempre que cada uno de sus factores tenga raiz exacta; y que no la tendrá, si alguno de dichos factores no tiene raiz exacta. Tambien es evidente que una fraccion racional tendrá raiz exacta, siempre que la tengan sus dos términos; y que no tendrá raiz exacta una fraccion racional, cuyos dos términos no tienen ningun factor comun, si alguno de estos dos términos no tiene raiz exacta.

Nota. Cuando una espresion racional tiene raiz cuadrada exacta ó raiz cúbica exacta, se suele decir tambien que es un cuadrado *perfecto* ó un cubo *perfecto*.

124. Cuando un monomio no tenga raiz exacta, se podrá dar á la raiz indicada otra forma, á veces provechosa, estrayendo la raiz de los factores que la tengan exacta é indicando la raiz del producto de los demás, en virtud del teorema (*Núm.* 120). Si alguno de los factores del monomio tiene un esponente mayor que el índice, pero que no sea múltiplo del índice, se descompondrá (con el objeto de transformar la raiz indicada) en dos factores, el primero de los cuales tenga por esponente el mayor múltiplo del índice contenido en el primer esponente, y el segundo factor tenga por esponente el

---

(*a*) Enunciado abreviado.

resto. Por ejemplo, si se trata de una raiz cúbica, y uno de los factores es a^8, descompondremos este factor en $a^6 \times a^2$.

Ejemplos. 1.° $\sqrt[5]{96a^7b^5c^{11}}=\sqrt[5]{3.2^5a^5a^2b^5c^{10}c}=2abc^2\sqrt[5]{3a^2c}$.

2.° $\sqrt[3]{\dfrac{a^7b^4c}{16d^3f^4}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^7b^4c}}{\sqrt[3]{16d^3f^4}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^6ab^3bc}}{\sqrt[3]{8.2.d^3f^3f}}=\dfrac{a^2b\sqrt[3]{abc}}{2df\sqrt[3]{2f}}=\dfrac{a^2b}{2df}\times$

$\dfrac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{2f}}$; y como en virtud del teorema (*Núm.* 121) es $\dfrac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{2f}}=$

$\sqrt[3]{\dfrac{abc}{2f}}$, tendremos por fin que la raiz indicada propuesta se

transformará en $\dfrac{a^2b}{2df}\sqrt[3]{\dfrac{abc}{2f}}$.

3.° $\sqrt{\dfrac{a^3b^2}{c^2d}}=\sqrt{\dfrac{a^2b^2a}{c^2d}}=\dfrac{ab}{c}\sqrt{\dfrac{a}{d}}$.

125. Al contrario, conviene á veces introducir bajo el signo radical un factor ó divisor: para esto, se eleva dicho factor ó divisor á la potencia cuyo grado es el índice de la raiz.

En efecto, $q\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{q^m}.\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{q^m a}$;

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{q}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{q^m}}=\sqrt[m]{\frac{a}{q^m}}.$$

Ejemplos. 1.° $ab\sqrt[5]{\dfrac{c^3}{a^2b}}=\sqrt[5]{\dfrac{a^5b^5c^3}{a^2b}}=\sqrt[5]{a^3b^4c^3}$.

2.° $\dfrac{\sqrt{xyzu}}{x}=\sqrt{\dfrac{xzyu}{x^2}}=\sqrt{\dfrac{yzu}{x}}$.

CAPÍTULO II.

Potencias y raices de los polinomios.

ARTÍCULO 1.°

Permutaciones y combinaciones.

126. Llámanse *permutaciones* los grupos que pueden formarse con varias letras, tomándolas una á una, dos á dos, tres á tres, etc., los cuales se diferencian ya por alguna letra, ya por el órden en que las letras están colocadas.

Formemos las permutaciones binarias, ternarias, cuaternarias, etc. de las letras a, b, c, d.....

Para formar las permutaciones binarias, se colocan al lado de cada letra todas las otras, una á una.

Asi, las permutaciones binarias de dichas letras serán ab, ac, ad.....; ba, bc, bd.....; ca, cb, cd.....; da, db, dc.....

Para formar las permutaciones ternarias, se colocan al lado de cada permutacion binaria todas las letras que no entran en ella, una á una.

Asi, las permutaciones ternarias de las letras dadas serán:

$$\begin{array}{l} abc,\ abd,\ acb,\ acd,\ adb,\ adc\ldots\ldots, \\ bac,\ bad,\ bca,\ bcd,\ bda,\ bdc\ldots\ldots, \\ cab,\ cad,\ cba,\ cbd,\ cda,\ cdb\ldots\ldots, \\ dab,\ dac,\ dba,\ dbc,\ dca,\ dcb\ldots\ldots \end{array}$$

Para formar las permutaciones cuaternarias, se colocan al lado de cada permutacion ternaria todas las letras que no entran en ella, una á una.

En general, para formar las permutaciones de un cierto órden, se colocan al lado de cada permutacion de órden inferior inmediato las letras que no entran en ella, una á una.

127. *Hallar el número de permutaciones binarias, ternarias, cuaternarias, etc. de* m *letras.*

Hemos visto que, para formar las permutaciones binarias, se colocan una á una al lado de cada letra todas las demás; luego cada una de las letras nos dará $m-1$ permutaciones binarias; y por consiguiente las m letras nos darán

$$m(m-1) \qquad \text{permutaciones binarias.}$$

Para hallar el número de permutaciones ternarias, se colocan una á una al lado de cada permutacion binaria todas las letras que no entran en ella; luego cada permutacion binaria nos dará $m-2$ permutaciones ternarias, y por consiguiente todas las permutaciones binarias $m(m-1)$ nos darán

$$m(m-1)(m-2) \text{ permutaciones ternarias.}$$

Por el mismo razonamiento se hallará que el número de las permutaciones cuaternarias es

$$m(m-1)(m-2)(m-3);$$

que el número de las permutaciones quinarias es

$$m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4);$$

y asi sucesivamente.

Luego en general el número de permutaciones de m letras tomadas n á n será

$$m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots\Big(m-(n-1)\Big),$$

ó bien $\quad m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)$,

producto que consta de n factores.

128. Si en cada permutacion entran todas las letras, será $m=n$, y por consiguiente la fórmula general será en tal caso

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\times 1, \text{ ó } 1\times 2\times 3\ldots\ldots\times n,$$

fórmula que contiene n factores, y que representa el número de permutaciones de n letras tomadas n á n.

Asi, el número de permutaciones binarias de dos letras será 1×2; el número de permutaciones ternarias de tres letras será $1\times 2\times 3$; el número de permutaciones cuaternarias de cuatro letras será $1\times 2\times 3\times 4$; etc.

129. Llámanse *combinaciones* ó *productos diferentes* las permutaciones que se diferencian en una ó mas letras.

Asi, en las permutaciones binarias de las cuatro letras a, b, c, d, que son

$$\begin{array}{l} ab,\ ac,\ ad, \\ ba,\ bc,\ bd, \\ ca,\ cb,\ cd, \\ da,\ db,\ dc, \end{array}$$

existen las combinaciones

$$\begin{array}{rrr} ab, & ac, & ad, \\ & bc, & bd, \\ & & cd. \end{array}$$

En las permutaciones ternarias de las mismas cuatro letras: $\quad abc,\ abd,\ acb,\ acd,\ adb,\ adc,$

bac, *bad*, *bca*, *bcd*, *bda*, *bdc*,
cab, *cad*, *cba*, *cbd*, *cda*, *cdb*,
dab, *dac*, *dba*, *dbc*, *dca*, *dcb*,

existen las combinaciones

abc, *abd*, *acd*, *bcd*.

130. En vista de estos resultados, estableceremos la siguiente regla para la formacion directa de las combinaciones.

Para formar las combinaciones binarias de varias letras, se multiplica cada letra por cada una de las siguientes.

Asi, las combinaciones binarias de las letras *a*, *b*, *c*, *d*, *e* son

ab, *ac*, *ad*, *ae*,
bc, *bd*, *be*. . . . . (1),
cd, *ce*. . . . . (2),
de. . . . . (3),

Para formar las combinaciones ternarias de varias letras, se multiplica cada letra por las combinaciones binarias de las letras siguientes.

Asi, para formar las combinaciones ternarias de las letras *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, multiplicaré la letra *a* por las combinaciones binarias (1), (2) y (3) de las letras siguientes *b*, *c*, *d*, *e*; la letra *b* por las combinaciones binarias (2) y (3) de las letras siguientes *c*, *d*, *e*; la letra *c* por la combinacion binaria (3) de las letras siguientes *d*, *e*; y resultarán:

abc, *abd*, *abe*,
acd, *ace*,
ade,
bcd, *bce*,
bde,
cde.

Del mismo modo se veria, que para formar las combinaciones cuaternarias de varias letras, se multiplica cada letra por las combinaciones ternarias de las letras siguientes; y en general, que para formar las combinaciones de un cierto órden de varias letras, se multiplica cada letra por las combinaciones del órden inmediato inferior de las letras siguientes.

Nota. Si se han formado las combinaciones de un cierto órden de las letras *a*, *b*, *c*..... *k*, se formarán las combinaciones del mismo órden de las letras *a*, *b*, *c*..... *k*, *l*, ó *l*, *a*, *b*, *c*.....*k*, añadiendo á las combinaciones formadas ya con las letras *a*, *b*, *c*.....*k* los productos de *l* por las combinaciones órden inmediato inferior de las mismas letras *a*, *b*, *c*..... *k*.

131. *Hallar el número de combinaciones binarias, ternarias, etc. de* m *letras.*

Para hallar el número de combinaciones binarias de m letras, observo que en las permutaciones binarias de estas m letras está repetida cada combinacion tantas veces como permutaciones binarias se pueden formar con dos letras, es decir, 1.2 (*Núm.* 128): luego el número de combinaciones que existen en dichas permutaciones es 1.2 veces menor que el número de permutaciones $m(m-1)$; el número de combinaciones binarias de m letras será pues

$$\frac{m(m-1)}{1.2}.$$

Para hallar el número de combinaciones ternarias, observo que en las permutaciones ternarias de estas letras cada combinacion entra tantas veces como permutaciones ternarias se pueden formar con tres letras, es decir (*Núm.* 128) $1.2.3$; luego el número de combinaciones que existen en dichas permutaciones es $1.2.3$ veces menor que el número $m(m-1)(m-2)$ de permutaciones ternarias; luego el número de combinaciones ternarias es

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.$$

Por el mismo razonamiento se hallará que el número de combinaciones cuaternarias es

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4},$$

que el número de las quinarias es

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5},$$

y en general, que el número de combinaciones de m letra tomadas n á n es

$$\frac{m(m-1)(m-2).....(m-n+1)}{1.2.3.....n}.$$

132. *El número de combinaciones de* m *letras tomadas* n *á* n *es igual al número de combinaciones de* m *letras tomadas* m — n *á* m — n.

El número de combinaciones de m letras tomadas n á n es (*Núm.* 131)

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots n}.$$

El número de combinaciones de m letras tomadas $m-n$ á $m-n$ se hallará mudando en la espresion anterior n en $m-n$, y será por lo tanto

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+1)}{1.2\ldots\ldots(m-n)}.$$

Multiplicando los dos términos del primer quebrado por el denominador del segundo, y los dos términos del segundo quebrado por el denominador del primero; el primer quebrado equivaldrá (*Núm.* 53) al nuevo quebrado

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)(m-n)\ldots\ldots 2.1}{1.2\ldots\ldots n.1.2\ldots\ldots(m-n)},$$

y el segundo quebrado equivaldrá al quebrado

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+1)n\ldots\ldots 2.1}{1.2\ldots\ldots n.1,2\ldots\ldots(m-n)}.$$

Los dos quebrados, que acabamos de escribir, son iguales; pues el numerador de cada uno es el producto de todos los números naturales desde 1 hasta m, y los denominadores son evidentemente iguales; luego etc.

Se puede demostrar este teorema de este otro modo. Si de las m letras se toman n letras para formar una combinacion, quedarán $m-n$ letras que formarán otra combinacion; luego á cada combinacion de á n letras corresponde una de á $m-n$ letras, y por la misma razon á cada combinacion de á $m-n$ letras corresponde una de á n letras; luego el número de combinaciones de m letras n á n es igual al número de combinaciones de m letras $m-n$ á $m-n$.

Asi, 10 letras combinadas 3 á 3 dan el mismo número de combinaciones que 10 letras combinadas 7 á 7.

Artículo 2.°

Fórmula del binomio de Newton.

---

133. *Si se multiplican varios factores binomios* x+a, x+b, x+c, *etc., cuyo primer término sea el mismo, el esponente de* x *en el primer término del producto será el número de factores binomios, y dicho esponente disminuirá sucesivamente en una unidad; el coeficiente del primer término será* 1 , *el del segundo*

término será la suma de los segundos términos de los binomios, el del tercero será la suma de sus productos binarios, el del cuarto será la suma de sus productos ternarios, etc., y el último término será el producto de los segundos términos de los binomios.

Sea m el número de factores binomios; vamos á demostrar que

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots = x^m + \left.\begin{array}{l} a \\ +b \\ +c \\ \vdots \end{array}\right| x^{m-1} + \left.\begin{array}{l} ab \\ +ac \\ +bc \\ \vdots \end{array}\right| x^{m-2} + \left.\begin{array}{l} abc \\ +abd \\ +acd \\ \vdots \end{array}\right| x^{m-3} + \ldots + abc\ldots$$

Para demostrar este teorema, hallemos los productos de dos, de tres, de cuatro factores binomios.

1.° $$(x+a)(x+b) = x^2 + \left.\begin{array}{l} a \\ +b \end{array}\right| x + ab.$$

2.° $$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + \left.\begin{array}{l} a \\ +b \\ +c \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{l} ab \\ +ac \\ +bc \end{array}\right| x + abc.$$

3.° $$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + \left.\begin{array}{l} a \\ +b \\ +c \\ +d \end{array}\right| x^3 + \left.\begin{array}{l} ab \\ +ac \\ +bc \\ +ad \\ +bd \\ +cd \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{l} abc \\ +abd \\ +acd \\ +bcd \end{array}\right| x + abcd.$$

Vemos que el teorema se verifica, siendo dos, tres ó cuatro los factores binomios. Para demostrarlo de una manera general, admitiremos que se verifique, siendo p el número de factores binomios, y demostraremos que tambien se verificará siendo $p+1$ el número de factores binomios.

Representemos el producto de los p binomios por la espresion $$x^p + Ax^{p-1} + Bx^{p-2} + Cx^{p-3} + \ldots + Y,$$
en la cual

$$\begin{array}{l} A = a + b + c + \ldots, \\ B = ab + ac + bc + \ldots, \\ C = abc + abd + acd + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y = abc\ldots \end{array}$$

hasta aquí

Multipliquemos dicha espresion por un nuevo binomio $x+l$.

$$\begin{array}{l}
x^p\ . + Ax^{p-1} + Bx^{p-2} + Cx^{p-3} + \ldots + Y \\
x \quad + l \\
\hline
\begin{array}{l|l|l|l}
x^{p+1} + A & x^p + B & x^{p-1} + C & x^{p-2} + \ldots \\
\quad + l & \quad + lA & \quad + lB & \quad + \ldots + lY
\end{array}
\end{array}$$

Segun este producto, el esponente de x en el primer término es el número $p+1$ de factores binomios, y dicho esponente va disminuyendo sucesivamente en una unidad, hasta llegar al último término que no contiene á x.

El coeficiente del primer término es 1. El coeficiente del segundo término es $A+l$, y puesto que A es la suma de los segundos términos de los p binomios, $A+l$ es tambien la suma de los segundos términos de los $p+1$ binomios.

El coeficiente del tercer término es $B+lA$; y como B es la suma de los productos binarios que se pueden formar con los segundos términos de los p binomios, y lA es la suma de estos términos multiplicados por l, se infiere (*Núm.* 130, *nota*) que $B+lA$ es la suma de los productos binarios de los segundos términos de los $p+1$ binomios.

El coeficiente del cuarto término es $C+lB$; y como C es la suma de los productos ternarios de los segundos términos de los p binomios, y B es la suma de los productos binarios, se infiere (*Núm.* 130, *nota*) que $C+lB$ es la suma de los productos ternarios de los segundos términos de los $p+1$ binomios.

Este razonamiento se puede continuar hasta llegar al último término lY, que es evidentemente el producto de todos los segundos términos de los $p+1$ binomios.

Queda pues demostrado, que si el teorema es cierto, siendo p el número de factores binomios, tambien lo será, si se toma un factor binomio mas.

Ahora bien, el teorema es cierto, siendo dos, tres, cuatro el número de factores binomios; luego tambien lo será, siendo cinco el número de factores binomios; y por consiguiente tambien lo será, siendo seis el número de factores binomios; y asi sucesivamente: luego dicho teorema es cierto, cualquiera que sea el número de factores binomios.

134. De este teorema se deduce fácilmente la fórmula del binomio.

Obsérvese que los términos x, a, b, c... de los binomios $x+a$, $x+b$, $x+c$..... tienen valores cualesquiera positivos ó negativos: podemos por lo tanto suponer que los segundos términos b, c, d... son iguales á a; y en este supuesto, llamando como antes m al número de factores binómios, el primer miembro de la identidad, que nos da el teorema, se convertirá en $(x+a)^m$. En el segundo miembro el coeficiente del segundo término será $a+a+a+...=ma$; el coeficiente del tercer término será $a^2+a^2+a^2+...$, estando a^2 repetida tantas veces como combinaciones binarias se pueden formar con m letras; luego dicho coeficiente se convierte en $\frac{m(m-1)}{1.2}a^2$. El coeficiente del cuarto término se reduce á $a^3+a^3+a^3+...$, estando a^3 repetida tantas veces como combinaciones ternarias pueden formarse con m letras, que es $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$; luego dicho coeficiente será $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3$.

Del mismo modo se hallarán los coeficientes de los demás términos; y como el último término se reduce á a^m, la identidad (*Núm.* 133) se transforma en la siguiente:

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}+$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3}+...+a^m,$$

que es la fórmula del binomio de Newton.

135. El segundo miembro de esta fórmula tiene $m+1$ términos: pues el esponente de la a en cada término tiene tantas unidades como términos hay antes; y como en el último término el esponente de a es m, el número de términos anteriores al último será m, y por consiguiente todos los términos del segundo miembro serán $m+1$.

136. Por medio de la fórmula del binomio se puede hallar directamente, sin valerse de las potencias inferiores, una potencia cualquiera de un binomio, poniendo en vez de las letras x, a y m los valores particulares que se den.

Ejemplo. Desenvolver $(x+a)^4$. Para esto haremos en la fórmula del binomio $m=4$, y resultará

$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4.$$

Tambien puede deducirse de dicha fórmula una regla que nos dé con mas brevedad el desenvolvimiento de una potencie de un binomio; pues, segun ella, el coeficiente de cada término se puede deducir del anterior, multiplicando el coeficiente de este por el esponente que tiene x en él mismo, y dividiendo el producto por el esponente de a aumentado en una unidad.

Apliquemos esta regla á los ejemplos siguientes:

1.° $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$,
2.° $(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$,
3.° $(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x^2+a^4$,
4.° $(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$.

137. Es evidente que cada coeficiente m, $\frac{m(m-1)}{1.2}$, $\frac{m(m-1)\,m(-2)}{1.2.3}$, etc. del segundo miembro de la fórmula del binomio representa el número de combinaciones que se pueden formar con m letras tomadas tantas á tantas como términos hay antes de aquel que se considera; por consiguiente el coeficiente del término que ocupa el lugar $n+1$, contando desde el primero, representará el número de combinaciones de m letras tomadas n á n; luego dicho término

será $$\frac{m(m-1)\,(m-2)\ldots\,(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}a^nx^{m-n}.$$

Esta espresion se llama *término general* (a), porque dando á n un valor entero y positivo cualquiera, se halla por medio de ella el término correspondiente del desenvolvimiento.

Asi, haciendo $n=1$, nos dará el segundo término; haciendo $n=2$, el tercero; haciendo $n=3$, el cuarto; etc.

138. *En el desenvolvimiento de* $(x+a)^m$ *los coeficientes de los términos equidistantes de los estremos son iguales.*

En efecto, el término que ocupa el lugar $n+1$, tiene antes de sí n términos, y por lo tanto su coeficiente es el nú-

(a) Cuando se da un polinomio, cuyos términos siguen una ley constante en su formacion, y se trata de hallar su término *general*, es decir, una espresion que puede representar á todos los términos del polinomio, se suele suponer comunmente que este término ocupa el lugar n, contando desde el 1.°: mas en el caso actual es preferible tomar por término general el que ocupa el lugar $n+1$; porque el coeficiente del término que ocupa el mero de combinaciones de m letras tomadas n á n. El término que tiene despues de sí n términos, tiene antes de sí el total $m+1$ de términos menos $n+1$ términos, esto es, $m+1-(n+1)=m-n$; luego su coeficiente es el número de combinaciones de m letras tomadas $m-n$ á $m-n$; y como el número de combinaciones de m letras n á n, es igual al número de combinaciones de m letras $m-n$ á $m-n$ (*Núm.* 128), se infiere que los dos coeficientes de los dos términos equidistantes de los estremos son iguales.

En virtud de este teorema, cuando se haya calculado la mitad ó mas de la mitad del número de términos de la potencia de un binomio, se hallarán los demas términos sin nuevo cálculo.

Ejemplo. $(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7$.

Nota. La fórmula del binomio queda demostrada para el caso en que, teniendo los términos x y a del binomio valores cualesquiera, el esponente m es entero y positivo (*a*). Veamos, pues, en qué se convertirá la misma fórmula cuando el segundo término es negativo: para esto, mudemos en la fórmula el signo de a, y tendremos

$$(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3}+\ldots\pm a^m,$$

donde vemos que los signos $+$ y $-$ van alternando.

139. Hagamos $x=1$ en la fórmula del binomio, y tendremos

$$(1+a)^m=1+ma+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+a^3\ldots+a^m(A).$$

lugar n es el número de combinaciones de m letras tomadas $n-1$ á $n-1$, y por tanto este término seria

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1)+1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ (n-1)}a^{n-1}x^{m-(n-1)}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ (n-1)}a^{n-1}x^{m-n+1},$$

espresion menos cómoda que la del término que ocupa el lugar $n+1$, y menos fácil de hallar.

(*a*) En el álgebra superior se demostrará la verdad de esta fórmula para los casos en que el esponente m es fraccionario ó inconmensurable, positivo ó negativo.

140. Siempre puede reducirse una potencia indicada de un binomio á la forma $(1+a)^m$; pues $(x+b)^m = \left(x\left(1+\frac{b}{x}\right)\right)^m$ $= x^m\left(1+\frac{b}{x}\right)^m$; y representando ahora $\frac{b}{x}$ por a, tendremos $(x+b)^m = x^m(1+a)^m$.

Segun esto, para elevar un binomio $x+b$ á una potencia del grado m, se puede reducir la potencia $(x+b)^m$ primeramente á la forma $x^m(1+a)^m$, desenvolver $(1+a)^m$ por la fórmula (A), y multiplicar en seguida todos los términos del desenvolvimiento por x.

Artículo 3.°

Potencia de los polinomios.

---

141. Para elevar un polinomio á una potencia, se le considera como un binomio, tomando por primera parte varios de sus términos, y como segunda parte los demás; y se eleva en seguida dicho binomio.

Asi, para elevar el polinomio $a+b+c+d$ al cubo, tomaremos, por ejemplo a, por primera parte, y por segunda $b+c+d$, y tendremos

$$(a+b+c+d)^3 = a^3 + 3a^2(b+c+d) + 3a(b+c+d)^2 + (b+c+d)^3.$$

Del mismo modo

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2a(b+c+d) + (b+c+d)^2 =$$
$$a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2b(c+d) + (c+d)^2 =$$
$$a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2;$$

ó en fin

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Luego *el cuadrado de un polinomio es igual á la suma de cuadrados de sus términos, mas el duplo de la suma de sus productos binarios.*

Ejemplo. $(b^2+c^2-a^2)^2 = b^4+c^4+a^4+2b^2c^2-2a^2b^2-2a^2c^2$.

142. *El cuadrado de un trinomio tiene seis términos; y si es un trinomio ordenado con respecto á una letra, tiene en general cinco términos, pero tambien puede tener cuatro.*

1.° Sea el trinomio $a+b+c$: tendremos

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Vemos que han resultado seis términos.

Si este trinomio se supusiera ordenado con respecto á una de sus letras, a por ejemplo, no seria mas que un binomio $a+(b+c)a^0$; y su cuadrado no tendria mas que los tres términos $a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$.

2.° Sea el trinomio ax^2+bx+c ordenado con respecto á la letra x: tendremos

$$(ax^2+bx+c)^2 = a^2x^4+2abx^3+\left.\begin{array}{l}b^2\\+2ac\end{array}\right| x^2+2bcx+c^2.$$

Resultan cinco términos; pero si $b^2+2ac=0$, lo que puede ser de infinitos modos, no tendrá mas que cuatro términos.

Artículo 4.°

Raices de los polinomios.

---

§. 1.° Raices cualesquiera de los números.

---

* **143.** Se ha visto en la aritmética, que de la composicion del cuadrado y cubo de la suma de dos números enteros se deducen las reglas de la estraccion de las raices cuadrada y cúbica de los números. La consideracion de los dos primeros términos del desenvolvimiento de $(x+a)^m$, que son x^m+max^{m-1}, nos daria tambien reglas análogas á las de las raices cuadrada y cúbica para la estraccion de las raices de grado superior de los números. Pero como la estraccion de las raices de un grado superior al 3.° ocurre rara vez, y que entonces se puede, y es preferible, valerse de los logaritmos, de que hablaremos pronto, no nos detendremos en hallar dichas reglas.

§. 2.° Estraccion de la raiz cuadrada de un polinomio.

Raiz cuadrada exacta.

144. Sea el polinomio $A+B+C$..... y su raiz cuadrada $a+b+c$..... Supongamos que estos dos polinomios estén ordenados con respecto á una misma letra x: tendremos la identidad

$$A+B+C+\ldots\ldots=(a+b+c+\ldots\ldots)^2=$$
$$a^2+2a(b+c+\ldots\ldots)+(b+c+\ldots\ldots)^2 \qquad (1).$$

Ahora, segun el teorema (*Núm.* 31), a^2 es el primer término de este polinomio ordenado con respecto á x: luego $a^2=A$, y por consiguiente $a=\sqrt{A}$; es decir, que estrayendo la raiz cuadrada del primer término del polinomio propuesto ordenado con respecto á una letra, se tendrá el primer término de su raiz cuadrada.

El primer término del polinomio $b+c+\ldots\ldots$ ordenado con respecto á x es b, y por consiguiente (*Núm.* 31) b^2 será el primer término del polinomio $(b+c+\ldots\ldots)^2$ ordenado con respecto á x. El primer término del polinomo $2a(b+c+\ldots\ldots)$ ordenado con respecto á x es $2ab$; y como la x tiene mayor esponente en a que en b, en el término $2ab$ tendrá mayor esponente que en b^2; luego $2ab$ es el segundo término del segundo miembro ordenado con respecto á x; y por tanto $B=2ab$, de donde resulta $b=\frac{B}{2a}$. Luego, para hallar el segundo término de la raiz, se divide el segundo término del polinomio propuesto por el duplo del primer término de la raiz.

Para hallar el tercer término de la raiz, consideremos al polinomio $a+b+c+d\ldots$ como un binomio, cuya primera parte sea el binomio hallado $a+b$, y tendremos
$$A'+B'+C'+\ldots=(a+b)^2+2(a+b)\,(c+d+\ldots)+(c+d+\ldots)^2;$$
luego
$$A'+B'+C'+\ldots-(a+b)^2=2(a+b)(c+d+\ldots)+(c+d\ldots)^2.$$
Ordenando el primer miembro con respecto á x, y llamándole $A'+B'+C'+\ldots.$, tendremos
$$A'+B'+C'+\ldots.=2(a+b)(c+d+\ldots.)+(c+d+\ldots)^2.$$

Ahora se demostrará como en el caso anterior, que $2ac$ es el primer término del segundo miembro ordenado con respecto á x; luego $A'=2ac$, y por consiguiente $c=\frac{A'}{2a}$; es decir, que para hallar el tercer término de la raiz, se dividirá el primer término A' del resto por el duplo del primer término de la raiz.

Este razonamiento puede continuarse hasta que se hallen todos los términos de la raiz; y *cuando se halle el último, el* *resto correspondiente será cero*, porque entonces el cuadrado del polinomio hallado, que es la cantidad que se resta, es igual al polinomio propuesto.

Al contrario, cuando restando del polinomio propuesto el cuadrado del polinomio hallado, resulte cero de resto, el polinomio hallado será evidentemente la raíz cuadrada del polinomio propuesto.

Luego *para estraer la raiz cuadrada de un polinomio, se ordena con respecto á una cualquiera de sus letras, y estrayendo la raiz cuadrada de su primer término, se tendrá el primer término de la raiz; dividiendo en seguida el segundo término del polinomio propuesto por el duplo del primer término de la raiz, se tendrá el segundo término de esta. Para hallar en adelante un término cualquiera, se eleva al cuadrado el polinomio que forman los términos hallados de la raiz, se resta este cuadrado del polinomio propuesto, y se divide el primer término del resto por el duplo del primer término de la raiz. Cuando se llegue á un resto cero, el polinomio hallado es exactamente la raiz cuadrada del polinomio propuesto.*

Ejemplo. Estraer la raiz cuadrada del polinomio

$$9x^4-12x^3y+28x^2y^2-16xy^3+16y^4.$$

Disposicion de esta operacion.

$$
\begin{array}{r|l}
9x^4-12x^3y+28x^2y^2-16xy^3+16y^4 & 3x^2-2xy+4y^2 \\ \cline{2-2}
-9x^4+12x^3y-4x^2y^2 & 6x^2 \\ \cline{1-1}
24x^2y^2-16xy^3+16y^4 & \\
-24x^2y^2+16xy^3-16y^4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Ordenado el polinomio con respecto á x, se estrae la raiz cuadrada de su primer término $9x^4$, y se tiene el primer término $3x^2$ de la raiz; se divide el segundo término $-12x^2y$ del polinomio por $6x^2$, duplo del primer término de la raiz, y se tiene el segundo término $-2xy$ de la raiz. Se eleva al cuadrado el binomio $3x^2-2xy$, se resta este cuadrado del polinomio propuesto, y se divide el primer término $24x^2y^2$ del resto por el mismo divisor anterior, y resulta el tercer término $4y^2$ de la raiz. Elevo ahora al cuadrado el trinomio $3x^2-2xy+4y^2$: resulta

$$(3x^2-2xy)^2+2(3x^2-2xy).4y^2+16y^4;$$

y resto este cuadrado del polinomio propuesto; mas, como de este polinomio he restado ya $(3x^2-2xy)^2$, se hallará el nuevo resto, quitando del resto $24x^2y^2-16xy^3+16y^4$ las dos partes $2(3x^2-2xy).4y^2+16y^4$, y resulta cero de resto: luego la raiz cuadrada del polinomio es

$$3x^2-2xy+4y^2.$$

* 145. Si la letra principal entra en varios términos con un mismo esponente, se ordenarán los polinomios, reduciendo antes á un solo término todos aquellos en que dicha letra tiene el mismo esponente; y se continuará la operacion estrayendo aparte la raiz cuadrada del coeficiente del primer término, y ejecutando tambien aparte las divisiones parciales del coeficiente del segundo término del polinomio y de los coeficientes de los primeros términos de los restos por el duplo del primer término de la raiz.

Ejemplo. Estraer la raiz cuadrada del polinomio $(a^2-2ab+b^2)x^4+(2a^3-2b^3)x^3+(3a^4+3a^2b^2+3b^4)x^2+(2a^5+2a^4b+2a^3b^2-2a^2b^3-2ab^4-2b^5)x+a^6-2a^3b^3+b^6$.

Se hallará que la raiz cuadrada es $(a-b)x^2+(a^2+ab+b^2)x+a^3-b^3$.

146. *Todo trinomio ordenado, en que el cuádruplo del producto de los coeficientes de los términos 1.° y 3.° sea igual al cuadrado del coeficiente del 2.° término, es un cuadrado perfecto; y su raiz cuadrada será un binomio cuyos términos serán las raices cuadradas de sus estremos, ligadas por medio del signo del término medio.*

Sea el trinomio ordenado $a^2x^2\pm bx+\frac{b^2}{4a^2}$, en el que se verifica la hipótesi: digo que es un cuadrado perfecto, y que su raiz cuadrada será $ax\pm\frac{b}{2a}$.

En efecto, elevando al cuadrado el binomio $ax\pm\frac{b}{2a}$, resulta el trinomio propuesto $a^2x^2\pm bx+\frac{b^2}{4a^2}$; lo que demuestra las dos partes del teorema.

Todo trinomio ordenado, en que el cuádruplo del producto *de los coeficientes de los términos 1.° y 3.° no es igual al cuadrado del coeficiente del 2.°, no es cuadrado perfecto.*

Admitamos que este trinomio sea un cuadrado perfecto: su raiz cuadrada seria un binomio, pues un monomio elevado al cuadrado da otro monomio, un trinomio elevado al cuadrado tiene por lo menos cuatro términos (*Núm.* 142), etc. es decir, que solo un binomio puede ser raiz cuadrada de un trinomio. Sea $mx \pm n$ este binomio: elevándolo al cuadrado, resultaria el trinomio propuesto, y este seria $m^2x^2 \pm 2mnx + n^2$; mas en este trinomio se verifica que el cuádruplo del producto de los coeficientes de los estremos es igual al cuadrado del coeficiente del término medio; y como esta consecuencia es contraria á la suposicion, se infiere que el trinomio propuesto no puede ser cuadrado perfecto.

Asi, el trinomio $9x^2 \pm 6x + 1$ es un cuadrado perfecto; puesto que $4.9.1 = 6^2$, y su raiz cuadrada es $3x \pm 1$.

El trinomio $9x^2 \pm 6x + 4$ no es cuadrado perfècto, puesto que $4.9.4$ no es igual á 6^2.

Recíprocos. *En todo trinomio ordenado, que sea cuadrado perfecto, el cuádruplo del producto de los coeficientes estremos es igual al cuadrado del coeficiente del término medio. En todo trinomio ordenado, que no sea cuadrado perfecto, el cuádruplo del producto de los coeficientes estremos no es igual al cuadrado del coeficiente del término medio.*

Reduccion al absurdo (*Geom.* 20).

Polinomios que no tienen raiz cuadrada exacta.

---

147. *Ningun binomio es cuadrado perfecto*; pues el cuadrado de un monomio es otro monomio, el cuadrado de un binomio es un trinomio, y el cuadrado de un trinomio, cuadrinomio, etc. tiene con mayor razon mas que dos términos.

No se crea, pues, que $\sqrt{a^2+b^2}$ es igual á $a+b$, como parece natural á los principiantes.

* 148. El polinomio no tendrá raiz cuadrada exacta: 1.° Cuando ordenado con respecto á una cualquiera de sus letras, el primero y último términos no tienen raiz entera exacta. 2.° Cuando el segundo término del polinomio no es divisible por el duplo del primer término de la raiz. 3.° Cuando

el primer término de un resto no es divisible por el duplo del primer término de la raiz.

§. 3.° Estraccion de la raiz del grado m de un polinomio.

Raiz exacta.

* 149. Sea el polinomio $A+B+C+D+\ldots\ldots$, y la raiz del grado m, que se busca, $a+b+c+d+\ldots\ldots$, ambos polinomios ordenados con respecto á una misma letra x: tendremos la identidad

$$A+B+C+D+\ldots\ldots=(a+b+c+d+\ldots\ldots)^m=a^m+ma^{m-1}(b+c+d+\ldots\ldots\ldots)+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}(b+c+d+\ldots\ldots\ldots)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}(b+c+d+\ldots)^3+\text{ etc.} \qquad (1).$$

Imaginemos que este resultado se haya hallado multiplicando el polinomio $a+b+c+d+\ldots\ldots\ldots$ $m-1$ veces por sí mismo. Segun el teorema (*Núm.* 31), a^m será el término primero del producto, es decir, el término en que x tendrá el mayor esponente; luego $a^m=A$, y por consiguiente $a=\sqrt[m]{A}$. Luego estrayendo la raiz del grado m del primer término del polinomio propuesto, se tendrá el primer término de la raiz.

El término en que x tiene el mayor esponente en el polinomio $b+c+d+\ldots.$ es b, y por consiguiente los primeros términos de los polinomios $(b+c+d+\ldots)^2$, $(b+c+d+)^3$, etc., ordenados con respecto á x, serán b^2, b^3, etc.; luego los primeros términos de los polinomios $a^{m-1}(b+c+d+\ldots.)$, $a^{m-2}(b+c+d+\ldots\ldots)^2$, $a^{m-3}(a+c+d+\ldots\ldots)^3$, etc. serán respectivamente $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, etc. Ahora, x tiene mayor esponente en $a^{m-1}b$ que en $a^{m-2}b^2$, y en este mayor esponente que en $a^{m-3}b^3$, etc.; pues siendo $a^{m-1}b=a^{m-2}ab$, y teniendo x mayor esponente en a que en b, tendrá mayor esponente en ab que en b^2, y por consiguiente x tendrá mayor esponente en $a^{m-2}ab=a^{m-1}b$ que en $a^{m-2}b^2$. Del mismo modo se demuestra que x tiene mayor esponente en $a^{m-2}b^2$ que en $a^{m-3}b^3$, etc.; luego el segundo término del 2.° miembro de la identidad (1) ordenado con respecto á x es $ma^{m-1}b$; luego $ma^{m-1}b=B$, y por consiguiente

$$b=\frac{B}{ma^{m-1}}.$$

Luego para hallar el segundo término de la raiz, se divide el segundo término del polinomio por m veces la potencia del grado $m-1$ del primer término de la raiz.

Para hallar el tercer término de la raiz, consideremos al polinomio $a+b+c+d+\ldots\ldots$ como un binomio, cuya primera parte sea el binomio hallado $a+b$, y tendremos

$$A+B+C+D+\ldots.=(a+b)^m+m(a+b)^{m-1}(c+d+\ldots.)+\frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-2}(c+d+\ldots\ldots)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(a+b)^{m-3}(c+d+\ldots\ldots)^3+\ldots.$$

Restando $(a+b)^m$ de ambos miembros, y llamando $A'+B'+C'+\ldots\ldots$ al primer miembro ordenado con respecto x, será

$$A'+B'+C'+\ldots=m(a+b)^{m-1}(c+d+\ldots)+\frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-2}(c+d+\ldots\ldots)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(a+b)^{m-3}(c+d+\ldots\ldots)^3+\ldots\ldots$$

Ahora se demostrará como en el caso anterior, que el término en que la letra principal n tiene el mayor esponente, es $ma^{m-1}c$; luego $ma^{m-1}c=A'$, de donde

$$c=\frac{A'}{ma^{m-1}}.$$

Luego, para hallar el tercer término de la raiz, se eleva á la potencia del grado m el binomio hallado, esta potencia se resta del polinomio propuesto, y se divide el primer término del resto por el mismo divisor que en el caso anterior.

Considerando ahora al polinomio $a+b+c+d+\ldots\ldots$ como un binomio, cuya primera parte sea el trinomio $a+b+c$, se verá por igual razonamiento que el cuarto término de la raiz se halla por la misma regla; y asi sucesivamente.

Luego, *para estraer la raiz del grado* m *de un polinomio, se ordena con respecto á una letra cualquiera, y estrayendo la raiz del grado* m *del primer término, se tendrá el primer término de la raiz; dividiendo en seguida el segundo término del polinomio propuesto por* m *veces la potencia del grado* m — 1 *del primer término de la raiz, se tendrá el segundo término de esta. Para hallar en adelante el primer término de los que faltan, se eleva á la potencia del grado* m *el polinomio que forman los* *términos hallados de la raiz, se resta dicha potencia del polinomio propuesto, y se divide el primer término del resto por* m *veces la potencia del grado* m—1 *del primer término de la raiz. Cuando se llegue á un resto cero, el polinomio hallado será exactamente la raiz del grado* m *del polinomio propuesto.*

Ejemplo. Estraer la raiz cúbica del polinomio
$$8x^6-36ax^5+66a^2x^4-63a^3x^3+33a^4x^2-9a^5x+a^6.$$

Operacion.

$$\begin{array}{r|l}
8x^6-36ax^5+66a^2x^4-63a^3x^3+33a^4x^2-9a^5x+a^6 & 2x^2-3ax+a^2 \\
-8x^6+36ax^5-54a^2x^4+27a^3x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad & \overline{12x^4} \\
\hline
+12a^2x^4-36a^3x^3+33a^4x^2-9a^5x+a^6 & \\
-12a^2x^4+36a^3x^3-33a^4x^2+9a^5x-a^6 & \\
\hline
0 \qquad\qquad\qquad\qquad &
\end{array}$$

* **150.** Si la letra principal se halla con un mismo esponente en varios términos, se consideran todos ellos como un solo término: se estrae aparte la raiz del coeficiente del primer término, y se ejecutan tambien aparte las divisiones parciales del coeficiente del segundo término del polinomio y de los coeficientes de los primeros términos de los restos por m veces la potencia del grado $m-1$ del primer término de la raiz.

Polinomios que no tienen raiz exacta.

* **151.** El polinomio no tendrá raiz exacta: 1.° Cuando ordenado con respecto á una cualquiera de sus letras, el primero y último términos no tengan raiz entera exacta. 2.° Cuando el segundo término del polinomio no sea divisible por m veces la potencia del grado $m-1$ del primer término de la raiz. 3.° Cuando el primer término de un resto no es divisible por este divisor.

CAPÍTULO III.

Cálculo de los valores aritméticos de las cantidades radicales, y de las que tienen esponentes fraccionarios.

ARTÍCULO 1.°

Cálculo de los valores aritméticos de las cantidades radicales.

---

152. Se llama cantidad *radical* la raiz indicada de una cantidad (*a*).

Asi, $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{-b}$ son cantidades radicales.

Valor *aritmético* de una cantidad radical es el valor aritmético de la raiz de una cantidad positiva (*Núm.* 118).

En este capítulo solo nos ocuparemos de los valores aritméticos de las cantidades radicales.

Se llaman cantidades radicales *semejantes* las cantidades radicales del mismo índice que tienen bajo del signo radical la misma cantidad. Asi, $2\sqrt{ab}$, $5\sqrt{ab}$ son cantidades radicales semejantes.

153. La suma y la diferencia de las cantidades radicales no semejantes solo pueden indicarse, y no admiten simplificacion; pero si las cantidades radicales son semejantes, se podrán reducir á una sola cantidad radical en virtud de la identidad $am+bm-cm=(a+b-c)m$ demostrada (*Núm.* 18) para cualesquiera valores de a, b, c y m.

Ejemplos. 1.° $3\sqrt[4]{a}+4\sqrt[4]{a}=7\sqrt[4]{a}$.

2.° $5\sqrt[3]{ab}-8\sqrt[3]{ab}=-3\sqrt[3]{ab}$.

A veces las cantidades radicales no semejantes se transforman en otras semejantes, estrayendo la raiz de los factores que la tienen exacta.

Ejemplo. $4a\sqrt[3]{2b}+\sqrt[3]{16a^3b}-\frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6b}=$

$$4a\sqrt[3]{2b}+2a\sqrt[3]{2b}-\frac{5ac}{d}\sqrt[3]{2b}=\frac{a(6d-5c)}{d}\sqrt[3]{2b}.$$

(*a*) Las cantidades radicales se llaman tambien cantidades *irracionales*.

154. *Una cantidad radical no varía, multiplicando su índice por un número entero, y elevando la cantidad que está bajo del signo radical á la potencia del grado indicado por dicho número entero.*

Sea la cantidad radical $\sqrt[m]{a}$: digo que $\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$.

En efecto, segun el teorema (*Núm.* 114),

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn}=\left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^{m}\right)^{n}=a^n;$$

luego $$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}.$$

155. En virtud de este teorema se pueden reducir cantidades radicales de índice diferente á un índice comun; para lo cual, *se multiplica el índice de cada radical por el producto de los índices de los demás radicales, y se eleva la cantidad que está bajo del radical á la potencia del grado indicado por este producto.*

Ejemplo. Las cantidades radicales

$$\sqrt{a},\quad \sqrt[3]{b},\quad \sqrt[5]{c},$$

reducidas á un índice comun, serán

$$\sqrt[30]{a^{15}},\quad \sqrt[30]{b^{10}},\quad \sqrt[30]{c^{6}}.$$

Para reducir á un índice comun varias cantidades radicales, cuando dos ó mas índices tienen factores comunes se hallará su menor múltiplo, se multiplicará el índice de cada radical por el factor que le falta para componer dicho menor múltiplo, y se elevará la cantidad que está bajo del radical á la potencia del grado indicado por dicho factor.

Ejemplo. Sean las cantidades radicales

$$\sqrt{a},\quad \sqrt[4]{b},\quad \sqrt[6]{c}.$$

Como los índices tienen factores comunes, hallaremos su menor múltiplo, que es 12; y por consiguiente las cantidades radicales propuestas, reducidas á este índice comun, serán

$$\sqrt[12]{a^{6}},\quad \sqrt[12]{b^{3}},\quad \sqrt[12]{c^{2}}.$$

156. *Una cantidad radical, en que la cantidad que está bajo del signo radical es un producto, no varía dividiendo el índice y los esponentes de los factores del producto por un divisor comun;* es de-

cir que $\sqrt[mn]{a^{pn}b^{qn}c^{rn}}=\sqrt[m]{a^pb^qc^r}$.

En efecto, $\left(\sqrt[m]{a^pb^qc^r}\right)^{mn}=\left(\left(\sqrt[m]{a^pb^qc^q}\right)^m\right)^n=\left(a^pb^qc^r\right)^n=$ $a^{pn}b^{qn}c^{rn}$; y por consiguiente $\sqrt[m]{a^pb^qc^r}=\sqrt[mn]{a^{pn}b^{qn}c^{rn}}$.

Fundándonos en este teorema, podremos simplificar una cantidad radical, siempre que el índice y los esponentes de los factores del producto, que está bajo del signo radical, tengan un divisor comun; para lo cual se suprimirá este divisor.

Asi, $\sqrt[12]{a^6b^4}=\sqrt[6]{a^3b^2}$.

157. *Para multiplicar cantidades radicales de un mismo índice, se multiplican las cantidades que están bajo de los signos radicales, y el producto se pone bajo del mismo signo radical.*

En efecto, hemos demostrado (*Núm.* 120) que

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{abc}.$$

Ejemplos.

1.° $3\sqrt{2ab^2}\times7\sqrt{5a^3b^2c}=21\sqrt{10a^4b^4c}=21a^2b^2\sqrt{10c}$.

2.° $4\sqrt[3]{a^2-b^2}\times\sqrt[3]{a^2+b^2}=4\sqrt[3]{a^4-b^4}$.

Para multiplicar cantidades radicales de diferente índice, se reducen á un índice comun, y quedará este caso reducido al anterior.

Ejemplos. 1.° $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{a^3b^2}$.

2.° $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}\times\frac{e}{f}\sqrt[n]{\frac{g}{h}}=\frac{ae}{bf}\sqrt[mn]{\frac{c^ng^m}{d^nh^m}}$.

158. *Para partir dos cantidades radicales del mismo índice, se dividen las cantidades que están bajo de los signos radicales, y el cociente se pone bajo del mismo signo radical.*

En efecto, hemos demostrado (*Núm.* 117) que

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

$$\frac{(m\sqrt{b}-n\sqrt{c})}{m^2b-n^2c}.$$

Ejemplos. 1.° $\frac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{3a}}=\sqrt{\frac{6ab}{3a}}=\sqrt{2b}.$

2.° $\frac{\sqrt[5]{a^4b}}{\sqrt[5]{b^3c^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^4b}{b^3c^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^2c^2}}.$

Para dividir cantidades radicales de diferente índice, se reducen á un mismo índice, y quedará este caso reducido al anterior.

Ejemplos. 1.° $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[6]{b^2}}=\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^2}}.$

2.° $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}:\frac{e}{f}\sqrt[n]{\frac{g}{h}}=\frac{af}{be}\sqrt[mn]{\frac{c^n\,h^m}{d^n\,g^m}}.$

159. *Para elevar una cantidad radical á una potencia, se eleva á dicha potencia la cantidad que está bajo del radical.*

Sea la cantidad radical $\sqrt[m]{a}$: digo que $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a^n}$. En efecto,

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\ldots=\sqrt[m]{aaa\ldots}=\sqrt[m]{a^n}.$$

Ejemplos. 1.° $\left(\sqrt[3]{a}\right)^4=\sqrt[3]{a^4}=a\sqrt[3]{a}.$

2.° $\left(\sqrt[6]{a}\right)^3=\sqrt[6]{a^3}=\sqrt{a}.$

3.° $\left(\sqrt[18]{a}\right)^{12}=\sqrt[18]{a^{12}}=\sqrt[3]{a^2}.$

160. *Para estraer una raiz de una cantidad radical, se multiplican los dos índices.*

cir que $\sqrt[mn]{a^{pn}}$

cantidad radical $\sqrt[m]{a}$: digo que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

En ef

efecto, $\left(\sqrt[mn]{a}\right)^n=\sqrt[mn]{a^n}=\sqrt[m]{a}$;

$a^{pn}b$

luego $$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Ejemplos. 1.° $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}}=\sqrt[15]{a^4}$.

2.° $\sqrt{\sqrt[5]{a^2}}=\sqrt[10]{a^2}=\sqrt[5]{a}$.

3.° $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[12]{a^2}=\sqrt[6]{a}$.

161. Siendo $$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}},$$

será $\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}$, $\sqrt[6]{a}=\sqrt[3]{\sqrt{a}}$, $\sqrt[12]{a}=\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}$, etc.

Luego, *para estraer de un número una raiz cuyo índice sea un número compuesto, se estraerán sucesivamente las raices que indican sus factores simples.*

* 162. *Transformar un quebrado, cuyo denominador es irracional de segundo grado, en otro quebrado cuyo denominador sea racional.*

1.° Sea el quebrado $\frac{a}{m\sqrt{b}}$: multiplicando sus dos términos por $\sqrt{b}$, tendremos

$$\frac{a}{m\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{mb}.$$

2.° Sea el quebrado $\frac{a}{m\sqrt{b}+n\sqrt{c}}$: multiplicando sus dos términos por $m\sqrt{b}-n\sqrt{c}$, será

$$\frac{a}{m\sqrt{b}+n\sqrt{c}}=\frac{a(m\sqrt{b}-n\sqrt{c})}{(m\sqrt{b}+n\sqrt{c})(m\sqrt{b}-n\sqrt{c})}=\frac{a(m\sqrt{b}-n\sqrt{c})}{m^2b-n^2c}.$$

Del mismo modo resulta

$$\frac{a}{m\sqrt{b}-n\sqrt{c}}=\frac{a(m\sqrt{b}+n\sqrt{c})}{m^2b-n^2c}.$$

3.° Sea el quebrado $\frac{a}{m\sqrt{b}+n\sqrt{c}+p\sqrt{d}}$: multiplicando sus dos términos por $m\sqrt{b}+n\sqrt{c}-p\sqrt{d}$, será

$$\frac{a}{m\sqrt{b}+n\sqrt{c}+p\sqrt{d}}=\frac{a(m\sqrt{b}+n\sqrt{c}-p\sqrt{d})}{(m^2b+n^2c-p^2d)+2mn\sqrt{bc}},$$

que está ya reducido al caso anterior.

Aun cuando el denominador del quebrado constase de cuatro términos irracionales de 2.° grado, se puede, por transformaciones análogas á las que acabamos de hacer, reducir á quebrado cuyo denominador sea racional.

* 165. Transformar la espresion $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ en otra equivalente de la forma $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$.

Tenemos (*Núm.* 27)

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=2a+2\sqrt{a^2-b},$$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=2a-2\sqrt{a^2-b};$$

por consiguiente

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}},$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}.$$

Luego (*Núm.* 106)

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\frac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}+\frac{1}{2}\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}},$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\frac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}-\frac{1}{2}\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}.$$

ó $$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\ldots\ldots(A),$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\ldots\ldots(B).$$

Esta transformacion será muy útil, si a^2-b es un cuadrado; pues entonces el doble radical $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ se transforma en la suma de dos radicales simples; y el doble radical $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ se transforma en la diferencia de dos radicales simples.

Ejemplos.

1.° $$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

2.° $$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{11-\sqrt{72}}=\sqrt{\frac{11+\sqrt{121-72}}{2}}-\sqrt{\frac{11-\sqrt{121-72}}{2}}=3-\sqrt{2}.$$

3.° $$\sqrt{3+\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}.$$

Artículo 2.°

Cálculo de los valores aritméticos de las cantidades que tienen esponentes fraccionarios.

---

164. Hemos visto (*Núm.* **118**) que $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$, cuando n es divisible por m. Si, cuando n no es divisible por m, convenimos en representar el radical $\sqrt[m]{a^n}$ por $a^{\frac{n}{m}}$, el teorema del número **118** quedará generalizado. Pero téngase entendido que en el caso en que n no es divisible por m, la espresion $a^{\frac{n}{m}}$ no es mas que el radical $\sqrt[m]{a^n}$ escrito de otro modo (*a*):

165. *Las cantidades que tienen esponentes fraccionarios, se calculan del mismo modo que las cantidades que tienen esponentes enteros*; es decir, que *para multiplicar ó dividir cantidades iguales cuyos esponentes son fraccionarios, se suman ó restan los esponentes; para elevar una cantidad que tiene esponente fraccionario á una potencia, se multiplican los dos esponentes; para estraer una raiz de una cantidad de esponente fraccionario, se divide su esponente por el índice de la raiz.*

1.° Tenemos

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[q]{a^p}=$$

$$\sqrt[nq]{a^{mq}}\times\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

2.° $a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$; pues multiplicando $a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$ por $a^{\frac{p}{q}}$, será, segun queda demostrado, $a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}+\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}}$.

3.° $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p=\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p=\sqrt[n]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{n}}$.

4.° $\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}}=a^{\frac{m}{np}}$; pues elevando $a^{\frac{m}{np}}$ á la potencia cuyo grado es p, resulta, segun se ha demostrado en el 3.er caso, $a^{\frac{m}{n}}$.

En virtud de estos teoremas, las cantidades radicales se podrán calcular, trasformándolas en cantidades con esponente fraccionario, y siguiendo despues las reglas generales.

Ejemplo. $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{b^2}=a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{3}{6}}\times b^{\frac{4}{6}}=\sqrt[6]{a^3b^4}$.

(*a*) Algunos autores pretenden demostrar la igualdad $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$ aun cuando n no sea divisible por m: pretenden un imposible; y asi es que en su demostracion cometen un círculo vicioso.

NOTA. El cálculo de las cantidades que tienen esponentes fraccionarios negativos, está sometido á las mismas reglas, en virtud del convenio $a^{-\alpha} = \frac{1}{a^{\alpha}}$.

CAPÍTULO IV.

Cálculo de las cantidades imáginarias de segundo grado.

---

167. Ya hemos dicho (*Núm.* 116) que se llama cantidad imaginaria la raiz de grado par de una cantidad negativa.

Entre las cantidades imaginarias las mas importantes son las de segundo grado, es decir las raices cuadradas de cantidades negativas; pues á ellas pueden reducirse, como se verá en el álgebra superior, todas las demás. Por consiguiente, cuanto en este capítulo digamos acerca de las cantidades imaginarias, se referirá á las imaginarias de segundo grado.

Como la raiz cuadrada de una cantidad puede ser positiva ó negativa, escribiremos en adelante, para evitar confusion, sin signo ó precedida del signo $+$ la raiz imaginaria positiva, y precedida del signo $-$ la raiz imaginaria negativa. Asi, $\sqrt{-3}$, $+\sqrt{-3}$ son imaginarias positivas, y $-\sqrt{-3}$ es imaginaria negativa.

Segun la definicion de raiz cuadrada, tendremos

$$\left(\sqrt{-3}\right)^2 = -3,\ \left(-\sqrt{-3}\right)^2 = -3,$$

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1,\ \left(-\sqrt{-1}\right)^2 = -1.$$

168. *Todo monomio imaginario es igual á la raiz cuadrada aritmética del valor absoluto de la cantidad que está bajo del radical, multiplicada por* $\sqrt{-1}$.

Sea el monomio imaginario $\sqrt{-9}$; digo que es igual á $3\sqrt{-1}$: pues $(3\sqrt{-1})^2 = 9 \times (\sqrt{-1})^2 = 9 \times -1 = -9$.

NOTA. Obsérvese que $-3\sqrt{-1}$ elevado al cuadrado da tambien -9; pero como $\sqrt{-9}$ es, segun convenio, la raiz cuadrada positiva de -9, no puede ser igual á $-3\sqrt{-1}$, que es cantidad imaginaria negativa.

169. *Todo binomio* $a+b\sqrt{-1}$, *cuyos términos son uno real y otro imaginario, es una cantidad imaginaria;* pues si dicho binomio fuese una cantidad real c, sacaríamos en consecuencia $b\sqrt{-1}=c-a$, es decir, una cantidad imaginaria igual á una real; lo que es absurdo.

170. Se llama *suma*, *diferencia*, *producto* ó *cociente* de dos cantidades imaginarias, los resultados respectivos hallados aplicando á estas cantidades las reglas del cálculo de las cantidades reales.

La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos binomios imaginarios $a+b\sqrt{-1}$, $c+d\sqrt{-1}$ *es, en general, un binomio imaginario; pero tambien puede ser un monomio imaginario ó una cantidad real.*

1.° La suma es $(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$... (1), espresion que es un binomio imaginario en general; pero si $a+c=0$, dicha espresion se convierte en el monomio imaginario $(b+d)\sqrt{-1}$; y si $b+d=0$, la misma espresion se convierte en la cantidad real $a+c$.

2.° La diferencia es $(a-c)+(b-d)\sqrt{-1}$... (2), que en general es un binomio imaginario; pero si $a-c=0$, será un monomio imaginario; y si $b-d=0$, será la cantidad real $a-c$.

3.° El producto

$$\left(a+b\sqrt{-1}\right)\left(c+d\sqrt{-1}\right)=\left(ac-bd\right)+\left(bc+ad\right)\sqrt{-1}\ldots(3),$$

espresion que en general es un binomio imaginario; pero si $ac-bd=0$, lo que puede verificarse de infinitos modos, dicha espresion se convierte en el monomio imaginario $(bc+ad)\sqrt{-1}$; y si $bc+ad=0$, se convierte en la cantidad real $ac-bd$.

Ejemplos. 1.° Hallar el producto $\left(a+b\sqrt{-1}\right)\left(a-b\sqrt{-1}\right)$.

Para hallar este producto por la fórmula (3), haremos en ella $c=a$, $d=-b$, y por consiguiente el producto será

$$a^2+b^2+(ab-ab)\sqrt{-1}=a^2+b^2,$$

resultado que se hallará directamente aplicando al producto propuesto un teorema muy conocido: tendremos, segun él,

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2-\left(b\sqrt{-1}\right)^2=a^2-(-b^2)=a^2+b^2.$$

2.° $\sqrt{-A}\times\sqrt{-B}=\sqrt{A}\sqrt{-1}\times\sqrt{B}\sqrt{-1}$: para hallar el resultado final por la fórmula (3), haremos en esta fórmula $a=0$, $b=\sqrt{A}$, $c=0$, $d=\sqrt{B}$; luego el producto será $-\sqrt{A}.\sqrt{B}=-\sqrt{AB}$, es decir que

$$\sqrt{-A}\times\sqrt{-B}=-\sqrt{AB};$$

resultado que hallaremos directamente como sigue:

$$\sqrt{-A}=\sqrt{A}.\sqrt{-1},$$

$$\sqrt{-B}=\sqrt{B}.\sqrt{-1};$$

luego $$\sqrt{-A}\times\sqrt{-B}=\sqrt{A}.\sqrt{-1}\times\sqrt{B}.\sqrt{-1},$$

ó $$\sqrt{-A}\times\sqrt{-B}=\sqrt{AB}\times\left(\sqrt{-1}\right)^2=-\sqrt{AB}\ (a).$$

4.° El cociente

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}\ldots.[1],$$

(a) Acabamos de hallar la igualdad $\sqrt{-A}\times\sqrt{-B}=-\sqrt{AB}$; mas si hallamos el producto $\sqrt{-A}\times\sqrt{-B}$ por el teorema (120), demostrado para las raices aritméticas, será $\sqrt{-A}\times\sqrt{-B}=\sqrt{AB}$..... (1); resultado que parece está en contradiccion con el anterior.

Para esplicar esta especie de paradoja, observaremos que $-A$ tiene dos raices cuadradas $\sqrt{A}\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{A}\sqrt{-1}$, que $-B$ tiene dos raices cuadradas $\sqrt{B}\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{B}\sqrt{-1}$, y que AB tiene tambien dos raices cuadradas $\sqrt{AB}$ y $-\sqrt{AB}$: si multiplicamos cada valor de la raiz cuadrada de $-A$ por cada uno de la raiz cuadrada de $-B$, hallaremos los resultados siguientes: $-\sqrt{AB}$ y $\sqrt{AB}$, que son los dos valores de la raiz cuadrada de AB; luego la fórmula (1) es cierta, si suponemos que $\sqrt{-A}$, $\sqrt{-B}$ y $\sqrt{AB}$ representan respectivamente cualquiera de las dos raices cuadradas de $-A$, $-B$ y AB. Pero en el texto, cuando hemos escrito $\sqrt{-A}$, $\sqrt{-B}$ ó sus iguales $\sqrt{A}\sqrt{-1}$, $\sqrt{B}\sqrt{-1}$, no hemos considerado mas que los valores positivos de $\sqrt{-A}$ y $\sqrt{-B}$, que son $+\sqrt{A}\sqrt{-1}$ y $+\sqrt{B}\sqrt{-1}$, y en esta suposicion el producto de ambas cantidades imaginarias es $-\sqrt{AB}$, es decir la raiz real negativa de AB

binomio imaginario; que se reducirá á monomio imaginario, siempre que $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}=0$, ó $ac+bd=0$; y será una cantidad real, si $\frac{bc-ad}{c^2+d^2}=0$, ó $bc-ad=0$.

Ejemplo. $\frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{-B}}=\frac{\sqrt{A}\sqrt{-1}}{\sqrt{B}\sqrt{-1}}$: si queremos hallar el resultado final por la fórmula (4), haremos en ella $a=0$, $b=\sqrt{A}$, $c=0$, $d=\sqrt{B}$; luego el cociente será $\frac{\sqrt{A}\sqrt{B}}{B}=\frac{\sqrt{A}\sqrt{B}}{\sqrt{B}\sqrt{B}}$ $=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A}{B}}$.

Para hallar este cociente directamente, tenemos

$$\frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{-B}}=\frac{\sqrt{A}\sqrt{-1}}{\sqrt{B}\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A}{B}}.$$

171. Las definiciones de potencia y raiz de una cantidad imaginaria son las mismas que las definiciones de potencia y raiz de una cantidad real.

Hallemos las potencias sucesivas de $\sqrt{-1}$.

Tenemos

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^2=-1,$$
$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}=-\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2=-1\times-1=1.$$

Estos cuatro valores $\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$, 1 de las cuatro primeras potencias de $\sqrt{-1}$ resultan tambien para las potencias superiores de $\sqrt{-1}$.

Asi, $(\sqrt{-1})^{11}=(\sqrt{-1})^4\cdot(\sqrt{-1})^4\cdot(\sqrt{-1})^3=$
$(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$.

172. *Una potencia cualquiera del binomio imaginario* $a+b\sqrt{-1}$ *es, en general, un binomio imaginario; pero tambien puede ser un monomio imaginario ó una cantidad real.*

Tenemos por la fórmula del binomio

$$(a+b\sqrt{-1})^m=a^m+ma^{m-1}b\sqrt{-1}+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}\left(b\sqrt{-1}\right)^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}\left(b\sqrt{-1}\right)^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}$$
$$a^{m-4}\left(b\sqrt{-1}\right)^4+\ldots.$$

ó bien

$$\left(a+b\sqrt{-1}\right)^m=a^m-\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}$$
$$a^{m-4}b^4+\ldots.+\left(ma^{m-1}b-\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}b^3+\ldots\right)\sqrt{-1}.$$

Resulta pues un binomio imaginario; pero se reducirá á monomio imaginario, si el término real es cero, lo que puede ser de infinitos modos, y será una cantidad real, si es cero el coeficiente de $\sqrt{-1}$, lo que tambien puede ser de infinitos modos.

*173. *Una raiz cualquiera de un binomio imaginario* $a+b\sqrt{-1}$ *es siempre un binomio imaginario.*

Por ahora solo demostraremos este teorema para la raiz cuadrada, dejando para el álgebra superior la demostracion general.

Tenemos $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=\sqrt{a+\sqrt{-b^2}}$.
poniendo en la fórmula

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

en lugar de b $-b^2$, tendremos

$$\sqrt{a+\sqrt{-b^2}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}},$$

ó (*Núm.* 165)

$$\sqrt{a+\sqrt{-b^2}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\cdot\sqrt{-1}\ldots(K),$$

binomio imaginario mientras, segun la suposicion, b no sea cero.

Corolario. *Una cantidad imaginaria de 4.° grado puede transformarse en cantidad imaginaria de 2.° grado.*

Sea la cantidad imaginaria $\sqrt[4]{-b^2}$: tenemos

$$\sqrt[4]{-b^2}=\sqrt{\sqrt{-b^2}};$$

pues elevando el segundo miembro á la cuarta potencia, será

$$\left(\sqrt{\sqrt{-b^2}}\right)^4=\left(\left(\sqrt{\sqrt{-b^2}}\right)^2\right)^2=\left(\sqrt{-b^2}\right)^2=-b^2.$$

Esto supuesto, $\sqrt{\sqrt{-b^2}}=\sqrt{0+\sqrt{-b^2}}$; luego si en la fórmula (K) hacemos $a=0$, será $\sqrt{0+\sqrt{-b^2}}$, ó

$$\sqrt[4]{-b^2}=\sqrt{\frac{b}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}\sqrt{-1},$$

cantidad imaginaria de segundo grado.

* 174. Las cantidades imaginarias $a+b\sqrt{-1}$ y $a-b\sqrt{-1}$, que solo se diferencian en el signo del coeficiente de $\sqrt{-1}$, se llaman cantidades imaginarias *conjugadas*.

Las raices cuadradas de dos cantidades imaginarias conjugadas son tambien imaginarias conjugadas.

En efecto, tenemos (*Núm.* 173)

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.\sqrt{-1};$$

y del mismo modo que hemos hallado esta fórmula, hallaríamos

$$\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.\sqrt{-1};$$

lo que demuestra la verdad del teorema.

175. *Si tenemos la igualdad* $A+B\sqrt{-1}=0$, *será necesariamente* $A=0, B=0$.

En efecto, de dicha igualdad resulta $A=-B\sqrt{-1}$, y elevando esta al cuadrado, es $A^2=-B^2$ ó $A^2+B^2=0$; y por consiguiente $A=0$, $B=0$, pues la suma de dos cantidades positivas no puede ser 0, á menos que lo sean dichas dos cantidades.

Corolario. *Si tenemos la igualdad* $a+b\sqrt{-1}=a'+b'\sqrt{-1}$, *será* $a=a'$, $b=b'$.

En efècto, de esta igualdad resulta esta otra

$$(a-a')+(b-b')\sqrt{-1}=0,$$

y por consiguiente, segun el teorema, $a-a'=0$, $b-b'=0$, ó $a=a'$, $b=b'$.

176. Si el producto de varios factores reales es cero, uno por lo menos de dichos factores lo es tambien, pues claro es que si ninguno de los varios factores reales de un producto es cero, el producto tampoco lo es. Pero cuando los factores de un producto son imaginarios, se puede dudar que, despues de efectuada la multiplicacion, los términos del producto se destruyan unos con otros, y el resultado final sea cero, sin que lo sea ninguno de los factores. Necesita pues demostracion la proposicion siguiente.

Si un producto de varios factores imaginarios es cero, uno por lo menos de dichos factores será cero.

Consideremos en primer lugar el producto de dos factores imaginarios, y sea $(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=0$: digo que si uno de estos factores, por ejemplo el $c+d\sqrt{-1}$ no es cero, lo será necesariamente el otro factor $a+b\sqrt{-1}$.

En efecto, si el factor $c+d\sqrt{-1}$ no es cero, tendremos estos tres casos: 1.° $c=0$ y d diferente de cero; 2.° c diferente de cero y $d=0$; 3.° c y d diferentes de cero.

1.° Si $c=0$ y d no lo es, tendremos $(a+b\sqrt{-1})d\sqrt{-1}=0$, ó $ad\sqrt{-1}-bd=0$: luego (*Núm.* 175) $ad=0$, $bd=0$; y puesto que d no es cero, será $a=0$, $b=0$, y por consiguiente $a+b\sqrt{-1}=0$.

3.° Si c no es cero y d lo es, tendremos $(a+b\sqrt{-1})c=0$, ó $ac+bc\sqrt{-1}=0$, y por consiguiente $ac=0$, $bc=0$; y como c no es cero, será $a=0$, $b=0$, y por tanto $a+b\sqrt{-1}=0$.

3.° Efectuando la multiplicacion, tendremos

$$(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}=0;$$

luego $ac-bd=0$, $ad+bc=0$, ó bien $ac=bd$, $ad=-bc$: multiplicando ordenadamente estas dos igualdades, y suprimiendo el factor comun cd que no es cero, resulta $a^2=-b^2$, ó $a^2+b^2=0$; por consiguiente $a=0$, $b=0$, y por tanto $a+b\sqrt{-1}=0$.

Queda pues demostrado, que si el producto de dos factores imaginarios es cero, lo es alguno de dichos factores; y por consiguiente si ninguno de los dos factores imaginarios es cero, el producto tampoco lo es.

Consideremos ahora un producto de un número cualquiera de factores imaginarios; de cuatro por ejemplo, y sea

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})(e+f\sqrt{-1})(g+h\sqrt{-1})=0:$$

digo que alguno de dichos factores es cero.

Pues si ninguno de estos factores fuese cero, el producto de los dos primeros no seria cero, segun el primer caso; y como este producto tiene la forma $p+q\sqrt{-1}$, espresion en la cual puede ser $p=0$ ó $q=0$, el producto propuesto seria $(p+q\sqrt{-1})(c+f\sqrt{-1})(g+h\sqrt{-1})=0$. No siendo cero ninguno de los dos primeros factores, su producto $p'+q'\sqrt{-1}$, en que tambien podrá ser $p'=0$ ó $q'=0$, no seria cero; y el producto propuesto seria $(p'+q'\sqrt{-1})(g+h\sqrt{-1})=0$: y no siendo cero ninguno de estos factores, el producto no seria cero, contra lo supuesto; luego alguno de los factores tiene que ser cero.

LIBRO QUINTO.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

CAPÍTULO I.

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Artículo 1°.

Ecuaciones incompletas de segundo grado.

177. Se llama ecuacion *completa* de segundo grado la ecuacion de segundo grado que contiene uno ó mas términos en que el esponente de la incógnita es 2, uno ó mas términos en que el esponente de la incógnita es 1, y uno ó mas términos conocidos.

Ecuacion *incompleta* de segundo grado es la ecuacion de segundo grado que carece de términos en que el esponente de la incógnita es 1, ó que carece de términos conocidos.

La ecuacion incompleta de segundo grado, despues de quitar los denominadores, efectuar las operaciones indicadas, transponer y reducir, tiene evidentemente una de estas dos formas: $ax^2=b$, $ax^2+bx=0$.

178. Para resolver la ecuacion $ax^2=b$, dividiremos ambos miembros por a, y será $x^2=\frac{b}{a}$. Estrayendo ahora la raiz cuadrada de ambos miembros, será $\pm x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, ó bien,

$$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}, \quad -x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Mudando en esta segunda ecuacion los signos de ambos miembros, será $x=\mp\sqrt{\frac{b}{a}}$, y esta ecuacion nos da para x dos valores idénticos á los que da la ecuacion $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Luego, *al estraer la raiz cuadrada de los dos miembros de una ecuacion, no hay necesidad de poner el signo $\pm$ mas que á un solo miembro.*

Para comprobar los valores $\sqrt{\frac{b}{a}}$ y $-\sqrt{\frac{b}{a}}$ de x, se sustituyen en la ecuacion propuesta.

Sustituyendo el primero será

$$a\times\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=b, \text{ ó } a\times\frac{b}{a}=b;$$

lo que es cierto.

Sustituyendo el segundo, será

$$a\times\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=b, \text{ ó } a\times\frac{b}{a}=b.$$

Es fácil ver que la ecuacion propuesta no puede verificarse por ningun otro valor diferente de $\sqrt{\frac{b}{a}}$ y de $-\sqrt{\frac{b}{a}}$, pues dicho valor elevado al cuadrado daria un número diferente de $\frac{b}{a}$, el cual multiplicado por a daria un producto diferente de b. Luego *en la ecuacion* $ax^2=b$ *la incógnita tiene dos valores iguales y de signo contrario.*

* A este mismo resultado podemos llegar de otro modo.

Siendo $ax^2=b$, será, dividiendo ambos miembros por a,

$$x^2=\frac{b}{a}, \quad \text{ó} \quad x^2-\frac{b}{a}=0:$$

considerando ahora á $\frac{b}{a}$ como el cuadrado de $\sqrt{\frac{b}{a}}$, el primer miembro de la última ecuacion será igual á

$$\left(x+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{b}{a}}\right);$$

luego dicha ecuacion será

$$\left(x+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=0.$$

El primer miembro de esta ecuacion será 0, si lo es cualquiera de sus factores, y no lo será en caso contrario ; luego la ecuacion quedará satisfecha en los dos únicos casos:

$$x+\sqrt{\frac{b}{a}}=0,\ x-\sqrt{\frac{b}{a}}=0,$$

de donde $$x=-\sqrt{\frac{b}{a}},\ x=\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Luego *la incógnita de la ecuacion* $ax^2=b$ (que, como veremos mas adelante, es un caso particular de las ecuaciones binomias) *tiene dos valores iguales y de signo contrario, y no puede tener mas.*

179. Para resolver la ecuacion $ax^2+bx=0$, parto ambos miembros por a, y será

$$x^2+\frac{b}{a}x=0,\ \text{ó}\ x\left(x+\frac{b}{a}\right)=0.$$

Este producto será cero, solo en los casos en que $x=0$ y $x+\frac{b}{a}=0$. De esta última ecuacion resulta $x=-\frac{b}{a}$.

Luego *en la ecuacion* $x^2+\frac{b}{a}x=0$ *un valor de* x *es cero, y el otro es el coeficiente del segundo término mudado el signo.*

Artículo 2.°

Ecuacion completa de segundo grado.

18. Toda ecuacion completa de segundo grado, despues de quitar los denominadores, efectuar las operaciones indicadas, pasar todos los términos á un miembro, y reducirlos, tiene la forma

$$ax^2+bx+c=0,$$

la cual, dividiendo ambos miembros por a, será

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Haciendo para mayor sencillez $\frac{b}{a}=m$, $\frac{c}{a}=n$, dicha ecuacion será $$x^2+mx+n=0,$$
en la cual m y n pueden ser cantidades positivas ó negativas.

Para resolver esta ecuacion, pueden seguirse varios métodos, de lo que nosotros espondremos tres.

181. 1.er *Método*. Pasando n al segundo miembro, será
$$x^2+mx=-n \qquad (1).$$
Observemos que el primer miembro de esta ecuacion consta de los dos primeros términos del cuadrado del binomio $x+\frac{m}{2}$, pues dicho cuadrado es $\left(x+\frac{m}{2}\right)^2=x^2+mx+\frac{m^2}{4}$; luego, si añadimos á los dos miembros de la ecuacion (1) el tercer término $\frac{m^2}{4}$ de este cuadrado, tendremos una nueva ecuacion, equivalente á la propuesta, cuyo primer miembro será el cuadrado del binomio $x+\frac{m}{2}$; y por tanto, estrayendo en seguida la raiz cuadrada de ambos miembros, quedará reducida la ecuacion á una de primer grado, que ya sabemos resolver.

Tendremos, pues,
$$x^2+mx+\frac{m^2}{4}=\frac{m^2}{4}-n, \text{ ó } \left(x+\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2}{4}-n \qquad (2);$$
y por consiguiente $$x+\frac{m}{2}=\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n},$$
de donde resulta $$x=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n} \qquad (3).$$
Vemos que x tiene los valores
$$-\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-n} \quad \text{y} \quad -\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-n};$$
y no puede tener mas valores: pues si x tuviese tres valores, $x+\frac{m}{2}$, incógnita de la ecuacion (2), tendria tam-

bien tres valores; lo que, segun se ha demostrado (*Núm.* 178), es imposible.

Del mismo modo que acabamos de resolver la ecuacion

$$x^2+mx+n=0,$$

se podrá resolver una ecuacion particular cualquiera, que tenga la misma forma; pero como las ecuaciones de segundo grado ocurren frecuentemente, conviene formar una regla, traduciendo al lenguaje vulgar la fórmula (3).

Hé aquí la regla: *en toda ecuacion de segundo grado, reducida á la forma* $x^2+mx+n=0$, *la incógnita es igual á la mitad del coeficiente del segundo término mudado el signo*, $\pm$ *la raiz cuadrada del cuadrado de dicha mitad sumado con el tercer término mudado el signo* (a).

Ejemplos. 1.° Sea la ecuacion

$$\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{5}=\frac{1}{5}-\frac{x}{6}.$$

Quitando denominadores, transponiendo y reduciendo, será

$$15x^2-13x-6=0.$$

Partiendo ambos miembros por 15, será

$$x^2-\frac{13}{15}x-\frac{6}{15}=0;$$

y por consiguiente

$$x=\frac{13}{30}\pm\sqrt{\frac{169}{30^2}+\frac{6}{15}}=\frac{13}{30}\pm\sqrt{\frac{169+6.60}{30^2}}=\frac{13}{30}\pm\frac{23}{30}.$$

Separando los dos valores de x, el primero será $\frac{13}{30}+\frac{23}{30}=\frac{6}{5}$,

---

(a) No hay ningun inconveniente en seguir esta misma regla en la resolucion de la ecuacion incompleta $ax^2+bx=0$, la cual puede considerarse como ecuacion completa de segundo grado, cuyo tercer término es 0; pues partiendo esta ecuacion por a, tendremos $x^2+\frac{b}{a}x=0$, y por consiguiente $x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{b}{2a}$: separando estos dos valores, tendremos $x=0, x=-\frac{b}{a}$, los mismos que hemos hallado directamente en el número 178.

y el segundo $\frac{15}{30}-\frac{25}{30}=-\frac{1}{3}$, como es fácil comprobar, sustituyendo estos valores en la ecuacion en vez de x.

2.° Sea la ecuacion $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=1$.

Quitando denominadores, transponiendo y reduciendo, será

$$x^2-x-1=0.$$

Por consiguiente

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Luego los dos valores de x son $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

182. Se llaman *raices* de una ecuacion de segundo grado los dos valores de la incógnita que satisfacen á la ecuacion.

Teorema. *La suma de las raices de la ecuacion de segundo grado* $x^2+mx+n=0$ *es igual al coeficiente del segundo término mudado el signo, y su producto es igual al tercer término.*

En efecto, hemos visto que los dos valores que tiene x en la ecuacion

$$x^2+mx+n=0,$$

son

$$-\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-n} \text{ y } -\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}.$$

Sumándolos, resulta $-m$. Multiplicándolos, será (*Núm.* 31)

$$\left(-\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}\right)\left(-\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}\right)=\left(-\frac{m}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}\right)^2=\frac{m^2}{4}-\left(\frac{m^2}{4}-n\right)=\frac{m^2}{4}-\frac{m^2}{4}+n=n.$$

Recíproco. *Si la suma de dos cantidades es* $-m$, *y su producto es* n, *estas dos cantidades son raices de la ecuacion* $x^2+mx+n=0$.

Sean r y s dichas cantidades: tendremos

$$r+s=-m,\ rs=n;$$

y eliminando la s entre ambas, para lo cual despejo la s en la primera y sustituyo su valor en la segunda, resultará

$$r^2+mr+n=0,$$

es decir que r satisface á la ecuacion propuesta, ó es raiz de esta ecuacion. Del mismo modo se demuestra que s es tambien raiz de la ecuacion propuesta.

* **183.** 2.° *Método.* Tenemos

$$x^2+mx+n=x^2+mx+\frac{m^2}{4}+n-\frac{m^2}{4}=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2-\left(\frac{m^2}{4}-n\right);$$

y como la diferencia de dos cuadrados es igual á la suma de las cantidades multiplicada por su diferencia, será

$$x^2+mx+n=\left(x+\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}\right)\left(x+\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}\right).$$

Ahora bien, la ecuacion

$$x^2+mx+n=0$$

es idéntica á la ecuacion

$$\left(x+\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}\right)\left(x+\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}\right)=0;$$

luego resolviendo esta ecuacion, habremos resuelto la ecuacion propuesta.

El primer miembro de la última ecuacion será cero, cuando sea cero cualquiera de sus factores, es decir, cuando

$$x+\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}=0, \text{ de donde } x=-\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-n},$$

$$\text{y cuando } x+\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}=0, \text{ ó } x=-\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}.$$

Dicho primer miembro no puede ser cero, si no lo es alguno de sus factores (*Núm.* 175); luego los valores hallados para x son los únicos que satisfacen á la ecuacion, y son los mismos que hemos hallado por el otro método.

* Nota. Hemos hallado la identidad

$$x^2+mx+n=\left(x+\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}\right)\left(x+\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{2}-n}\right),$$

la cual puede escribirse asi:

$$x^2+mx+n=\left(x-\left(-\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}\right)\right)\left(x-\left(-\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}\right)\right).$$

Luego *el trinomio* x^2+mx+n *es igual al producto de dos binomios, cuyo primer término es* x, *y los segundos son las raices de la ecuacion* $x^2+mx+n=0$ *tomadas con signo contrario.*

Ejemplo. Descomponer el trinomio $3x^2+6x-20$ en el producto de dos factores binomios.

Este trinomio equivale á $3\left(x^2+2x-\frac{20}{3}\right)$. Las raices de la ecuacion $x^2+2x-\frac{20}{3}=0$ son $-1+\sqrt{\frac{23}{3}}$, $-1-\sqrt{\frac{23}{3}}$; luego dicho trinomio equivale á $3\left(x+1-\sqrt{\frac{23}{3}}\right)\left(x+1+\sqrt{\frac{23}{3}}\right)$.

* **184.** 3.er *Método.* Este método se funda en las propiedades de las raices de la ecuacion de segundo grado (*Núm.* **182**); y por lo tanto, para evitar un círculo vicioso, tenemos que demostrar dichas propiedades independientemente de la resolucion de la ecuacion. Para esto, antepondremos el teorema siguiente.

* **185.** *Si la ecuacion* $x^2+mx+n=0$ *tiene una raiz* a, *tambien tiene otra* $-a-m$.

En efecto, siendo a la raiz de la ecuacion, será

$$a^2+ma+n=0,$$

de donde sale $\quad n=-a^2-ma.$

Sustituyendo este valor en la ecuacion propuesta, tendremos

$$x^2+mx-a^2-ma=0,$$

ó $$(x+a)(x-a)+m(x-a)=0,$$

ó $$(x-a)(x+a+m)=0,$$

ecuacion idéntica á la propuesta, de la cual solo se diferencia en la forma. Esta ecuacion quedará satisfecha, siendo

$x-a=0$ ó $x=a$, y siendo $x+a+m=0$ ó $x=-a-m$.

Esto supuesto, sumemos las dos raices a y $-a-m$, y resulta $-m$; y multiplicándolas, resulta $-a^2-ma$, que es el valor de n.

* **186.** Demostradas ya las propiedades de las raices de la ecuacion $x^2+mx+n=0$, pasemos á resolver esta ecuacion.

Sean x' y x'' las raices de la ecuacion

$$x^2+mx+n=0:$$

tendremos, segun se acaba de demostrar,

$$x'+x''=-m,$$
$$x'x''=n.$$

Elevando al cuadrado la primera ecuacion, será

$$x'^2+2x'x''+x''^2=m^2.$$

Restando de esta ecuacion el cuádruplo de la $x'x''=n$, que es $4x'x''=4n$, será $x'^2+x''^2-2x'x''=m^2-4n$;
ó bien $(x'-x'')^2=m^2-4n$,

y por consiguiente $x'-x''=\sqrt{m^2-4n}$ (a).
Luego (*Núm.* 105)

$$x'=-\frac{m}{2}+\frac{\sqrt{m^2-4n}}{2}=-\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-n},$$

$$x''=-\frac{m}{2}-\frac{\sqrt{m^2-4n}}{2}=-\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}.$$

CAPÍTULO II.

Ecuaciones bicuadradas.

* 187. Se llama ecuacion *bicuadrada* la ecuacion que despues de las operaciones comunes tienen la forma

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Para resolverla, haremos $x^2=y$; y entonces dicha ecuacion será $ay^2+by+c=0$.

Resolviendo esta ecuacion, resulta $y=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Ahora, siendo $x^2=y$, es $x=\pm\sqrt{y}$, y poniendo en vez de y sus valores, será

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Separando los cuatro valores incluidos en esta fórmula, tendremos:

(a) Suponemos que $x'>x''$; si se quiere, se puede suponer lo contrario.

$$x=\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\quad x=\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$x=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\quad x=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

El 1.° y 3.° de estos cuatro valores son iguales y de signo contrario; como tambien el 2.° y 4.°.

Veamos cuándo estos valores se podrán transformar en la suma ó diferencia de dos radicales simples.

Tomemos el primer valor de x, que puede escribirse asi:

$$\sqrt{-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}}.$$

Hemos visto (*Núm.* 163) que el doble radical $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ se transforma en la suma de dos radicales simples, siempre que A^2-B sea un cuadrado. Actualmente $A=-\frac{b}{2a}$, $B=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$; y por consiguiente $A^2-B=\frac{c}{a}$: luego el primer valor de x se transformará en la suma de dos radicales simples, cuando $\frac{c}{a}$ sea un cuadrado.

El tercer valor de x solo se diferencia del primero en el signo, y por tanto resultará la misma condicion para que dicho tercer valor se pueda transformar en la suma de dos radicales simples.

Respecto de los valores 2.° y 4.° se verá del mismo modo que siempre que $\frac{c}{a}$ sea un cuadrado, se podrá descomponer cada uno en la diferencia de dos radicales simples.

CAPÍTULO III.

Resolucion de dos ecuaciones que no pasan del segundo grado, cada una con dos incógnitas.

---

* 188. Toda ecuacion de segundo grado con dos incógnitas, despues quitar los denominadores, efectuar las opera-

ciones indicadas, pasar al primer miembro todos los términos y hacer la reduccion, tiene la forma

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0,$$

en la que podrá suceder que algunos de sus coeficientes sean iguales á cero.

Para resolver dos ecuaciones que no pasen del segundo grado, cada una con dos incógnitas, distinguiremos dos casos: 1.° que por lo menos una de las dos ecuaciones sea de primer grado con respecto á una de las incógnitas; 2.° que las dos ecuaciones sean de segundo grado con respecto á las dos incógnitas.

1.er *caso*. En la ecuacion de primer grado, relativamente á una incógnita, se despeja esta incógnita y se sustituye su valor en la otra ecuacion; con lo que la incógnita que se despejó, quedará eliminada. Se resuelve la ecuacion resultante, y en seguida se hallarán fácilmente los valores de la incógnita que se eliminó.

Ejemplos. 1.°

$$y^2-xy+8=0,$$
$$y-x+1=0.$$

Despejando la x en la segunda ecuacion, será $x=y+1$: sustituyendo este valor en la primera ecuacion, resulta $-y+8=0$, de donde $y=8$, y por consiguiente $x=9$.

2.°

$$y^2-2xy+8=0,$$
$$y-x+1=0.$$

Despejando la x en la segunda ecuacion, es $x=y+1$; sustituyendo este valor en la primera, resulta

$$y^2+2y-8=0.$$

Esta ecuacion da para y los siguientes valores $y=-4$, $y=2$; los valores correspondientes de x son $x=-3$, $x=3$. De modo que las dos ecuaciones propuestas tienen las dos soluciones:

$$y=2,\ x=3;$$
$$y=-4,\ x=-3.$$

3.°

$$y^2-5xy+8=0,$$
$$y^2-x+1=0.$$

Despejando la x en la segunda ecuacion, será $x=y^2+1$; Sustituyendo en la primera, resulta

$$y^2-5y(y^2+1)+8=0,$$
$$y^2-5y^3-5+8=0,$$
$$5y^3-y^2+5y-8=0,$$

ecuacion de tercer grado, cuya resolucion corresponde al álgebra superior.

4.° $$y^2-x^2+8=0,$$
$$y^2-x+1=0.$$

Despejando la x en la segunda ecuacion, es $x=y^2+1$; sustituyendo en la primera, resulta la ecuacion bicuadrada

$$y^4+y^2-7=0.$$

Resolviéndola, será $$y^2=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{29}{4}}.$$

Separando estos dos valores de y^2, tendremos

$$y^2=\frac{-1+\sqrt{29}}{2},\ y^2=\frac{-1-\sqrt{29}}{2};$$

y por consiguiente

$$y=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{29}}{2}},\quad y=-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{29}}{2}},$$

$$y=\sqrt{\frac{-1-\sqrt{29}}{2}},\quad y=-\sqrt{\frac{-1-\sqrt{29}}{2}}.$$

Los valores correspondientes de x son $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{29}}{2}$.

De modo que las ecuaciones propuestas tienen las cuatro soluciones siguientes:

$$y=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{29}}{2}},\quad x=\frac{1+\sqrt{29}}{2},$$

$$y=-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{29}}{2}},\quad x=\frac{1+\sqrt{29}}{2},$$

$$y=\sqrt{\frac{-1-\sqrt{29}}{2}},\quad x=\frac{1-\sqrt{29}}{2},$$

$$y=-\sqrt{\frac{-1-\sqrt{29}}{2}},\quad x=\frac{1-\sqrt{29}}{2}.$$

5.° $$y^2+xy+x^2+y-x-2=0,$$
$$2y^2+2y+2x-3=0.$$

Despejando la x en la segunda ecuacion, será

$$x=\frac{5-2y-2y^2}{2},$$

sustituyendo este valor en la primera, y simplificando, resulta

$$4y^4+4y^3-4y^2+2y-5=0,$$

ecuacion de cuarto grado, cuya resolucion corresponde al álgebra superior.

2.º *caso.* Si las dos ecuaciones son de segundo grado con respecto á las dos incógnitas, se elimina uno de los cuadrados, y resultará una ecuacion de primer grado con respecto á la incógnita cuyo cuadrado se haya eliminado, ó quizá con respecto á las dos incógnitas; y por consiguiente la cuestion está reducida al primer caso.

Ejemplo.
$$\begin{aligned} 3y^2+x^2-5y+2x-1&=0,\\ 6y^2+2x^2-3y+8x-5&=0. \end{aligned}$$

Eliminando el cuadrado x^2, tendré

$$7y+4x-3=0.$$

Ahora será fácil continuar la resolucion de las dos ecuaciones.

* 189. *Eliminando una incógnita entre dos ecuaciones, que no pasen del segundo grado, cada una con dos incógnitas, la ecuacion que resulta no puede pasar del cuarto grado.*

Sean las dos ecuaciones generales

$$\begin{aligned} ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f&=0,\\ a'y^2+b'xy+c'x^2+d'y+e'x+f'&=0, \end{aligned}$$

que pueden escribirse asi:

$$y^2+\frac{bx+d}{a}y+\frac{cx^2+ex+f}{a}=0,$$

$$y^2+\frac{b'x+d'}{a'}y+\frac{c'x^2+e'x+f'}{a'}=0;$$

y haciendo, para abreviar,

$$\frac{bx+d}{a}=M,\quad \frac{cx^2+ex+f}{a}=N,\quad \frac{b'x+d'}{a'}=M',\quad \frac{c'x^2+e'x+f'}{a'}=N',$$

dichas ecuaciones serán

$$\begin{aligned} y^2+My+N&=0,\\ y^2+M'y+N'&=0. \end{aligned}$$

Eliminando primeramente y^2, y despejando en seguida la y, será

$$y=\frac{N'-N}{M-M'};$$

sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones propuestas, resulta la ecuacion, sin la incógnita y,

$$N^2+N'^2-2NN'+M^2N'-MM'N-MM'N'+M'^2N=0.$$

Como los polinomios N y N' no pueden ser de mayor grado que el segundo, y los polinomios M y M' no pueden ser de mayor grado que el primero, los términos de esta ecuacion no pueden pasar del cuartò grado: luego esta ecuacion no puede pasar del cuarto grado.

CAPÍTULO IV.

Discusion de la ecuacion general de segundo grado.

190. *Discutir* la ecuacion general de segundo grado es determinar la naturaleza y los signos de las raices, segun los valores y signos de los coeficientes.

Poniendo en manifiesto los signos de los términos en la ecuacion de segundo grado $x^2+mx+n=0$, en la cual supondremos que los coeficientes m y n son cantidades reales, resultan las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}x^2+mx+n&=0,\\ x^2-mx+n&=0,\\ x^2+mx-n&=0,\\ x^2-mx-n&=0.\end{aligned}$$

Resolviendo la primera ecuacion, tendremos

$$x=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}.$$

Estas raices son reales, si es $n<\frac{m^2}{4}$; y como entonces $\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}<\frac{m}{2}$, la primera raiz $-\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}$ es negativa. La segunda raiz $-\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}$ es evidentemente negativa.

Luego, si $n<\frac{m^2}{4}$, las raices de la primera ecuacion son reales y negativas.

Si $n=\frac{m^2}{4}$, las dos raices se reducen á $-\frac{m}{2}$, y entonces las dos son iguales.

Si $n>\frac{m^2}{4}$, las raices de dicha ecuacion son imaginarias.

Del mismo modo se demuestra, que si $n<\frac{m^2}{4}$, las raices $\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}$ de la segunda ecuacion son reales y positivas; que son iguales, si $n=\frac{m^2}{4}$; y que son imaginarias, si $n>\frac{m^2}{4}$.

Resolviendo la tercera ecuacion, tendremos

$$x=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}+n}.$$

Estas raices son reales; y como el radical es mayor que $\frac{m}{2}$, la primera es positiva. La segunda es evidentemente negativa.

Luego en este caso las dos raices son reales y de signo contrario.

Del mismo modo se demuestra que las raices $\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}+n}$ de la cuarta ecuacion son reales, la primera positiva y la segunda negativa.

191. *Cuando las raices de la ecuacion* $x^2+mx+n=0$ *son imaginarias, tienen la forma* $a+b\sqrt{-1}$ *y* $a-b\sqrt{-1}$.

En efecto, las raices de la ecuacion $x^2\pm mx+n=0$ son $\mp\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}$, las cuales son imaginarias, si n es positivo y mayor que $\frac{m^2}{4}$. La cantidad $\frac{m^2}{4}-n$ es en este caso negativa, y puede escribirse asi:

$$-\left(n-\frac{m^2}{4}\right)=\left(n-\frac{m^2}{4}\right)\times-1;$$

luego (*Núm.* 168) las raices de la ecuacion serán

$$\mp\frac{m}{2}\pm\sqrt{n-\frac{m^2}{4}}.\sqrt{-1},$$

que tienen la forma $a\pm b\sqrt{-1}$.

* **192.** Discutamos la misma ecuacion $x^2+mx+n=0$, en la que m y n son cantidades reales, sin resolver esta ecuacion.

Teorema. *Si la ecuacion* $x^2+mx+n=0$ *tiene la raiz imaginaria* $a+b\sqrt{-1}$, *tambien tiene la raiz* $a-b\sqrt{-1}$ *conjugada de la primera.*

Siendo $a+b\sqrt{-1}$ raiz de esta ecuacion, tendremos la identidad

$$(a+b\sqrt{-1})^2+m(a+b\sqrt{-1})+n=0,$$

ó $$(a^2-b^2+ma+n)+(2ab+mb)\sqrt{-1}=0;$$

luego, segun el teorema (*Núm.* 175),

$$a^2-b^2+ma+n=0,\ 2ab+mb=0.$$

Si en la misma ecuacion sustituimos en vez de x la cantidad $a-b\sqrt{-1}=a+b\times-\sqrt{-1}$, el resultado será el mismo anterior con la diferencia del signo de $\sqrt{-1}$; el resultado será pues $$(a^2-b^2+ma+n)-(2ab+mb)\sqrt{-1}:$$
mas como a^2-b^2+ma+n es cero, y tambien $2ab+mb$, se infiere que el último resultado es cero, y que por tanto la cantidad $a-b\sqrt{-1}$ satisface á la ecuacion propuesta, ó es raiz de esta ecuacion.

Teoremas. 1.° *Si la ecuacion* $x^2+mx+n=0$ *tiene sus dos raices reales y desiguales, el tercer término será menor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, y su primer miembro será la diferencia de dos cuadrados.* 2.° *Si la ecuacion* $x^2+mx+n=0$ *tiene sus dos raices reales é iguales, el tercer término será igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, y su primer miembro será un cuadrado.* 3.° *Si la ecuacion* $x^2+mx+n=0$ *tiene sus dos raices imaginarias, el tercer término será mayor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, y su primer miembro será la suma de dos cuadrados.*

1.° Sean a y b las dos raices reales y desiguales: tendremos (*Núm.* 182) $a+b=-m$, $ab=n$; luego la ecuacion será

$$x^2-(a+b)x+ab=0.$$

Pero es evidente que $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$, y por tanto $ab=\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}$; luego $ab<\frac{(a+b)^2}{4}$: y asi queda demostrada la primera parte del teorema. Para demostrar la segunda, sustituyamos en la ecuacion en lugar de ab su igual $\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}$, y la ecuacion será

$$x^2-(a+b)x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=0,$$

ó

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=0,$$

lo que demuestra la segunda parte.

2.º Sean a y a las dos raices reales é iguales de la ecuacion: tendremos $2a=-m$, y $a^2=n$, y por tanto la ecuacion será

$$x^2-2ax+a^2=0.$$

Es evidente que a^2 es igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término, y que el primer miembro es $(x-a)^2$.

3.º Sean $a+b\sqrt{-1}$ y $a-b\sqrt{-1}$ las dos raices imaginarias de la ecuacion: será su suma $2a=-m$, y su producto $a^2+b^2=n$; luego la ecuacion será

$$x^2-2ax+a^2+b^2=0;$$

y asi se ve que el tercer término a^2+b^2 es mayor que el cuadrado dela mitad del coeficiente del segundo; y tambien que el primer miembro $(x-a)^2+b^2$ es la suma de dos cuadrados.

Recíprocos. 1.º *Si el tercer término de la ecuacion* $x^2+mx+n=0$ *es menor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, las raices de esta ecuacion serán reales y desiguales.* 2.º *Si el tercer término de la ecuacion* $x^2+mx+n=0$ *es igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, las raices de la ecuacion serán reales é iguales.* 3.º *Si el tercer término de la ecuacion* $x^2+mx+n=0$ *es mayor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, las raices serán imaginarias.*

Se demuestran fácilmente por reduccion al absurdo (*Geometría, núm.* 20).

Pasemos ya á la discusion de las cuatro ecuaciones

$$x^2+mx+n=0\ldots\ldots (A),$$
$$x^2-mx+n=0\ldots\ldots (B),$$
$$x^2+mx-n=0\ldots\ldots (C),$$
$$x^2-mx-n=0\ldots\ldots (D),$$

en las que m y n son cantidades positivas reales.

Discusion de la ecuacion (A).

1.° Si $n<\frac{m^2}{4}$, las raices de esta ecuacion son reales y desiguales (*Recíp.* 1.°); y pues su producto es la cantidad positiva n, dichas raices tendrán el mismo signo: siendo además la suma de las mismas la cantidad negativa $-m$, se infiere que las dos son negativas. Luego en este caso la ecuacion (A) tiene sus dos raices reales, desiguales y negativas.

2.° Si $n=\frac{m^2}{4}$, las dos raices serán reales é iguales (*Recíproco* 2.°); y pues la suma es $-m$, cada una valdrá $-\frac{m}{2}$.

3.° Si $n>\frac{m^2}{4}$, las dos raices serán imaginarias (*Recíp.* 3.°).

Discusion de la ecuacion (B).

Del mismo modo que en la discusion de la ecuacion (A) se verá, que si $n<\frac{m^2}{4}$, las dos raices serán reales y desiguales, pero positivas; que si $n=\frac{m^2}{4}$, las dos raices son iguales á $\frac{m}{2}$; y que si $n>\frac{m^2}{4}$, las dos raices son imaginarias.

Discusion de la ecuacion (C).

Es evidente que $-m>\frac{m^2}{4}$; luego las dos raices son reales y desiguales. Como su producto es negativo, una será positiva, y la otra negativa; y como la suma de las dos es $-m$, la negativa tendrá mayor valor absoluto que la positiva.

Discusion de la ecuacion (D).

Del mismo modo que en la discusion de la ecuacion (C) se verá que las raices de la ecuacion son reales, una positiva y otra negativa, y que la positiva tiene mayor valor absoluto que la negativa.

Ejemplos.

$x^2-3x+5=0$.... raices imaginarias.

$3x^2-4x+\frac{4}{3}=0$.... reales é iguales á $\frac{2}{3}$.

$x^2-4x-17=0$.... reales y de signo contrario, teniendo la positiva mayor valor absoluto.

$x^2+4x-20=0$.... reales y de signo contrario, teniendo la negativa mayor valor absoluto.

$x^2-6x+14=0$.... imaginarias.

$x^2-6x+8=0$.... reales y positivas.

$x^2+6x+8=0$.... reales y negativas.

* 193. Resolviendo la ecuacion $ax^2+bx+c=0$, tendremos $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Veamos si esta fórmula nos dará el valor de la incógnita en el caso en que $a=0$, lo que se puede dudar, pues dicha fórmula corresponde á la ecuacion $ax^2+bx+c=0$, y no á la ecuacion $bx+c=0$, en que aquella se convierte cuando $a=0$.

Separando los dos valores de x, el primero será

$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, y el segundo $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Haciendo $a=0$, el primer valor de x se convierte en $\frac{0}{0}$, y el segundo en $\frac{-2b}{0}$.

La espresion $\frac{0}{0}$, en que se convierte el quebrado $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ cuando $a=0$, proviene de que a es un factor comun á numerador y denominador. Para hacerlo ver, y hallar al mismo tiempo el verdadero valor de dicha fraccion cuando $a=0$, tenemos que

$$(-b+\sqrt{b^2-4ac})(b+\sqrt{b^2-4ac})=-4ac;$$

luego $$-b+\sqrt{b^2-4ac}=\frac{-4ac}{b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Luego el valor de x será $\dfrac{\dfrac{-4ac}{b+\sqrt{b^2-4ac}}}{2a}$, en el cual vemos que a es factor comun á numerador y denominador.

Para hallar ahora el verdadero valor de este quebrado cuando $a=0$, lo simplificaremos, y resultará $\dfrac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$, y haciendo en seguida $a=0$, resulta $-\dfrac{c}{b}$, valor idéntico al que da la ecuacion $ax^2+bx+c=0$, cuando $a=0$; pues entonces se convierte en $bx+c=0$, de donde $x=-\dfrac{c}{b}$.

Para interpretar la segunda raiz $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, que cuando $a=0$ se transforma en $\dfrac{-2b}{0}$, observo que á medida que disminuye a, la cantidad radical $\sqrt{b^2-4ac}$ crece y se va aproximando á b: y por lo tanto el numerador crece y se aproxima á $-2b$; como al mismo tiempo el denominador disminuye, el valor positivo ó negativo el quebrado, segun el signo de b, va contínuamente aumentando: luego disminuyendo suficientemente a, este valor de x puede llegar á ser mayor que cualquiera cantidad por grande que esta sea. Finalmente, cuando $a=0$, el valor del quebrado es infinito, es decir, que en este caso la segunda raiz de la ecuacion desaparece.

CAPÍTULO V.

Problemas de segundo grado.

194. Problema 1.° *Uno reparte* 60 *reales entre varios pobres: si los pobres fuesen tres mas, cada uno recibiria un real menos. ¿Cuántos son los pobres?*

Sea x el número de pobres: puesto que se reparte á todos 60 reales, cada pobre recibe $\frac{60}{x}$ reales. Si los pobres fuesen tres mas, cada uno recibiria $\frac{60}{x+3}$; y como, segun el problemà, esta segunda cantidad es menor que la anterior en un real, será

$$\frac{60}{x}=\frac{60}{x+3}+1.$$

Resolviendo esta ecuacion, se halla $x=12$, $x=-15$; luego el número de pobres es 12.

El valor negativo -15, hecho positivo, corresponderia á otro nuevo problema análogo al propuesto (*Núm.* 110, 2.ª).

Problema 2.º *Una vasija recibe agua de dos caños: abriendo un caño hasta que se llene la mitad de la vasija, y en seguida el otro hasta que se llene la otra mitad, se pasan* 50′; *y si los dos la llenan juntos, tardan* 24′: *¿cuánto tardaria cada caño en llenar la vasija?*

Sea x el número de minutos que tardaria el primer caño en llenar la vasija, y los que tardaria el segundo; $\frac{x}{2}$ será el tiempo empleado por el primer caño en llenar la mitad de dicha vasija, $\frac{y}{2}$ el tiempo que tardará el segundo caño en llenar la otra mitad: luego $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=50.$

Si el primer caño tarda x minutos en llenar la vasija, en 24′ llenará la parte $\frac{24}{x}$ de la vasija, y el segundo en los 24′ llenará la parte $\frac{24}{y}$ de la vasija: como en los 24′ llenan entre los dos la vasija, será $\frac{24}{x}+\frac{24}{y}=1.$

Simplificando estas dos ecuaciones, tendremos

$$x+y=100,$$

$$24\,(x+y)=xy,\ \text{ó}\ 2400=xy.$$

Fácil seria ahora despejar estas dos incógnitas por el método ordinario; pero como conocemos la suma y el producto de las mismas, es preferible (*Núm.* 182, *Recíp.*) considerarlas como las raices de la ecuacion

$$z^2-100z+2400=0.$$

Resolviendo esta ecuacion, se hallan los valores $z=60$, $z=40$; ó $x=60$, $y=40$. Luego uno de los caños llenaria la vasija en 60′ y el otro en 40′.

Problema 3.° *Dos caños juntos llenan una vasija en 12′, y el primero tarda en llenar solo la vasija 10′ menos que el segundo: ¿cuánto tardaria cada caño en llenar la vasija?*

Sean x é y los minutos que tardarian el primero y segundo caños en llenar cada uno por sí solo la vasija: en los 12′ llena el primero la parte $\frac{12}{x}$ de la capacidad 1 de la vasija, y en los mismos 12′ llena el segundo la parte $\frac{12}{y}$: como en los 12′ la llenan completamente, será

$$\frac{12}{x}+\frac{12}{y}=1.$$

Ahora, puesto que el primer caño tarda 10′ menos que el segundo en llenar separadamente la vasija, será

$$x=y-10.$$

Resolviendo estas dos ecuaciones, se hallan las dos soluciones: $x=20,\quad y=30;$

$$x=-6,\ y=4.$$

Es decir, que el primer caño llenaria la vasija en 20′, y el segundo en 30′.

Problema 4.° *Hallar dos números cuya suma sea igual á su producto, y tambien á la diferencia de sus cuadrados.*

Sean x é y los dos números: tendremos

$$x+y=xy,$$
$$x+y=x^2-y^2.$$

La segunda ecuacion se puede simplificar, pues el segundo miembro equivale á $(x+y)(x-y)$; y asi se ve que $x+y$ es factor comun á ambos miembros; suprimiéndole, queda

$$1=x-y.$$

Resolviendo estas dos ecuaciones, se hallan las dos soluciones: $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ y=\frac{1+\sqrt{5}}{2};$

$$x=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\quad y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Problema 5.° *Dividir el número 120 en dos partes cuyo producto sea 999.*

Sean x é y las dos partes: tendremos

$$x+y=120,$$
$$xy=999.$$

Como conocemos la suma y el producto de x é y, estas dos incógnitas son (*Núm.* 182, *Recíp.*) las raices de la ecuacion

$$z^2-120z+999=0.$$

Resolviendo esta ecuacion, tendremos $z=111$, $z=9$; ó $x=111$, $y=9$. Luego las dos partes son 111 y 9.

Resolvamos este problema enunciándolo de una manera general.

Problema 6.° *Dividir un número dado en dos partes cuyo producto sea conocido.*

Sea s el número dado, x é y las dos partes, p su producto: tendremos

$$x+y=s,$$
$$xy=p.$$

Luego x é y son las raices de la ecuacion

$$z^2-sz+p=0;$$

y por consiguiente $x=\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-p}$,

$$y=\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s^2}{4}-p}.$$

Para que estos valores sean reales, ó para que el problema sea posible, es menester que sea $p<\frac{s^2}{4}$, ó á lo mas, que sea $p=\frac{s^2}{4}$; pues si fuese $p>\frac{s^2}{4}$, los valores de las incógnitas serian imaginarios, y por tanto el problema imposible. Vemos pues que el mayor valor que puede tener p, siendo el problema posible, es $\frac{s^2}{4}$; y entonces los valores de las incógnitas son $\frac{s}{2}$ y $\frac{s}{2}$.

Luego *el mayor producto que se puede formar con las dos* *partes de un número es el producto de sus dos mitades ó el cuadrado de su mitad.*

Este teorema, muy interesante, se puede demostrar directamente con facilidad.

Sea d la diferencia de las dos partes: la parte mayor será (*Núm.* 106) $\frac{s+d}{2}$, y la menor $\frac{s-d}{2}$. Luego su producto será

$$\frac{s+d}{2}\times\frac{s-d}{2}=\frac{s^2-d^2}{4}.$$

Si $d=0$, las dos partes son iguales entre sí, y por consiguiente cada una vale $\frac{s}{2}$: su producto es entonces $\frac{s^2}{4}$. Si d crece, el producto de las dos partes $\frac{s^2-d^2}{4}$ disminuye; y asi queda demostrado el teorema.

* Problema 7.º *Dos forman compañía: el primero pone* a, *y el segundo gana* b; *la suma de capitales y ganancias es* s: *¿cuánto ganó el primero y cuánto puso el segundo?*

Sea x la ganancia del primero, y el capital del segundo: tendremos $x+y+a+b=s$, y por consiguiente

$$x+y=s-a-b.$$

Ahora, las ganancias son proporcionales á los capitales; luegó

$$a:y::x:b,$$

ó

$$xy=ab.$$

Conocemos, pues, la suma $s-a-b$ de x é y, y su producto ab; luego (*Núm.* 177, *Recip.*) x é y son las raices de la ecuacion de segundo grado

$$z^2-(s-a-b)z+ab=0.$$

Resolviendo esta ecuacion, tendremos

$$z=\frac{s-a-b\pm\sqrt{(s-a-b)^2-4ab}}{2}.$$

Uno cualquiera de estos valores es el de x y el otro el de y; luego el problema tiene las dos soluciones siguientes:

el primero ganó $\frac{s-a-b+\sqrt{(s-a-b)^2-4ab}}{2}$, y el segundo puso $\dfrac{s-a-b-\sqrt{(s-a-b)^2-4ab}}{2}$;

ó bien el primero ganó $\dfrac{s-a-b-\sqrt{(s-a-b)^2-4ab}}{2}$,

y el segundo puso $\dfrac{s-a-b+\sqrt{(s-a-b)^2-4ab}}{2}$.

Aplicacion. El primero pone 24 y el segundo gana 10; suma de capitales y ganancias 65: se desea saber cuánto ganó el primero y cuánto puso el segundo.

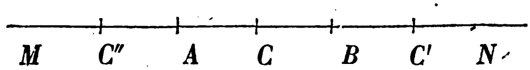
Tendremos $a=24$, $b=10$, $s=65$; y por consiguiente

$$z=\frac{31\pm\sqrt{961-960}}{2}=\frac{31\pm1}{2};$$

luego $x=16,\ y=15$;
$x=15,\ y=16$.

De suerte que se dirá que el primero ganó 16 y el segundo puso 15, ó bien que el primero ganó 15 y el segundo puso 16.

*Problema 8.° *Hallar en la línea* MN, *que une dos luces* A *y* B, *un punto* C *igualmente aclarado por ellas.*



Sea a la intensidad de la luz A, es decir, la cantidad de luz derramada por la luz A á los puntos que están á la unidad de distancia, b la intensidad de la luz B. Sea la distancia $AB=d$, la distancia $AC=x$, y por consiguiente la distancia $BC=d-x$. Segun se demuestra en la física, las intensidades de una luz están en razon inversa de los cuadrados de las distancias de los puntos iluminados á la luz; luego, si llamamos i á la intensidad de la luz A en el punto C, hallaremos el valor de i por la proporcion (*Aritm. núm.* 191)

$$a : i :: x^2 : 1,$$

de donde $$i=\frac{a}{x^2}.$$

La intensidad i de la luz B en el punto C se hallará por la proporcion $$b : i :: (d-x)^2 : 1,$$

de donde $$i=\frac{b}{(d-x)^2}.$$

Luego $$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2}.$$

Para resolver esta ecuacion, quitaremos primeramente los denominadores, y efectuando, transponiendo y reduciendo, tendremos $$(a-b)x^2-2adx+ad^2=0,$$

de donde $$x=\frac{ad\pm\sqrt{a^2d^2-ad^2(a-b)}}{a-b},$$

ó $$x=\frac{d(a\pm\sqrt{ab})}{a-b}.$$

Separando estos dos valores de x, el primero será

$$x=\frac{d(a+\sqrt{ab})}{a-b}=\frac{d\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b};$$

y como (*Núm.* 31) $a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$, será

$$x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},\text{ ó } x=\frac{d}{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}.$$

El segundo valor de x se hallará igualmente que es

$$x=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{b}{a}}}.$$

La ecuacion $\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2}$ puede resolverse con mas brevedad; pues es evidente que, si estraemos la raiz cuadrada de ambos miembros, se reducirá desde luego á la ecuacion de primer grado $$\frac{\sqrt{a}}{x}=\pm\frac{\sqrt{b}}{d-x}.$$

Separando las dos ecuaciones, que aqui se hallan reunidas, serán $$\frac{\sqrt{a}}{x}=\frac{\sqrt{b}}{d-x},\quad \frac{\sqrt{a}}{x}=-\frac{\sqrt{b}}{d-x}.$$

De ellas resultan: $$x=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{b}{a}}},\quad x=\frac{d}{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}.$$

Discusion. 1.° Si $a>b$, será $\frac{b}{a}<1$, $\sqrt{\frac{b}{a}}<1$.

El primer valor $\frac{d}{1+\sqrt{\frac{b}{a}}}$ de x es evidentemente menor que d, y es mayor que $\frac{d}{2}$, pues estos dos quebrados tienen el mismo numerador d, y el denominador del primero es menor que el del segundo: luego este primer valor de x nos da un punto C, igualmente aclarado por las dos luces, intermedio entre A y B, mas próximo de B que de A; lo que debe ser asi, pues la intensidad de A es mayor que la de B.

El segundo valor $\frac{d}{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}$ es tambien positivo y mayor que d, lo que nos da un punto C' en la prolongacion de la línea AB, y á la derecha de las dos luces A y B, igualmente aclarado por ellas.

2.° Si $a=b$, será $\frac{b}{a}=1$, y por consiguiente $\sqrt{\frac{b}{a}}=1$.

El primer valor de x es $\frac{d}{2}$, y nos da un punto C á igual distancia de las dos luces; lo que evidentemente debe ser asi.

El segundo valor de x se reduce á $\frac{d}{0}$, y nos da un punto en el infinito igualmente iluminado por las dos luces.

Para interpretar este valor ∞, observaremos que si es $b<a$, y b va creciendo y se aproxima á a tanto como se quiera, el valor $\frac{d}{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}$ irá sucesivamente aumentando, y llegará á ser mayor que cualquiera cantidad por grande que sea; luego cuando $b=a$, el valor de x será infinito, es decir, que no existirá ningun punto en la prolongacion de la AB que esté igualmente iluminado por las dos luces.

3.° Si $a<b$, será $\frac{b}{a}>1$, y por consiguiente $\sqrt{\frac{b}{a}}>1$.

El primer valor $\frac{d}{1+\sqrt{\frac{b}{a}}}$ de x es positivo y menor que $\frac{d}{2}$; pues el quebrado $\frac{d}{1+\sqrt{\frac{b}{a}}}$ tiene igual numerador que el quebrado $\frac{d}{2}$, y mayor denominàdor; luego este primer valor de x nos da un punto C intermedio entre las luces A y B, pero mas próximo de A que de B; y asi debe ser, porque la intensidad de la luz A es menor que la de la luz B.

El segundo valor $\frac{d}{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}$ de x es negativo, y nos da por consiguiente un punto á la izquierda de la luz A (*Núms.* 108 *y* 110).

CAPITULO IV.

Cuestiones sobre máximos y mínimos que pueden resolverse por las ecuaciones de segundo grado.

---

* 195. Un *máximo* de una funcion es un valor particular de dicha funcion, mayor que los valores inmediatos anterior y posterior de la misma funcion.

Un *mínimo* de una funcion es un valor particular de dicha funcion, menor que los valores anterior y posterior de la misma funcion.

La resolucion de las cuestiones sobre máximos y mínimos es una de las aplicaciones del cálculo diferencial: aquí solo tratamos de resolver estas cuestiones para las funciones, que igualadas á una cantidad y, dan una ecuacion de segundo grado con respecto á la variable de la funcion.

El método que debemos seguir, es el mismo que hemos visto al discutir el problema 6.°, y que nos ha dado el valor máximo del producto de las dos partes del número.

* 196. Hé aquí este método espresado de una manera general.

Para hallar el máximo ó el mínimo de una funcion de una variable, se iguala dicha funcion á y, *se despeja la variable, y discutiendo la fórmula que resulte, se hallará el máximo ó míni-*

mo valor que puede tener y, *siendo real el valor de la variable.*

Ejemplos. 1.° *Hallar el máximo ó mínimo de la funcion* (x — 4)(14 — x), *y el valor correspondiente de la variable* x.

Segun la regla general, tendremos

$$(x-4)(14-x)=y.$$

Resolviendo esta ecuacion, se halla

$$x=9\pm\sqrt{25-y}.$$

El mayor valor que puede tener y, siendo real el radical, y por consiguiente la variable x, es 25; y el valor correspondiente de la variable es 9. Esta funcion no admite valor mínimo, porque el radical es real, siempre que y tenga un valor menor que 25.

Nota. Este problema puede resolverse por medio del teorema del máximo producto de las dos partes de un número; pues siendo 10 la suma de los dos números $x-4$ y $14-x$, pueden estos números considerarse como dos partes que componen el número. 10. Por consiguiente el máximo producto será el cuadrado 25 de la mitad de la suma, y el valor correspondiente de la variable se hallará igualando las dos partes, es decir, suponiendo $x-4=14-x$ de donde resulta $x=9$.

2.° *Hallar el máximo ó mínimo de la funcion* $\dfrac{x^2-2x+2}{2x-2}$.

Tenemos $$y=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}.$$

Resolviendo esta ecuacion con respecto á x, será

$$x=y+1\pm\sqrt{y^2-1}.$$

Si damos á y valores positivos desde 0 en adelante, el radical será imaginario, mientras y sea menor que 1; y será real, si $y>1$: luego el menor valor que se le puede dar á y, para que x sea real, es 1. Luego 1 es un mínimo de la funcion, correspondiente al valor 2 de la variable.

Si damos á y valores negativos menores que -1, como -2, -3, etc., el radical será real; y si le damos valores negativos mayores que -1, como $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, etc., el radical será imaginario; luego el mayor valor negativo que se le puede dar á y es -1. Luego -1 es un máximo de la funcion correspondiente al valor 0 de la variable.

3.° *Hallar el máximo ó mínimo de la funcion* $\frac{x^2-21}{x-5}$.

Tenemos $$\frac{x^2-21}{x-5}=y,$$

de donde resulta $x=\frac{y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{y^2-20y+84}.$

Para discutir con facilidad este radical, conviene descomponer el trinomio $y^2-20y+84$ en el producto de dos factores: tendremos pues (*Núm.* 179)

$$y^2-20y+84=(y-14)(y-6),$$

y por consiguiente $$x=\frac{y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(y-14)(y-6)}.$$

Si damos á y valores mayores que 14, el radical será real; si la damos valores menores que 14, pero mayores que 6, el radical será imaginario; luego 14 es un mínimo, correspondiente al valor 7 de la variable.

Si damos á y valores menores que 6, el radical será real; y si la damos valores mayores que 6 y menores que 14, el radical será imaginario; luego 6 es un máximo, correspondiente al valor 3 de la variable.

4.° *Dividir un número dado en dos partes, tales que la suma de sus cuadrados sea un mínimo.*

Sea a el número dado, x una de sus dos partes, $a-x$ será la otra. Segun el problema, la suma $x^2+(a-x)^2$ debe ser un mínimo: hago pues $x^2+(a-x)^2=y$,

y resolviendo esta ecuacion con respecto á x, tendré

$$x=\frac{a}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2y-a^2},$$

ó bien $$x=\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{y-\frac{a^2}{2}}.$$

Si damos á y valores mayores que $\frac{a^2}{2}$, el radical será real; y si damos á y valores menores que $\frac{a^2}{2}$, el radical será imaginario; luego el mínimo valor de y es $\frac{a^2}{2}$; y los valores de las dos partes serán por consiguiente $\frac{a}{2}$ y $\frac{a}{2}$. Luego *para dividir un número en dos partes, tales que la suma de sus cuadrados sea un mínimo, se divide dicho número en dos partes iguales.*

CAPÍTULO VIII.

Resolucion de las ecuaciones de dos términos. Número de valores de las cantidades radicales.

---

197. Se llama *ecuacion de dos términos* ó *ecuacion binomia* la ecuacion que despues de las operaciones ordinarias tiene la forma $ax^m = \pm b$, ó partiendo por a, $x^m = \pm \frac{b}{a}$, y haciendo $\frac{b}{a} = p$, $x^m = \pm p$.

Segun esta ecuacion, los valores de x elevados á la potencia del grado m deben dar la cantidad $\pm p$; luego dichos valores de x son las raices del grado m de la cantidad $\pm p$.

Luego la investigacion de los valores de la raiz de una cantidad se reduce á la resolucion de una ecuacion de dos términos.

La ecuacion de dos términos $x^m = \pm p$ puede reducirse á una ecuacion mas sencilla.

En efecto, si α es una de las raices del grado m de p, por ejemplo la raiz aritmética, tendremos $\alpha^m = p$; y por consiguiente la ecuacion $x^m = \pm p$, será $x^m = \pm \alpha^m$.

Hagamos ahora $x = \alpha y$, siendo y una nueva incógnita: tendremos $\alpha^m y^m = \pm \alpha^m$, ó $y^m = \pm 1$.

La resolucion general de las ecuaciones $y^m = \pm 1$ corresponde al álgebra superior: por ahora solo tratamos de resolverlas en algunos casos particulares.

1.er *Caso.* $m = 2$. Las ecuaciones serán $y^2 = \pm 1$.

Separando estas dos ecuaciones, tendremos

$$y^2 = 1,\ y^2 = -1.$$

La primera nos da evidentemente $y = \pm 1$, y la segunda $y = \pm\sqrt{-1}$.

Podemos tambien resolver estas dos ecuaciones de este otro modo.

1.° Siendo $y^2=1$, será $y^2-1=0$,

ó $$(y+1)\ (y-1)=0;$$

y por consiguiente $y=-1$, $y=1$.

2.° Siendo $y^2=-1$, será $y^2-(-1)=0$,

ó $$(y+\sqrt{-1})(y-\sqrt{-1})=0,$$

y por consiguiente $y=-\sqrt{-1}$, $y=\sqrt{-1}$.

2.° *Caso.* $m=3$. Las ecuaciones son $y^3=\pm 1$, y separándolas, tendremos $y^3=1$, $y^3=-1$.

Para resolver la primera, pasaremos 1 al primer miembro, y será $$y^3-1=0.$$
Ahora, y^3-1 es divisible por $y-1$ (*Núm.* 50), y el cociente es y^2+y+1; luego

$$y^3-1=(y-1)\ (y^2+y+1)=0.$$

Este producto será cero, solo cuando lo sea cualquiera de sus dos factores, es decir, cuando $y-1=0$, de donde $y=1$, y cuando $y^2+y+1=0$, de donde

$$y=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}=$$

$$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

Separando estas dos raices, es

$$y=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Luego las raices de la ecuacion $y^3=1$, ó los valores de la raiz cúbica de 1, son 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, como es fácil comprobar, elevando cada una de estas cantidades al cubo.

La ecuacion $y^3=-1$ se reduce á la anterior; pues mudando los signos á ambos miembros, será $-y^3=1$, ó $(-y)^3$

$=1$. Los valores de $-y$ son, segun el caso anterior,

$$-y=1,\quad -y=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad -y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

luego $\quad y=-1,\ y=\frac{1-\sqrt{-3}}{2},\quad y=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.$

Estas son las tres raices de la ecuacion $y^3=-1$, ó los tres valores de la raiz cúbica de -1, que tambien pueden hallarse directamente.

3.^{er} *Caso.* $m=4$. Las ecuaciones serán $y^4=\pm 1$.

Consideremos en primer lugar la ecuacion $y^4=1$.

Tendremos, estrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros, $\quad y^2=\pm\sqrt{1}$, ó $y^2=\pm 1$;

luego, volviendo á estraer la raiz cuadrada, $y=\pm\sqrt{\pm 1}$.

Separando los cuatro valores, que aquí están incluidos, es

$$y=\sqrt{1},\quad y=-\sqrt{1},\ y=\sqrt{-1},\ y=-\sqrt{-1},$$

ó $\quad y=1,\ y=-1,\ y=\sqrt{-1},\ y=-\sqrt{-1}.$

Estos son los cuatro valores de y en la ecuacion $y^4=1$, ó las cuatro raices cuartas de 1.

La ecuacion $y^4=-1$ se resuelve del mismo modo; pues estrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros, tendremos

$$y^2=\pm\sqrt{-1},$$

y por consiguiente $\quad y=\pm\sqrt{\pm\sqrt{-1}}$;

ó, separando los cuatro valores que aquí están reunidos,

$$y=\sqrt{\sqrt{-1}},\ y=-\sqrt{\sqrt{-1}},\ y=\sqrt{-\sqrt{-1}},\ y=-\sqrt{-\sqrt{-1}}$$

Estos cuatro valores imaginarios pueden ponerse bajo la forma $a\pm b\sqrt{-1}$.

En efecto, tenemos (*Núm.* 139)

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

y para hallar el valor de $\sqrt{\pm\sqrt{-1}}$, es $a=0$, $b=-1$; luego

$$\sqrt{\pm\sqrt{-1}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1\pm\sqrt{-1}\right).$$

Por consiguiente los otros dos valores

$$-\sqrt{\pm\sqrt{-1}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1\pm\sqrt{-1}\right).$$

Las dos ecuaciones $y^4=1$, $y^4=-1$ pueden resolverse de otro modo:

En efecto, 1.° siendo $y^4=1$, es $y^4-1=0$,

ó $$(y^2-1)(y^2+1)=0:$$

por consiguiente $y^2-1=0$, $y^2+1=0$; y por tanto $y=\pm1$, $y=\pm\sqrt{-1}$.

2.° De la ecuacion $y^4=-1$, resulta $y^4-(-1)=0$,

ó $$(y^2+\sqrt{-1})(y^2-\sqrt{-1})=0\,;$$

luego $y^2+\sqrt{-1}=0$, $y^2-\sqrt{-1}=0$, ó $y^2=-\sqrt{-1}$, $y^2=\sqrt{-1}$, y por último $y=\pm\sqrt{-\sqrt{-1}}$, $y=\pm\sqrt{\sqrt{-1}}$.

Fácil nos seria ahora resolver las ecuaciones $y^5=\pm1$, $y^6=1$, $y^8=\pm1$, etc.: mas no podríamos resolver, sin mas conocimientos que los adquiridos hasta aquí, las ecuaciones $y^7=\pm1$, y mucho menos las $y^9=\pm1$, $y^{11}=\pm1$, etc.

NOTA. Los valores de y en la ecuacion $y^m=1$ son cantidades que elevadas á la potencia del grado m dan 1; luego dichos valores son las raices del grado m de 1: igualmente los valores de x en la ecuacion $x^m=\alpha^m$ son cantidades que elevadas á m dan α; luego estos valores son las raices del grado m de α^m; y como hemos visto que $x=\alpha y$, se infiere que, *conociendo las raices de la unidad, se hallarán las raices del mismo grado de una cantidad, multiplicando aquellas por una de las raices de esta cantidad.*

En todos los casos particulares de la ecuacion $y^m=1$, que hemos resuelto, hemos hallado para y tantos valores diferentes como unidades tiene m; propiedad que se verifica, cualquiera que sea el número entero y positivo m, como se verá en el álgebra superior; luego la unidad tiene tantas raices como unidades tiene el índice; y por consiguiente tambien *una cantidad cualquiera tiene tantas raices como unidades tiene el índice.*

LIBRO SESTO.

LOGARITMOS Y PROGRESIONES.

CAPÍTULO I.

Algunas propiedades de las potencias y raices de los números.

* 198. *Las potencias (cuyos esponentes son enteros y positivos) de un número mayor que 1 crecen, creciendo su esponente; y pueden valer mas que cualquiera cantidad, llegando á ser suficientemente grande el esponente.*

Sea $a>1$: multiplicando ambos miembros de esta desigualdad por a, será $a^2>a$; multiplicando ambos miembros de esta nueva desigualdad por a, resulta $a^3>a^2$; y asi sucesivamente: luego las potencias de un número mayor que 1, cuyos esponentes son enteros y positivos, crecen, creciendo el esponente.

Para demostrar la segunda parte (*Comp.*[to] *de la Arit. número* 15), llamaremos $1+r$ al número mayor que 1, y m al esponente variable de la potencia.

Siendo (*Núm.* 139)

$$(+r)^m=1+mr+\frac{m(m-1)}{2}r^2+\ldots\ldots+r^m,$$

es $(1+r)^m>1+mr$. Creciendo m suficientemente, mr puede llegar á ser mayor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea r; luego con mayor razon será entonces $(1+r)^m$ mayor que esta cantidad.

Nota. La segunda parte de este teorema puede enunciarse en estos otros términos: *toda cantidad mayor que 1 elevada al infinito, es infinitamente grande*; enunciado que no dice mas ni menos que el anterior.

199. *La raiz de una cantidad mayor que 1 es: 1.° mayor que 1; 2.° menor que la cantidad; 3.° disminuye creciendo el índice; 4.° tiene por límite 1.*

Sea a una cantidad mayor que 1: digo 1.° que $\sqrt[m]{a}>1$; 2.° que $\sqrt[m]{a}<a$; 3.° que $\sqrt[m+n]{a}<\sqrt[m]{a}$; 4.° que $lím.\sqrt[m]{a}=1$.

1.° $\sqrt[m]{a}$ no es 1; pues 1 elevado á la potencia del grado m da 1 y no a. Tampoco $\sqrt[m]{a}$ es menor que 1; pues una cantidad menor que 1, elevada á una potencia cualquiera, da un número menor que la misma cantidad, y con mucha mayor razon menor que la cantidad a, que por suposicion es mayor que 1.

Luego $\sqrt[m]{a}$, que no es 1 ni menor que 1, es mayor que 1.

2.° $\sqrt[m]{a}$ no puede ser igual á a, pues $a^m>a$ (*Núm.* 193). Tampoco puede ser mayor que a, pues una cantidad mayor que a, elevada á m, daria otra cantidad mayor que la primera cantidad, y con mayor razon mayor que a.

Luego $\sqrt[m]{a}$, que no es a ni mayor que a, es menor que a.

3.° Sea $\sqrt[m]{a}=\alpha$, $\sqrt[m+n]{a}=6$; será $a=\alpha^m$, $a=6^{m+n}$; y por consiguiente $\alpha^m=6^{m+n}=6^m\times 6^n$; pero por ser $6^n>1$, es $6^m\times 6^n>6^m$; luego $\alpha^m>6^m$, y por tanto $\alpha>6$ ó $\sqrt[m]{a}>\sqrt[m+n]{a}$.

4.° Sea r una cantidad positiva tan pequeña como se quiera, y m un número entero y positivo indefinidamente grande: tenemos (*Núm.* 198) $(1+r)^m>a$; luego $1+r>\sqrt[m]{a}$, y por consiguiente $\sqrt[m]{a}-1<r$; es decir que creciendo el índice m indefinidamente, el esceso de $\sqrt[m]{a}$ á 1 puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad asignable; luego 1 es el límite de la cantidad variable $\sqrt[m]{a}$, y es menor que esta variable.

* **200.** *Si en la espresion* a^x *en que* $a>1$, *crece* x *de una manera contínua, ó por grados insensibles, desde cero al* ∞, a^x *crecerá tambien de una manera contínua desde* 1 *al* ∞.

Sean x' y $x'+\frac{1}{p}$ dos valores consecutivos de x, siendo p un número entero y positivo tan grande como se quiera, y por consiguiente $\frac{1}{p}$ una fraccion tan pequeña como nos acomode: los valores correspondientes de a^x son $a^{x'}$ y $a^{x'+\frac{1}{p}}$, cuya diferencia es $a^{x'}\left(a^{\frac{1}{p}}-1\right)$ ó $a^{x'}\left(\sqrt[p]{a}-1\right)$. Como $a>1$, $\sqrt[p]{a}>1$ (*Núm.* 194, 1.º); luego $a^{x'}\left(\sqrt[p]{a}-1\right)$ es una cantidad positiva; es decir, que si x crece, a^x crece tambien.

Tambien se ha demostrado (*Núm.* 199, 4.º) que creciendo p suficientemente, $\sqrt[p]{a}-1$ puede ser menor que cualquiera cantidad dada; y por tanto el producto $a^{x'}\left(\sqrt[p]{a}-1\right)$, en el cual el segundo factor tiene por límite cero, puede tambien acercarse á cero cuanto se quiera; luego, creciendo x por diferencias insensibles, a^x crece del mismo modo.

Ahora, como haciendo $x=0$, es $a^0=1$, y haciendo $x=\infty$, es $a^\infty=\infty$ (*Núm.* 198, *nota*), resulta demostrado el teorema.

* 201. *Si en la espresion* a^x, *en que* $a>1$ *crece* x *negativamente y de una manera contínua desde cero á* $-\infty$, a^x *disminuirá de una manera contínua desde* 1 *á cero.*

Hagamos $x=-z$, y será $a^x=a^{-z}=\frac{1}{a^z}$. Dando á x valores que vayan creciendo negativamente desde cero á $-\infty$, z tendrá valores positivos, que irán creciendo desde cero á ∞; y como dando á z estos valores, a^z pasa por todos los estados de magnitud desde 1 al ∞, se infiere que $\frac{1}{a^z}$ ó a^x pasará tambien por todos los estados de magnitud de 1 á cero.

* 202. *Si en la espresion* a^x, *en que* a *es positivo y menor que* 1, *crece* x *contínuamente desde cero á* ∞, a^x *disminuirá de una manera contínua desde* 1 *á cero.*

En efecto, siendo $a<1$, será $a=\frac{1}{b}$ en que $b>1$; luego $a^x=\frac{1}{b^x}$. Ahora, si x crece de una manera contínua desde cero á ∞, b^x crece contínuamente desde 1 á ∞; luego $\frac{1}{b^x}$ disminuyen contínuamete desde 1 á cero.

*198. *Si en la espresion* a^x, *en que* a *es positivo y menor que* 1, *crece* x *negativamente y de una manera contínua desde cero á* $-\infty$, a^x *crecerá contínuamente desde* 1 *á* ∞.

En efecto, hagamos $a=\frac{1}{b}$ (b será mayor que 1), y $x=-z$: será $a^x=\frac{1}{b^x}=b^{-x}=b^z$. Dando ahora á x valores negativos desde cero á $-\infty$, los valores correspondientes de z serán positivos, é irán creciendo desde cero á ∞; por consiguiente b^z, ó su igual a^x, crecerá de una manera contínua desde 1 á ∞.

Nota. La espresion 1^x siempre es 1, cualquiera que sea el valor positivo ó negativo de x (a).

(a) Podemos ahora hacer estensivas á las cantidades que tienen esponentes inconmensurables, las reglas sobre la multiplicacion y division de las potencias de una misma cantidad, como tambien las de la elevacion y estraccion de raices de las mismas.

Supongamos que la cantidad $a>1$, que α y β sean dos cantidades inconmensurables, y x é y dos cantidades conmensurables variables y menores respectivamente que α y β: digo que $a^\alpha\times a^\beta=a^{\alpha+\beta}$.

En efecto, sabemos ya que si x é y son dos números conmensurables cualesquiera, $a^x\times a^y=a^{x+y}$: siendo $x<\alpha$, es $a^x<a^\alpha$ (200), y si x crece y se acerca á β indefinidamente, a^x crece, y tambien se acerca indefinidamente á a^α; es decir que a^α es el límite de la cantidad variable a^x. Por la misma razon a^β es el límite de la variable a^y, y $a^{\alpha+\beta}$ el de la variable a^{x+y}; luego, segun el teorema de los límites, $a^\alpha\times a^\beta=a^{\alpha+\beta}$.

Corolario. $a^\alpha:a^\beta=a^{\alpha-\beta}$; pues $a^{\alpha-\beta}\times a^\beta=a^{\alpha-\beta+\beta}=a^\alpha$.

Digo ahora que $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$.

Tenemos en primer lugar $(a^\alpha)^4=a^\alpha\times a^\alpha\times a^\alpha\times a^\alpha=a^{4\alpha}$.

Tenemos tambien $\left(a^\alpha\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(a^\alpha)^2}=\sqrt[3]{a^{2\alpha}}$, radical que, segun convenio, podemos escribir $a^{\frac{2\alpha}{3}}=a^{\alpha\times\frac{2}{3}}$.

Esto supuesto, sea x una cantidad conmensurable tan próxima á β como se quiera: acabamos de demostrar que $\left(a^\alpha\right)^x=a^{\alpha x}$: el límite de $\left(a^\alpha\right)^x$ es, segun hemos demostrado en el primer caso, $\left(a^\alpha\right)^\beta$, y el de $a^{\alpha x}$ es $a^{\alpha\beta}$; luego $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$.

Nota. El cálculo de las cantidades que tienen esponentes inconmensurables negativos, se ejecuta por las mismas reglas precedentes, en virtud del convenio $a^{-\alpha}=\frac{1}{a^\alpha}$.

CAPÍTULO II.

Logaritmos.

Artículo 1.°

Propiedades generales de los logaritmos.

204. Hemos visto (*Núms.* 200, 201, 202 y 203), que si a es positivo y mayor ó menor que 1, y x varía de una manera contínua, positiva ó negativamente, a^x varía tambien de una manera contínua, y pasa por todos los estados de magnitud comprendidos entre 0 é ∞; luego si, para mayor comodidad, llamamos y á la espresion a^x, tendremos que en la ecuacion $y=a^x$, en que a es positivo y mayor ó menor que 1, á cada valor positivo ó negativo de x corresponde un solo valor positivo de y, y á cada valor positivo de y corresponde un solo valor positivo ó negativo de x. En esta ecuacion el número x se llama *logaritmo* del número y.

Luego *el logaritmo de un número es el esponente á que debe elevarse una cantidad positiva y diferente de* 1, *llamada* base, *para que la potencia sea igual al número.*

205. Se llama *sistema* de logaritmos la reunion de logaritmos correspondientes á todos los números, cuando la base tiene un valor determinado.

206. Como en la ecuacion $y=a^x$, en que la cantidad a es positiva y diferente del número 1, y es siempre positivo, se infiere que *los números negativos no tienen logaritmos.*

Haciendo $x=0$, resulta $y=1$, y haciendo $x=1$, es $y=a$; luego *en todo sistema de logaritmos el logaritmo de la unidad es cero, y el logaritmo de la base es* 1.

207. Supongamos que la base $a>1$.

Hemos visto (*Núms.* 200 y 201) que si x crece desde 0 á ∞, a^x ó su igual y crece desde 1 á ∞; y que si x crece negativamente desde 0 á $-\infty$, a^x ó su igual y disminuye desde 1 á 0.

Luego, *cuando la base de un sistema de logaritmos es mayor que* 1, *los números mayores que* 1 *tienen logaritmos positivos, á mayor número corresponde mayor logaritmo, y el logaritmo de* ∞ *es* ∞; *los números menores que* 1 *tienen logaritmos negativos, y el logaritmo de cero es* $-\infty$.

* 208 .Supongamos ahora que $a<1$, pero positiva.

Hemos visto (*Núms.* 202 y 203) que si x crece desde 0 á ∞, los valores correspondientes de a^x ó de y disminuyen desde 1 á 0; y que si x crece negativamente desde 0 á $-\infty$, los valores correspondientes de a^x ó de y crecen desde 1 á ∞.

Luego, *cuando la base es menor que la unidad, los números menores que 1 tienen logaritmos positivos, á mayor número corresponde menor logaritmo, el logaritmo de 0 es ∞; los números mayores que 1 tienen logaritmos negativos, y el logaritmo de ∞* es $-\infty$.

209. Sean y', y'', y''' varios números, x', x'', x''' sus correspondientes logaritmos: tendremos

$$y'=a^{x'},$$
$$y''=a^{x''},$$
$$y'''=a^{x'''}.$$

Multiplicando ordenadamente estas ecuaciones, será

$$y'y''y'''=a^{x'+x''+x'''}.$$

Siendo $x'+x''+x'''$ el esponente de la base, $x'+x''+x'''$ es el logaritmo de $a^{x'+x''+x'''}$ ó de $y'y''y'''$, esto es

$$\log(y'y''y''')=x'+x''+x'''.$$

Luego *el logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de sus factores.*

Partiendo ordenadamente las dos ecuaciones

$$y'=a^{x'},$$
$$y''=a^{x''},$$

será
$$\frac{y'}{y''}=a^{x'-x''}$$

luego
$$\log\frac{y'}{y''}=x'-x''.$$

Luego *el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Elevando los dos miembros de la ecuacion $y'=a^{x'}$ á la potencia del grado m, será $y'^m=a^{mx'}$;

luego $\log y'^m=mx'$.

Luego *el logaritmo de una potencia de un número es igual al logaritmo del número multiplicado por el esponente.*

Estrayendo la raiz del grado m de los dos miembros de la ecuacion $y'=a^{x'}$, será $\sqrt[m]{y}=a^{\frac{x'}{m}}$;

luego $$\log \sqrt[m]{y'} = \frac{x'}{m}.$$

Luego *el logaritmo de la raiz de un número es igual al logaritmo del número partido por el índice de la raiz.*

Artículo 2.°

Construccion de las tablas de logaritmos.

---

210. Unas tablas de logaritmos es una reunion de números enteros desde 1 hasta 10000, 100000, etc. y de sus correspondientes logaritmos.

El sistema de logaritmos que se ha preferido para la construccion de las tablas, por las ventajas que tiene sobre los otros sistemas, es aquel cuya base es 10; de modo que la ecuacion que liga á los números y logaritmos en este sistema es $y=10^x$.

Los logaritmos del sistema cuya base es 10, se llaman logaritmos *ordinarios*, *tabulares* ó de Brigss, que fué el primero que construyó unas tablas de este sistema, á ruego de Neper, inventor de los logaritmos.

211. Si en la ecuacion $y=10^x$ damos á x los valores

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3\ldots\ldots -1,\ -2,\ -3\ldots\ldots$$

los valores correspondientes de y serán

$$10^0,\ 10^1,\ 10^2;\ 10^3,\ldots\ 10^{-1},\ 10^{-2},\ 10^{-3}\ldots$$

ó $$1,\quad 10,\ 100,\ 1000,\ldots\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000}\ldots\ldots$$

* 212. *Los únicos números conmensurables que tienen logaritmos conmensurables en el sistema cuya base es* 10, *son las potencias de* 10 *cuyos esponentes son enteros, positivos ó negativos, es decir, los números* 1, 10, 100, 1000....$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$,....

En primer lugar hemos visto que las potencias de 10, cuyos esponentes son enteros positivos ó negativos, tienen respectivamente logaritmos enteros positivos ó negativos.

Sea pues n un número fraccionario, ó un número entero que no sea potencia de 10: digo que su logaritmo en el sistema cuya base es 10, es inconmensurable.

En efecto, sea x su logaritmo, será $10^x=n$: x no puede ser entero positivo ni negativo, pues si tal fuese, 10^x ó su igual n seria una potencia de 10, contra el supuesto.

Supongamos que x sea un número fraccionario $\frac{25}{3}$, y consideremos sucesivamente los dos casos, n fraccionario y n entero.

1.° Si n fuese un número fraccionario, lo reduciríamos á fraccion irreducible. Siendo $\frac{25}{3}$ el logaritmo de la fraccion irreducible n, seria $10^{\frac{25}{3}}=n$, ó $10^{25}=n^3$; igualdad imposible, pues el primer miembro es entero, y el segundo es una fraccion irreducible (*Arit. núm.* 113).

2.° Sea n número entero: tenemos $10^{\frac{25}{3}}=n$, ó $10^{25}=n^3$, ó $2^{25}\times5^{25}=n^3$. Para que esta igualdad se verifique, es menester que el entero n tenga por únicos factores simples al 2 y al 5, es decir que n ha de ser de la forma $2^p\times5^q$, siendo p y q enteros y positivos. Por consiguiente $2^{25}\times5^{25}=\left(2^p\times5^q\right)^3$, ó $2^{25}\times5^{25}=2^{3p}\times5^{3q}$; y para que esta última igualdad se verifique, es menester (*Arit. núm.* 72) que $25=3p$, $25=3q$, ó $p=q=\frac{25}{3}$, es decir que los enteros p y q sean iguales á la fraccion irreducible $\frac{25}{3}$; lo que es absurdo (*Arit. núm.* 96). Queda pues demostrado que el logaritmo del número fraccionario ó entero que no es potencia de 10, no puede ser entero ni fraccionario: y como ahora mismo vamos á ver que puede hallarse su valor con la aproximacion que se quiera, se infiere que dicho logaritmo es inconmensurable (*Comp.*[to] *de la Aritm. número* 15).

213. *Hallar aproximadamente los valores de los logaritmos de los números enteros comprendidos entre* 1 *y* 10, *entre* 10 *y* 100, *entre* 100 *y* 1000, *etc.*

Sea a uno de estos números, cuyo logaritmo queremos hallar en menos de la parte alícuota $\frac{1}{q}$ de la unidad: sea n el número de cifras de a^q, será

$$a^q > 10^{n-1} \text{ y } a^q < 10^n;$$

y tomando logaritmos de ambos miembros,

$$q \log a > n - 1, \text{ y } q \log a < n;$$

y por consiguiente

$$\log a > \frac{n-1}{q}, \text{ y } \log a < \frac{n}{q}:$$

luego $\frac{n-1}{q}$ es el logaritmo de a en menos de $\frac{1}{q}$.

Luego *para hallar el logaritmo ordinario de un número entero en menos de una parte alícuota de la unidad, se elevará dicho número á la potencia indicada por el denominador de la parte alícuota, y el número de sus cifras disminuido en una unidad se dividirá por el mismo denominador.*

Por ejemplo, para hallar el logaritmo de 2 en menos de $\frac{1}{10}$, elevaré 2 á la décima potencia, y tendré 1024; dividiré el número de sus cifras disminuido en 1, que es 3, por 10, y resultará 0,3, que será el logaritmo de 2 con menor error que 0,1.

Del mismo modo se podria hallar el logaritmo de otro número entero cualquiera; pero para la construccion de las tablas no hay necesidad de hallar directamente mas que los logaritmos de los números primos, pues los de los compuestos se hallan sumando los logaritmos de sus factores (*Núm.* 209).

El método que acabamos de esponer para la construccion de las tablas de logaritmos, solo sirve para hacer ver la posibilidad de su construccion. En el álgebra superior se verá un método muy sencillo para la construccion de estas tablas.

Artículo 3.°

Operaciones por medio de los logaritmos.

214. Veamos ahora cómo se efectuarán por medio de las tablas de logaritmos la multiplicacion, la division, la elevacion á potencias y la estraccion de raices.

Para multiplicar varios números, se hallarán sus logaritmos en las tablas, y se sumarán, y la suma será igual al logaritmo del *producto; hallando en seguida en las tablas el número correspondiente á este logaritmo, se tendrá el producto.*

Para dividir dos números, se hallarán sus logaritmos, y se restarán, y el resto será el logaritmo del cociente; hallando en seguida en las tablas el número correspondiente á este logaritmo, se tendrá el cociente.

Para elevar un número á una potencia, se halla el logaritmo del número, y se multiplica por el esponente de la potencia, y el producto será el logaritmo de la potencia; hallando en seguida el número correspondiente á este logaritmo, se tendrá la potencia.

Para estraer una raiz de un número, se halla el logaritmo del número, y se divide por el índice de la raiz, y el cociente será el logaritmo de la raiz; hallando en seguida el número correspondiente á este logaritmo, se tendrá la raiz.

Vemos que por medio de los logaritmos se abrevian muchísimo los cálculos, pues la multiplicacion se convierte en adicion, la division en sustraccion, la elevacion á potencias en multiplicacion, y la estraccion de raices en division.

ARTÍCULO 4.º

Propiedades particulares de los logaritmos ordinarios.

215. En adelante por la palabra *logaritmo* de un número se entenderá el logaritmo ordinario de dicho número.

Los valores aproximados de los logaritmos inconmensurables se hallan siempre en decimales: la parte entera de un logaritmo se llama *característica*, y la parte decimal se llama *mantisa*.

211. *La característica del logaritmo de un número mayor que 1 tiene tantas unidades como cifras menos una tiene la parte entera del número.*

En efecto, sabemos que $\log 10^n = n$; y pues 10^n es la unidad seguida de n ceros, 10^n tiene $n+1$ cifras; luego el teorema se verifica cuando el número es una potencia de la base 10.

Supongamos ahora que el número esté comprendido entre dos potencias de 10, y que la parte entera del número tenga n cifras: estará comprendido dicho número entre 10^{n-1} y 10^n, y por consiguiente su logaritmo estará comprendido entre los logaritmos de estos dos números, es decir, entre $n-1$ y n; dicho logaritmo constará pues de $n-1$ unidades y de una fraccion; luego su característica será $n-1$.

Asi, el logaritmo del número 4546, 2 tendrá 3 de característica.

217. Se llama *complemento* de un logaritmo positivo la cantidad que falta al logaritmo para valer 10 (*a*).

Asi, el complemento de 3,7804321 es 6,2195679; el complemento de 0,3010300 es 9,6989700.

Observando cómo se han hallado estos complementos, resulta la siguiente regla abreviada: *para hallar el complemento de un logaritmo positivo, se restan todas sus cifras de* 9, *excepto la última significativa de la derecha, que se resta de* 10.

El complemento de un logaritmo tal como log 357, se indica asi: C.[to] log 457, y se lee: complemento del logaritmo de 457.

218. Por medio del complemento se puede convertir la operacion de restar un logaritmo positivo de otro en la de sumar.

Sea L el minuendo y l el sustraendo: la diferencia será $L-l=L+(10-l)-10=L+C.^{to}\,l-10$.

Luego, *para restar de un logaritmo otro positivo, se añade al minuendo el complemento del sustraendo, y se resta* 10 *de la suma.*

Ejemplo. Hallar por medio del complemento la diferencia entre los logaritmos 6,8932146 y 5,3218732.

Cálculo.

Minuendo................	6,8932146
C.[to] del sustraendo.......	4.6781268
Diferencia...............	1,5713414

Puede comprobarse este resultado, hallando directamente la diferencia de los dos números dados.

219. Se ha visto (*Núm.* 207), que el logaritmo de una fraccion propia es negativo: vamos á demostrarlo nuevamente.

El logaritmo de un quebrado es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador; y pues, cuando

(*a*) Si el logaritmo es mayor que 10 (lo que es muy raro, pues los números que se consideran en los cálculos, son casi siempre menores que 10^{10}), el complemento del logaritmo será la cantidad que falta al logaritmo para valer la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la característica.

la base es mayor que 1, los logaritmos crecen creciendo los números (*Núm.* 207), se infiere que el logaritmo del denominador es mayor que el logaritmo del numerador; y por consiguiente el logaritmo del quebrado propio será un número negativo.

Asi, $\log\frac{3}{4}=\log 3-\log 4=0{,}4771213-0{,}6020600=$ $-0{,}1249387$.

220. En vez del logaritmo negativo de un quebrado propio se puede hallar, y es preferible, un logaritmo cuya característica sea negativa, y cuya mantisa sea positiva. Para esto se añade, segun la regla (*Núm.* 218), al logaritmo del numerador el complemento del logaritmo del denominador, y se restan 10 de la parte entera de la suma.

En el ejemplo propuesto tendremos

$$\log\frac{3}{4}=\log 3+\text{C.}^{\text{to}}\log 4-10=\bar{1}{,}8750613.$$

Se coloca el signo — sobre la característica para indicar que ella es negativa y que la mantisa es positiva; de modo que $\bar{1}{,}8750613=-1+0{,}8750613$.

221. Un logaritmo enteramente negativo se transformará en otro equivalente cuya característica sola sea negativa, hallando el complemento de dicho logaritmo tomado positivamente, y restando 10 de la parte entera del complemento. Esta regla está incluida en la del número 218, considerando que el minuendo es cero; y tambien se puede demostrar directamente, añadiendo y quitando 10 á dicho logaritmo negativo.

Ejemplo. Transformar el logaritmo negativo $-2{,}1249387$ en su equivalente de característica negativa y mantisa positiva.

El complemento del valor absoluto de este logaritmo es $7{,}8750613$; luego $-2{,}1249387=\bar{3}{,}8750613$.

Al contrario, un logaritmo de característica negativa y mantisa positiva se transforma fácilmente en su equivalente enteramente negativo.

Asi, $\bar{3}{,}8750612=-3+0{,}8750613=-2{,}1249387$.

222. *Multiplicar y dividir un logaritmo de característica negativa y mantisa positiva por un número entero.*

Las operaciones de sumar ó restar logaritmos de característica negativa y mantisa positiva no ofrecen ninguna dificultad, teniendo presente lo que estos logaritmos significan en realidad. Tampoco ofrecen gran dificultad las operaciones de multiplicar ó dividir dichos logaritmos por un número entero, como lo vamos á ver en los ejemplos siguientes:

1.° $\overline{3},7583214 \times 4 = (-3+0,7583214) \times 4 = -12+ 3,0332856 = \overline{9},0332856$.

2.° $\overline{6},4325601 : 3 = (-6+0,4325601) : 3 = -2+ 0,1441867 = \overline{2},1441867$.

3.° $\overline{9},0332856 : 4 = (-9+0,0332956) : 4$. Como la parte negativa no es divisible por 4, quito y añado al dividendo las unidades suficientes, que actualmente son 3, para que la parte negativa sea divisible por 4, y tendré

$(-12+3,0332856) : 4 = -3+0,7583214 = \overline{3},7583214$.

Nota. En adelante, mientras no se advierta lo contrario, los logaritmos negativos tendrán la característica negativa y la mantisa positiva.

223. *Si un número se multiplica ó parte por* 10^m, *la característica de su logaritmo aumentará ó disminuirá en* m *unidades, pero la mantisa no se alterará.*

1.° Tenemos $\log(a \times 10^m) = \log a + \log 10^m$; y como $\log 10^m = m$, será $\log(a \times 10^m) = \log a + m$.

La adicion de un número entero m á un logaritmo aumenta á la característica en m, pero la mantisa no sufre alteracion; y por tanto queda demostrada la primera parte del teorema.

2.° Tenemos $\log \frac{a}{10^m} = \log a - \log 10^m = \log a - m$.

Ahora, si $\log a$ tiene por característica m ó un número mayor, es claro, segun esta identidad, que $\log \frac{a}{10^m}$ tendrá m unidades menos de característica; pero la mantisa no variará.

Si la característica de $\log a$ es menor que m, restando m de ella, la característica de $\log \frac{a}{10^m}$ será un número negativo, menor en m que la característica del $\log a$; pero la mantisa queda la misma.

Corolario. *La mantisa del logaritmo de un número decimal no varía, aunque se mueva la coma á derecha ó izquierda.*

Segun esto, los logaritmos de los números 4, 40, 400, etc. 0,4; 0,04; 0,004; etc. tienen la misma mantisa.

Recíprocamente, *si dos logaritmos se diferencian en* m *unidades, el número correspondiente al mayor es igual al número correspondiente al menor multiplicado por* 10^m; pues, si los dos logaritmos son l y $l+m$, los números correspondientes son 10^l y $10^{l+m}=10^l \times 10^m$.

224. *La característica negativa del logaritmo de una fraccion propia decimal tiene tantas unidades como ceros mas uno hay entre la coma y la primera cifra significativa.*

Sea f la fraccion propia decimal, m el número de ceros que hay entre la coma y la primera cifra significativa; digo que el logaritmo de esta fraccion tendrá $-(m+1)$ de característica, siendo su mantisa positiva, como ya hemos convenido (*Núm.* 222.)

En efecto, si movemos la coma hasta que quede entre la primera cifra significativa y la siguiente, la habremos movido $m+1$ lugares hácia la derecha, y por tanto se habrá multiplicado la fraccion propuesta por 10^{m+1}; luego si llamamos p al producto, tendremos $p=f\times 10^{m+1}$. Tomando los logaritmos de los dos miembros de esta igualdad, será

$$\log p=\log f+(m+1),$$

de donde

$$\log f=\log p-(m+1).$$

Como el log p tiene 0 de característica, se infiere que log f tendrá $-(m+1)$ de característica.

Asi, log $0{,}004=\bar{3}{,}6020600$.

Nota. Los teoremas (*Núms.* 216, 223 *y* 224), que solo se verifican en el sistema de logaritmos cuya base es 10, han motivado la preferencia de este sistema.

Artículo 5.°

Uso de las tablas.

Para esplicar el uso de las tablas, nos referiremos á las tablas de Lalande, estendidas á siete decimales por M. Marie, las cuales contienen los logaritmos de los números enteros desde 1 hasta 10000 (*a*).

(*a*) Las tablas de Callet contienen los logaritmos de los números en-

225. *Dado un número, hallar su logaritmo por medio de las tablas.*

1.° Si el número, cuyo logaritmo se quiere hallar, es entero y menor que 10000, se le hallará fácilmente en una de las columnas de los números, y á su lado en la columna de los logaritmos se hallará su logaritmo.

Asi, log 3549=5,5501060.

2.° Si el número es entero y mayor que 10000, se separan de su derecha por medio de una coma el menor número posible de cifras, para que el número que queda á la izquierda no sea mayor que 10000; y en seguida se hallará su logaritmo, como lo vamos á ver.

Hallar el logaritmo de 257832.

Desde luego sabemos que la característica del logaritmo de este número es 5.

Para hallar la mantisa, separo las dos primeras cifras de la derecha, y tendré el número 2578,52, menor que 10000, y cuyo logaritmo tiene la misma mantisa que el logaritmo del número propuesto (*Núm.* 223).

Tenemos pues que hallar el logaritmo del número 2578,32.

Este número está comprendido entre 2578 y 2579; luego su logaritmo estará tambien comprendido entre los logaritmos de estos dos números.

El logaritmo de 2578 es 3,4112829; y como 2578,32 es mayor que 2578, su logaritmo será tambien mayor que el de este (*Núm.* 207); luego será menester añadir al logaritmo de 2578 una cierta cantidad x, para tener el logaritmo del número 2578,32.

Esta cantidad x se halla, admitiendo que *las diferencias de los números son proporcionales á las diferencias de sus logaritmos;* proporcion inexacta, pero cuyo error, siendo estas diferencias las mismas, es tanto menor, cuanto mayores son los números; y hé aquí por qué, cuando se separan de la derecha

---

teros desde 1 hasta 108000, con siete cifras decimales. Las tablas de Calbet, impresas en Barcelona en estos últimos tiempos, y mas completas que las de Callet en la parte trigonométrica, contienen los logaritmos de los números enteros desde 1 hasta 100000, con siete cifras decimales. Las tablas de Vazquez Queipo, que acaban de salir á luz, contienen los logaritmos de los números enteros desde 1 hasta 11000, con seis cifras decimales. Todas estas tablas son apreciables, y á los profesores toca en caso necesario el esplicar su uso.

del número varias cifras, para que el número no pase de 10000, se debe separar el menor número posible.

En el caso presente la diferencia de los números 2578 y 2579 es 1, la diferencia de sus logaritmos, que está calculada en las tablas, es 1684 diezmillonésimas, y la diferencia entre los números 2578 y 2578,32 es 0,32: tendremos pues la proporcion 1 : 0,32 : : 1684 : x=539 diezmillonésimas.

Luego log 2578,32=3,4113368, y por consiguiente

log 257832=5,4113368.

Ejemplo. Hallar el logaritmo de 535861.

log 5358=3,7290027; 1 : 0,61 : : 811 : x=495.

$$\begin{array}{l} 495 \\ \hline \log 5358{,}61=3{,}7290522 \\ \log 535861\ =5{,}7290522 \end{array}$$

Nota. Para hallar el valor de x, puede escusarse en la práctica la formacion de la proporcion; y solo hay que multiplicar la diferencia de los logaritmos de los números consecutivos que comprenden al número dado, por la diferencia que hay entre el número dado y el número entero inmediato menor.

3.° Si el número es fraccionario, se hallará fácilmente su logaritmo, sabiendo ya hallar el logaritmo de un entero.

Ejemplos. 1.° log 7,3214=0,8645941.

2.° log 0,00843217=$\bar{3}$,9259394.

226. *Dado un logaritmo, hallar por medio de las tablas su número correspondiente.*

1.er *caso.* La característica del logaritmo es 3.

1.° Si la mantisa se halla exactamente en las tablas, á su lado se hallará el número correspondiente.

Asi, 3,5612207=log 3641.

2.° Si la mantisa no se halla exactamente en las tablas, se hallará el logaritmo inmediato menor y su número correspondiente, y en seguida se hallará el número correspondiente al logaritmo dado; como lo vamos á ver.

Hallar el número correspondiente al logaritmo 3,6483216.

El logaritmo inmediato menor es 3,6482624 que corresponde al número 4449. Como el logaritmo dado es mayor que este logaritmo, el número que buscamos ha de ser tambien mayor que 4449. Para hallar la cantidad x, que hay que añadir á este número para tener el número pedido, resto del logaritmo dado su inmediato menor y la diferencia es 592 diezmillonésimas, y admito, como en el pròblema anterior, que las diferencias de los números son proporcionales á las diferencias de sus logaritmos; y como en el caso actual la diferencia de los logaritmos consecutivos, que comprenden al logaritmo dado, es 976 diezmillonésimas, tendré

$$1 : x :: 976 : 592, x=\frac{592}{976}=0,607.$$

Es seguro que las dos primeras cifras decimales de este cociente son exactas, y la tercera es tambien exacta casi siempre.

Luego $3,6483216=\log 4449,607.$

Ejemplo. Hallar el número cuyo logaritmo es 3,5370214.

$$\begin{array}{ll} 3,5370214 & \\ \underline{3,5369370} \ldots & 3443 \\ \quad 844 & \end{array}$$

$$1261 : 1 :: 844 : x=0,669.$$

Luego el número pedido es 3443,669.

Nota. Para hallar el valor de x, solo hay que partir la diferencia entre el logaritmo dado y su inmediato menor por la diferencia de los logaritmos consecutivos que comprenden al logaritmo propuesto; por lo que en la práctica puede escusarse la proporcion.

2.° *caso.* Si la característica del logaritmo no es 3, se hallará el número correspondiente al logaritmo dado, suponiendo que su característica es 3 (a). En seguida se hallará fácilmente el número correspondiente al logaritmo dado, aten-

---

(a) Se prefiere que la característica sea 3, esto es la mayor de las tablas, porque de este modo los números correspondientes á los dos logaritmos, que comprenden al logaritmo dado, son mucho mayores que si la característica fuese 2 ó 1 ó 0, y por tanto la proporcion (*Núm.* 200, 2.°) es menos errónea.

Para probar que la diferencia de los logaritmos de dos números consecutivos x y $x+1$ es tanto menor cuanto mayor sea x, tenemos $\log(x+1)-\log x=\log\left(\frac{x+1}{x}\right)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Si x crece, $\frac{1}{x}$ disminuye, $1+\frac{1}{x}$ disminuye tambien; luego $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ disminuye, es decir, disminuye la diferencia $\log(x+1)-\log x$.

diendo al teorema recíproco del número 223; ó mejor de este otro modo: si la característica del logaritmo dado es positiva, se colocará la coma decimal de modo que dicha característica tenga una cantidad menos que el número de cifras de la parte entera del número correspondiente (*Núm.* 216); si la característica del logaritmo dado es negativa (siendo la mantisa positiva), se colocará la coma de modo que dicha característica tenga una unidad mas que el número de ceros que hay entre la coma y la primera cifra significativa (*Núm.* 224).

Ejemplos. 1.° $2,2146801=\log 163,9381$.

2.° $\bar{4},6843066=\log 0,0004834$.

Nota. Si el logaritmo dado es enteramente negativo, se le transforma en otro equivalente cuya característica solo sea negativa, y se halla en seguida el número correspondiente á este logaritmo.

227. *Ejemplos de aplicaciones numéricas de los logaritmos.*

1.° Hallar el cuarto término de la proporcion

$$17 : 328 :: 275 : x.$$

Indicando el cálculo logarítmico, será

$$\log x=\log 328+\log 275-\log 17.$$

Cálculo.

$$\begin{array}{r}2,5158738\\ 2,4393327\\ \hline 4,9552065\\ 1,2304489\\ \hline 3,7247576\end{array}=\log x,\ x=5305,882.$$

2.° $$x=\frac{7340\times 3549}{681,8\times 593,1}.$$

$$\log x=\log 7340+\log 3549-\log 681,8-\log 593,1.$$

Como en este caso hay que efectuar dos adiciones y una sustraccion, es preferible convertir la operacion en una adicion por medio del complemento.

Tendremos

$$\log x=\log 7340+\log 3549+\text{C.}^{\text{to}}\log 681,8+\text{C.}^{\text{to}}\log 593,1-20.$$

Cálculo.

$$\begin{array}{r}3,8656961\\ 3,5501060\\ 7,1663430\\ 7,2268721\\ \hline 1,8090172\end{array}=\log x,\ x=64,41948.$$

3.° $$x=(0,034)^5$$

$$\log x=5 \log 0,034.$$

Cálculo.

$$\begin{array}{r} \bar{2},5314789 \\ 5 \\ \hline \bar{8},6573945=\log x, \end{array}$$

$$x=0,00000004543.$$

Se pudieran hallar además otras tres cifras decimales por medio de la proporcion (*Núm.* 225, 2.°); pero en el ejemplo actual la aproximacion obtenida será mas que suficiente, cualquiera que sea la cuestion cuya incógnita sea esta x.

4.° $$x=\sqrt[5]{\frac{3}{7}}.$$

$$\log x=\frac{\log 3+\text{C.}^{\text{to}} \log 7-10}{5}.$$

Cálculo.

$$\begin{array}{r} 0,4771213 \\ 9,1549020 \\ \hline \bar{1},6320233 \end{array}$$

$$\log x=\bar{1},9264035,\ x=0,8441.$$

5.° $$x=-\frac{2512}{35}.$$

Siempre que la cantidad, á que se aplica el cálculo logarítmico, sea negativa, se prescinde de su signo, se halla el número correspondiente, y en seguida se toma este número negativamente.

Tendremos, pues, primeramente $\frac{2512}{35}$, cuyo logaritmo es 1,8595516, y el número correspondiente 71,77143; luego $x=-71,77143$.

228. *Ejemplos de aplicacion de los logaritmos á los cálculos algébricos.*

1.° $$x=\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

$$\log x=\log (a^2+b^2)-\log (a+b).$$

2.° $$x=\frac{a^2-b^2}{bd}.$$

Para poder hallar el logaritmo del numerador, sin efectuar la operacion indicada en él, descompongo a^2-b^2 en el producto $(a+b)(a-b)$, y tendré $x=\frac{(a+b)(a-b)}{bd}$.

Por consiguiente

$$\log x=\log(a+b)+\log(a-b)-\log b-\log d=$$
$$\log(a+b)+\log(a-b)+\text{C.}^{\text{te}}\log b+\text{C.}^{\text{te}}\log d-20.$$

3.° $$x=\left(\frac{bc}{d}\right)^3.$$

$$\log x=3(\log b+\log c-\log d).$$

4.° $$x=\sqrt[3]{\frac{(a^2-b^2)c^3}{a^2}}$$

$$\log x=\frac{1}{3}\Big(\log(a+b)+\log(a-b)\Big)+\log c-\frac{2}{3}\log a.$$

Artículo 6.°

Ecuaciones esponenciales.

229. Se llama ecuacion *esponencial* la ecuacion que tiene á la incógnita por esponente.

Algunas ecuaciones esponenciales se resuelven fácilmente por medio de los logaritmos.

Ejemplos. 1.° Sea la ecuacion $a^x=b$: tomando los logaritmos de ambos miembros, será $x\log a=\log b$, y por consiguiente $x=\frac{\log b}{\log a}$.

2.° Sea la ecuacion $ma^{x^2}=nb^x$: tomando logaritmos, será

$$\log m+x^2\log a=\log n+x\log b,$$

ecuacion completa de segundo grado, que ya sabemos resolver.

3.° Sea la ecuacion $a^{b^x}=c$: hagamos $b^x=y$, será $a^y=c$, de donde resulta $y=\frac{\log b}{\log a}$. Conocido el valor de y, la ecuacion $b^x=y$ nos dará $x=\frac{\log y}{\log b}$. Si se quiere sustituir aqui el valor de log y, que es log y=log log c—log log a, tendremos

$$x=\frac{\log\log c-\log\log a}{\log b}.$$

La ecuacion esponencial $a^x+b^x=c$ no se puede resolver por este medio (*a*).

230. Problema. *Construidas unas tablas de logaritmos, construir por medio de ellas otras tablas, siendo otra la base.*

Sea n un número, b la base del nuevo sistema, x el logaritmo de n en este sistema: tenemos $b^x=n$, y por consiguiente

$$x=\frac{\log n}{\log b}=\frac{1}{\log b}\times\log n.$$

Luego, *para hallar el logaritmo de un número en un nuevo sistema, se multiplica su logaritmo en el sistema primero por la unidad dividida por el logaritmo antiguo de la nueva base.*

La cantidad constante $\frac{1}{\log b}$, por la que se multiplican los logaritmos antiguos para tener los nuevos, se llama *módulo* del nuevo sistema de logaritmos con respecto al sistema dado.

Nota. Si se tratase de hallar el logaritmo nuevo de un solo número, no convendria transformar la espresion $\frac{\log n}{\log b}$ en su equivalente $\frac{1}{\log b}\times\log n$; pues por la primera se obtendria dicho logaritmo nuevo por una division, y por la segunda se obtendria el mismo logaritmo por una division y una multiplicacion. Mas si, como lo enuncia el problema, se trata de construir unas tablas nuevas, la espresion $\frac{1}{\log b}\times\log n$ será

(*a*) *Cirodde* en su álgebra parece contradecir este nuestro aserto, pues pretende resolver la ecuacion $Aa^{mx+m'}+Bb^{nx+n'}+Cc^{px+p'}+\ldots=0$ la cual comprende como caso particular á la ecuacion $a^x+b^x=c$. Deseamos que alguno de nuestros grandes matemáticos, que han adoptado con aplauso la resolucion indicada por *Cirodde*, nos remita el valor 4,02951 de x de la ecuacion $2^x+3^x=100$ deducido por el método de este autor, aunque sólo sea aproximado hasta las centésimas. La ecuacion trascendente $a^x+b^x=c$ se resuelve por cualquiera de los métodos de resolucion de las ecuaciones trascendentes; por ejemplo, por el antiguo de falsa posicion empleado por *Euler* en la resolucion de estas ecuaciones, método que el célebre *Vallejo* nos dió como original suyo.

preferible á la $\frac{\log n}{\log b}$; porque, segun la primera, obtenido el módulo $\frac{1}{\log b}$ en fraccion decimal, se hallará cada logaritmo por una multiplicacion, mientras que por la segunda se hallaria por una division.

CAPÍTULO III.

Progresiones.

ARTÍCULO 1.°

Progresiones por diferencia ó aritméticas.

231. Se llama *progresion por diferencia* ó *progresion aritmética* una série de términos, tales que cada uno escede al inmediato anterior en una misma cantidad. Esta cantidad se llama *diferencia* de la progresion.

Cuando la diferencia de la progresion es positiva, los términos van aumentando, y por lo tanto la progresion se llama *creciente*; y cuando la diferencia es negativa, los términos van disminuyendo, y la progresion se llama *decreciente*.

Asi, la série de términos

$$3, 5, 7, 9, 11 \ldots\ldots (1)$$

es una progresion aritmética creciente, cuya diferencia es 2; y la série de términos

$$25, 21, 17, 13, 9 \ldots\ldots (2)$$

es una progresion aritmética decreciente, cuya diferencia es -4.

232. Segun la definicion de la progresion por diferencia, el segundo término es igual al primero mas la diferencia; el tercero es igual al segundo mas la diferencia, ó al primero mas dos veces la diferencia; el cuarto es igual al tercero mas la diferencia, ó al primero mas tres veces la diferencia; y asi sucesivamente: luego, en general, *un término cualquiera de una progresion por diferencia es igual al primero mas tantas veces la diferencia como términos hay antes de él.*

Por medio de esta regla se podrá hallar un término cualquiera de una progresion por diferencia, conociendo el primer término, la diferencia y el número de términos que hay desde el primero hasta él.

Ejemplos. 1.° Hallar el término décimo de la progresion (1).

El término décimo valdrá $3+2\times9=21$.

2.° Hallar el término octavo de la progresion (2).

El termino octavo valdrá $25+7\times-4=-3$.

3.° *Hallar el último término de una progresion por diferencia.*

Sea a el primer término, d la diferencia de la progresion, n el número total de términos, y u el último: tendremos

$$u=a+(n-1)d,$$

ecuacion que puede servir para hallar una cualquiera de las cuatro cantidades u, a, n y d, dadas las otras tres (*Núm.* 107).

233. *Interpolar entre dos números dados un cierto número de medios por diferencia;* es decir, *dados el primero y último términos de una progresion por diferencia y el número de términos intermedios, formar esta progresion.*

Es claro que el problema quedará resuelto, si llegamos á conocer la diferencia de la progresion; pues entonces será muy fácil la formacion de esta (*Núm.* 231).

Despejemos pues n en la ecuacion $u=a+(n-1)d$, y será

$$d=\frac{u-a}{n-1};$$

es decir, que *la diferencia de la progresion se halla restando del último término el primero, y partiendo el resto por el número de términos menos uno.*

Ejemplo. Interpolar 6 medios por diferencia entre los números 4 y 21.

La diferencia de la progresion será $\frac{21-4}{7}=2\frac{3}{7}$; luego la progresion será

$$4,\ 6\frac{3}{7},\ 8\frac{6}{7},\ 11\frac{2}{7},\ 13\frac{5}{7},\ 16\frac{1}{7},\ 18\frac{4}{7},\ 21.$$

234. *Hallar la suma de los términos de una progresion por diferencia.*

Sea a el primer término, d la diferencia, n el número de términos, u el último y s la suma de todos: la progresion será

$$a,\ a+d,\ a+2d\ldots\ldots\ u-2d,\ u-d,\ u.$$

Tendremos
$s=a+(a+d)+(a+2d)+\dots\dots+(u-2d)+(u-d)+u,$
y tambien
$s=u+(u-d)+(u-2d)+\dots\dots+(a+2d)+(a+d)+a.$
Sumando ordenadamente estas dos igualdades, es
$2s=(a+u)+(a+u)+(a+u)+\dots+(a+u)+(a+u)+(a+u).$
En esta suma entra $a+u$ tantas veces como términos tiene la progresion; luego $2s=(a+u)n$, y por consiguiente

$$s=\frac{(a+u)n}{2}.$$

Luego *la suma de los términos de una progresion por diferencia es igual á la mitad del producto de la suma de los dos términos estremos por el número de términos.*

* 235. De las dos ecuaciones

$$u=a+(n-1)d,\quad s=\frac{(a+u)n}{2}$$

pueden deducirse dos cualesquiera de las cinco cantidades a, d, n, u y s, dadas las otras tres.

Como cinco cantidades pueden combinarse tres á tres de diez modos (*Núm.* 131), se podrán proponer los diez problemas siguientes.

1.° *Dados* a, d *y* u, *hallar* n *y* s.

Tendremos $n=\dfrac{u-a+d}{d}$, $s=\dfrac{(a+u)(u-a+d)}{2d}$.

2.° *Dados* a, d *y* n, *hallar* u *y* s.

$$u=a+(n-1)d,\quad s=\frac{n(2a+dn-d)}{2}.$$

3.° *Dados* a, d *y* s, *hallar* u *y* n.

$$n=\frac{d-2a\pm\sqrt{(d-2a)^2+8ds}}{2d},\quad u=a+(n-1)d.$$

4.° *Dados* a, n *y* u, *hallar* d *y* s.

$$d=\frac{u-a}{n-1},\quad s=\frac{(a+u)n}{2}.$$

5.° *Dados* a, u y s, *hallar* d y n.

$$n=\frac{2s}{a+u},\ d=\frac{u^2-a^2}{2s-a-u}.$$

6.° *Dados* a, n y s, *hallar* d y u.

$$d=\frac{2(s-an)}{n(n-1)},\ u=\frac{2s}{n}-a.$$

7.° *Dados* d, u y n, *hallar* a y s.

$$a=u-(n-1)d,\ s=\frac{(2u-nd+d)n}{2}.$$

8.° *Dados* d, u y s, *hallar* a y n.

$$n=\frac{2u+d\pm\sqrt{(2u+d)^2-8ds}}{2d},\ a=u-(n-1)d.$$

9.° *Dados* d, n y s, *hallar* a y u.

$$a=\frac{2s-n(n-1)d}{2n},\ u=\frac{2s+n(n-1)d}{2n}.$$

10.° *Dados* u, n y s, *hallar* a y d.

$$a=\frac{2s}{n}-u,\ d=\frac{2(nu-s)}{n(n-1)}.$$

Ejemplos. * 1.° *Un cuerpo al caer en la atmósfera, baja en el primer segundo 4,9 metros, en el siguiente segundo baja 3×4,9 metros, en el tercer segundo baja 5×4,9 metros, y asi sucesivamente. ¿Cuántos segundos tardará en bajar de una altura de 400 metros?*

Las alturas bajadas por el cuerpo en los segundos primero, segundo, tercero, etc. son respectivamente.

$$4,9;\ 3\times4,9;\ 5\times4,9;\ldots$$

y la suma de todas estas cantidades debe ser 400. Conocemos pues $a=4,9$; $d=2\times4,9$; $s=400$, y se pide el número de términos n de esta progresion.

Hemos hallado en el problema 3.°

$$n=\frac{d-2a\pm\sqrt{(d-2a)^2+8ds}}{2d};$$

mas como actualmente $d=2a$, el valor de n será

$$n=\frac{\sqrt{8ds}}{2d},\ \text{ó}\ n=\sqrt{\frac{2s}{d}}\ \text{(a)}.$$

Sustituyendo ahora los valores de s y d, será

$$n=\sqrt{\frac{400}{4,9}}=\frac{\sqrt{4000}}{7}=9'',04.$$

2.° *Un obrero tiene que regar con una cuba de agua cada uno de 100 árboles* A_1, A_2, A_3,... *: estos árboles están colocados en línea recta y cada uno dista del inmediato anterior y posterior* 5 *metros; y el pozo* P, *de donde saca el agua, está tambien á* 5 *metros de distancia del primer árbol. ¿Cuántos metros tendrá que andar el obrero para regar los* 100 *árboles y volver al pozo?*

o ● ● ● .... ●
P A_1 A_2 A_3 A_{100}

Para regar el primer árbol y volver al pozo, anda el obrero 10 metros; para regar el segundo árbol y volver al pozo, anda 20 metros; para regar el tercer árbol y volver al pozo, anda 30 metros; etc. Luego el total de metros andados por el obrero, para regar los 100 árboles y volver al pozo, es la suma de los términos de la progresion aritmética

10, 20, 30......

Hallemos el último término, que ahora es el centésimo: dicho término será $10+99\times10=1000$: luego (*Núm.* 234) $s=(1000+10)\times50=50500$ metros, ó 9 leguas próximamente (*Arit. pág.* 237).

Artículo 3.°

Progresiones por cociente ó geométricas.

236. Se llama ***progresion por cociente*** ó ***progresion geométrica*** una série de términos, tales que cada uno es igual al inmediato anterior multiplicado por un mismo número. Este número se llama *razon* de la progresion.

(*a*) Este valor de n, que es el número de segundos que tarda el cuerpo en bajar, es el mismo que resultaria de la fórmula conocida de la caida de los graves $e=\frac{gt^2}{2}$, que da $t=\sqrt{\frac{2e}{g}}$.

Cuando la razon de la progresion es mayor que la unidad, los términos van aumentando, y por lo tanto la progresion se llama *creciente*; y cuando la razon es menor que la unidad, los términos van disminuyendo, y la progresion se llama *decreciente*.

Asi, la série de términos

$$3,\ 12,\ 48,\ 192, \ldots .\ (1)$$

es una progresion geométrica creciente, cuya razon es 4.

La série de términos

$$45,\ 15,\ 5,\ \frac{5}{3}, \ldots .\ (2)$$

es una progresion geométrica decreciente, cuya razon es $\frac{1}{3}$.

237. Segun la definicion de la progresion por cociente, el segundo término es igual al primero multiplicado por la razon; el tercero es igual al segundo multiplicado por la razon, ó al primero multiplicado por la segunda potencia de la razon; el cuarto es igual al tercero multiplicado por la razon, ó al primero multiplicado por la tercera potencia de la razon; y asi sucesivamente: luego, en general, *un término cualquiera de una progresion por cociente es igual al primero multiplicado por una potencia de la razon, cuyo esponente es el número de términos que hay antes de él.*

Por medio de esta regla se podrá hallar un término cualquiera de una progresion por cociente, conociendo el primer término, la razon y el número de términos que hay desde el primero hasta él.

Ejemplos. 1.° Hallar el término décimo de la progresion (1).

Segun dicha regla el término décimo será $3 \times 4^9 = 786432$.

2.° Hallar el término octavo de la progresion (2).

El término octavo de esta progresion será $45 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{5}{243}$.

3.° *Hallar el último término de una progresion por cociente.*

Sea a el primer término, q la razon, n el número de términos y u el último: tendremos

$$u = aq^{n-1},$$

ecuacion que puede servir para hallar cualquiera de las cuatro cantidades u, a, q y n dadas las otras tres.

238. *Interpolar entre dos números dados un cierto número de medios geométricos*, es decir, *dados el primero y último términos de una progresion por cociente y el número de términos intermedios, formar esta progresion.*

Es claro que este problema quedará resuelto, si llegamos á conocer la razon de la progresion, pues entonces será muy fácil la formacion de esta.

Despejemos pues q en la ecuacion $u=aq^{n-1}$, y será

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}};$$

es decir, que *la razon de la progresion geométrica se hallará partiendo el último término por el primero, y estrayendo del cociente la raiz cuyo índice es el número de términos menos uno.*

Ejemplo. Interpolar 6 medios geométricos entre los números 4 y 21.

La razon de la progresion será $\sqrt[7]{\frac{21}{4}}$. Esta raiz se estrae por logaritmos (*Núm.* 214).

239. *Hallar la suma de los términos de una progresion geométrica.*

Sea a el primer término, q la razon, n el número de términos, u el último y s la suma de todos: la progresion será

$$a,\ aq,\ aq^2\ldots\ldots\frac{u}{q^2},\ \frac{u}{q},\ u.$$

Tendremos

$$s=a+aq+aq+\ldots\ldots+\frac{u}{q^2}+\frac{u}{q}+u,$$

y bien

$$s=a+q\left(a+aq+\ldots\ldots+\frac{u}{q^3}+\frac{u}{q^2}+\frac{u}{q}\right).$$

Observemos que la cantidad, que está dentro del paréntesis, es la suma de todos los términos de la progresion menos el último; luego dicha cantidad es igual á $s-u$; por consiguiente

$$s=a+q\,(s-u),$$

de donde resulta

$$s=\frac{uq-a}{q-1}.$$

Luego, *para hallar la suma de los términos de una progresion por cociente, se multiplica el último término por la razon, del producto se resta el primer término, y la diferencia se divide por la razon disminuida en una unidad.*

* **240.** De las dos ecuaciones

$$u=aq^{n-1},\quad s=\frac{uq-a}{q-1}$$

pueden deducirse dos cualesquiera de las cinco cantidades a, q, n, u y s, dadas las otras tres.

Como cinco cantidades pueden combinarse tres á tres de diez modos, se podrán proponer los diez problemas siguientes.

1.° *Dados* a, q *y* u, *hallar* n *y* s.

Tendremos $n=1+\frac{\log u-\log a}{\log q}$, $s=\frac{uq-a}{q-1}$.

2.° *Dados* a, q *y* n, *hallar* u *y* s.

$$u=aq^{n-1},\quad s=\frac{aq^n-a}{q-1}.$$

3.° *Dados* a, q *y* s, *hallar* u *y* n.

$$u=\frac{a+s(q-1)}{q},\quad n=\frac{\log(sq-s+a)-\log a}{\log q}.$$

4.° *Dados* a, u *y* n, *hallar* q *y* s.

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}},\quad s=\frac{u\sqrt[n-1]{u}-a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u}-\sqrt[n-1]{a}}.$$

5.° *Dados* a, u *y* s, *hallar* q *y* n.

$$q=\frac{s-a}{s-u},\quad n=1+\frac{\log u-\log a}{\log(s-a)-\log(s-u)}.$$

6.° *Dados* a, n *y* s, *hallar* q *y* u.

Para hallar q, se tiene la ecuacion

$$q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1=\frac{s}{a},$$

ecuacion que aun no sabemos resolver, si $n>3$; pues si $n=4$, resulta una ecuacion de tercer grado. Hallada q, será

$$u=aq^{n-1}.$$

7.° *Dados* q, u *y* n, *hallar* a *y* s.

$$a=\frac{u}{q^{n-1}},\quad s=\frac{(q^n-1)u}{(q-1)q^{n-1}}.$$

8.° *Dados* q, u *y* s, *hallar* a *y* n.

$$a=uq-s(q-1),\ n=1+\frac{\log u-\log(uq+s-sq)}{\log q}.$$

9.° *Dados* q, n *y* s, *hallar* a *y* u.

$$a=\frac{s(q-1)}{q^n-1},\quad u=\frac{s(q-1)q^{n-1}}{q^n-1}.$$

10.° *Dados* u, n *y* s, *hallar* a *y* q.

Para hallar q y a, tendremos las ecuaciones

$$(u-s)q^n+sq^{n-1}=u,\quad a=\frac{u}{q^{n-1}}.$$

Ejemplo. *Obligado Sessa por el rey de su patria á pedir una recompensa, por haber inventado el juego del agedrez, pidió al rey 1 grano de trigo por la primera casilla de las 64 del tablero del agedrez, 2 granos de trigo por la segunda casilla, 4 granos de trigo por la tercera, y asi sucesivamente, duplicando siempre el número de granos de trigo. El rey se rió mucho al ver que la recompensa pedida era, segun él creia, tan pequeña; pero, hecho el cálculo, vió con grande asombro que sus tesoros y aun los de todos los reyes de la tierra eran insuficientes para dar á Sessa la recompensa prometida. ¿Cuál fué el número de granos de trigo que pidió Sessa?*

Por la primera casilla pidió 1 grano, por la segunda 2 granos, por la tercera 4 granos, por la cuarta 8, etc.; luego el total de granos de trigo que pidió era la suma de los 64 términos de la progresion geométrica

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\ldots\ldots$$

Para hallar esta suma, hallaremos primeramente el valor del último término, que es $1\times2^{63}=2^{63}$; y por consiguiente la suma de todos los 64 términos es

$$\frac{2^{63}\times2-1}{2-1}=2^{64}-1.$$

Hallando por logaritmos esta potencia, resulta

18 446750 000000 000000.

Si se quiere saber cuántas fanegas compone este número de granos de trigo, hallaremos en primer lugar el número de granos de trigo que tiene 1 fanega. La libra tiene unos 12000 granos de trigo; luego si la fanega tiene 90 libras, tendrá $12000\times90=1080000$ granos: partiendo pues el total de granos por este número, resultan 17 080324 000000 fanegas; cantidad de trigo mayor que toda la que se ha consumido desde el principio del mundo.

* **241.** Nota. Consideremos las dos progresiones por diferencia y por cociente.

$$\ldots.-3d,\ -2d,\ -d,\ 0,\ d,\ 2d,\ 3d\ldots\ nd,\ldots.$$

$$\ldots.\ \frac{1}{q^3},\ \frac{1}{q^2},\ \frac{1}{q},\ 1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ldots\ q^n,\ldots.$$

Es evidente que $q=\left(\sqrt[d]{q}\right)^d$, y por consiguiente $q^n=\left(\sqrt[d]{q}\right)^{nd}$. Si la base del sistema de logaritmos es el número $\sqrt[p]{q}$, será $nd=\log q^n$.

Luego, *si tenemos dos progresiones, una por diferencia que tenga entre sus términos al 0, y otra por cociente que tenga al 1 entre los suyos, y las colocamos de modo que los términos 0 y 1 se correspondan, cada término de la primera progresion es el logaritmo del término correspondiente de la segunda; siendo la base el número que resulta estrayendo de la razon de la progresion geométrica la raiz cuyo índice es la diferencia de la progresion aritmética.*

Tomando esta propiedad de los logaritmos por su definicion, se deducirá como consecuencia la definicion primitiva (*Núm.* 204).

En efecto, sean las dos progresiones

$$\ldots.-3d,-2d,-d,\ 0,\ d,\ 2d,\ 3d,\ldots.\ nd,\ldots.$$

$$\ldots.\ \frac{1}{q^3},\ \frac{1}{q^2},\ \frac{1}{q},\ 1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ldots.\ q^n,\ldots.$$

Tenemos, segun la nueva definicion, $nd=\log q^n$: mas siendo $q=\left(\sqrt[d]{q}\right)^d$, y por consiguiente $q^n=\left(\sqrt[d]{q}\right)^{nd}$, será

$nd=\log\left(\sqrt[d]{q}\right)^{nd}$; es decir, que *el logaritmo de un número es el esponente á que debe elevarse la base para que la potencia sea igual á dicho número.*

Artículo 3.°

Progresiones geométricas decrecientes y continuadas al infinito.

*242. Hemos hallado que la suma de todos los términos de una progresion geométrica, creciente ó decreciente, es $s=\frac{uq-a}{q-1}$, y poniendo en vez de u su valor aq^{n-1}, $s=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$.

Supongamos ahora que la progresion sea decreciente, esto es, que $q<1$. Cuanto mayor sea n, menor es el valor de q^n (*Aritmética núm.* 112); pero de esto no debe concluirse ya, sin demostracion (a), que cuando $n=\infty$, será $q^\infty=0$; puesto que una cantidad que va decreciendo puede tener un límite mayor que 0.

Para demostrar que $q^n=0$ cuando $n=\infty$, hagamos $q=\frac{1}{r}$ siendo $r>1$: será $q^n=\frac{1}{r^n}$. Mas siendo $r>1$, hemos demostrado (*Núm.* 198) que $r^\infty=\infty$; luego entonces $q^n=0$; y por

---

(a) Como lo hacen muchos autores de álgebra, y entre ellos Mr. Bourdon.

consiguiente

$$s=\frac{-a}{q-1}, \quad \text{ó} \quad s=\frac{a}{1-q}.$$

Luego *la suma de los términos de una progresion geométrica decreciente, continuada al infinito, es igual al primer término dividido por la unidad menos la razon.*

Ejemplos 1.° Sea la progresion geométrica decreciente continuada al infinito

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\ldots\ldots$$

cuya razon es $\frac{1}{2}$.

La suma de estos infinitos términos será $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$

2.ª Sea la fraccion decimal periódica 0,323232....., que es la suma de los términos de la progresion geométrica decreciente continuada al infinito

$$0{,}32+0{,}32\times\frac{1}{100}+0{,}32\times\left(\frac{1}{100}\right)^2+0{,}32\times\left(\frac{1}{100}\right)^3+\ldots\ldots:$$

la suma de todos los infinitos términos, ó la fraccion generatriz de la decimal periódica propuesta, será

$$\frac{0{,}32}{1-\frac{1}{100}}=\frac{32}{99},$$

conforme á lo demostrado (*Aritm. núm.* 124).

Artículo 4.°

Pilas de balas.

* 243. En los parques de artillería están colocadas las balas en pilas cuyas capas horizontales pueden tener la forma de cuadrados, rectángulos y triángulos equiláteros.

Antes de resolver el problema de hallar el número de balas de estas pilas, conviene que resolvamos el problema siguiente.

* 244. *Hallar la suma* $1^2+2^2+3^2\ldots\ldots+n^2$ *de los cuadrados de los números naturales, dado el número* n *de estos cuadrados.*

Sea s la suma, tendremos

$$\begin{aligned}
2^3&=1+3+3+1,\\
3^3&=2^3+3.2^2+3.2+1,\\
4^3&=3^3+3.3^2+3.3+1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n+1)^3&=n^3+3n^2+3n+1.
\end{aligned}$$

Sumando estas igualdades ordenadamente, será
$(n+1)^3=1+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+3(1+2+3+\ldots+n)+n.$
Poniendo en lugar de $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2$ su igual s, y en vez de $1+2+3\ldots.+n$ su igual $\frac{n(n+1)}{2}$ (*Núm.* 239), y despejando $3s$, será

$$3s=(n+1)^3-(n+1)-\frac{3n(n+1)}{2},$$

ó $\quad 3s=(n+1)\left(n^2+\frac{n}{2}\right),\quad 3s=n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1);$

y por consiguiente

$$s=\frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}{3}.$$

* 245. Una pila *cuadrangular* es una pila de balas, que tiene por capas horizontales cuadrados, cuyos lados van disminuyendo sucesivamente en una bala desde la base hasta la capa superior, que consta de una sola bala. Cada bala de esta pila está sostenida por cuatro de la capa inmediata.

El número de balas del lado de la base de una pila cuadrangular es igual al número total de capas de dicha pila.

En efecto, la capa superior, ó primera, tiene una bala; la segunda tiene por lado dos balas, la tercera tiene por lado tres balas, y asi sucesivamente; luego la base tendrá por lado tantas balas como capas tiene la pila.

Hallar el número de balas de una pila cuadrangular, conociendo el número de balas del lado de la base, ó lo que es igual, *conociendo el número de capas.*

Sea n el número de balas del lado de la base de la pila, ó el número de sus capas: la capa primera ó superior tiene 1 bala, la segunda 2^2 balas, la tercera 3^2 balas..... la base n^2

balas; luego el número total de balas de esta pila será

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2;$$

ó bien, llamando P_c á la suma, será (a)

$$P_c=\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}.$$

* 246. Una pila *rectangular* es una pila que tiene por capas horizontales rectángulos, cuyos lados van disminuyendo sucesivamente en una bala, desde la base hasta la capa superior, que consta de una línea de balas. Cada bala de esta pila está sostenida por cuatro de la capa inmediata.

El número de balas del lado menor de la base es igual al número de capas de la pila rectangular.

En efecto, la capa primera ó superior tiene por lado menor 1 bala, la segunda tiene por lado menor 2 balas, la tercera 3, y asi sucesivamente; luego el lado menor de la base tendrá tantas balas como capas tiene la pila.

Hallar el número de balas de una pila rectangular, dados los números de balas de los lados de la base.

Sea n el número de balas del lado menor de la base, y $n+p$ el del lado mayor. Hallemos en primer lugar el número de balas de la línea ó capa superior; llamemos x á este núro. El lado mayor de la segunda capa tendrá $x+1$ balas, el de la tercera $x+2$, el de la cuarta $x+3\ldots.$, y el de la base $x+(n-1)$, ó $x+n-1$; luego $x+n-1=n+p$, y por consiguiente $x=p+1$.

Esto supuesto, la primera capa, ó la superior, tiene $p+1$ balas, la segunda $2(p+2)$, la tercera $3(p+3)$,.... la base $n(p+n)$; luego el número total de balas de esta pila será

$$p(1+2+3+\ldots\ldots+n)+1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2;$$

y llamando P_r á esta suma, será (*Núms.* 234 y 244)

$$P_r=p\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}.$$

Si $p=0$, en cuyo caso la pila es cuadrangular, la suma anterior es $\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}$, como la hemos hallado directamente.

*247. Una pila *triangular* es una pila que tiene por ca-

(a) Léase P índice c, ó simplemente P, c.

pas horizontales triángulos equiláteros, cuyos lados van disminuyendo sucesivamente en una bala desde la base hasta la capa superior, que solo tiene una bala. Cada bala de esta pila está sostenida por tres de la capa inmediata.

El número de balas del lado de la base es igual al número de capas de la pila triangular.

Se demuestra del mismo modo que el teorema análogo de los dos casos anteriores.

Hallar la suma de las balas de una pila triangular, dado el número de balas del lado de la base, ó lo que es igual, *dado el número de capas.*

Sea n el número de balas del lado de la base, ó el número de capas; el número de balas de la base será

$$1+2+3.....+n=\frac{n^2+n}{2}.$$

Esto supuesto, la capa superior ó primera tendrá el número de balas $\frac{1^2+1}{2}$, la segunda capa tendrá $\frac{2^2+2}{2}$, la tercera $\frac{3^2+3}{2}$..... y la base $\frac{n^2+n}{2}$: luego la suma de todas estas balas será

$$\frac{1^2+2^2+3^2+.....+n^2}{2}+\frac{1+2+3+....+n}{2},$$

ó llamando P_t á esta suma, será (*Núms.* 244 *y* 234).

$$P_t=\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{2.3}+\frac{n(n+1)}{2.2},$$

ó

$$P_t=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Nota. Si la pila es troncada, es decir, terminada en una capa mas baja que la superior, se obtendrá el número de sus balas, hallando los números de balas de las pilas completas, cuyas bases son la mayor de la troncada y la primera deficiente, y restando dichos números.

CAPÍTULO IV.

Intereses, anualidades y rentas vitalicias.

Artículo 1.°

Interescs.

248. *Hallar la relacion que liga al capital, al tanto por 1 anual, al tiempo y á la suma del capital é interéses al cabo de este tiempo* (a).

Sea c el capital puesto á interés, r el tanto por 1 anual, t el tiempo, siendo unidad el año, y C el valor del capital c al cabo de este tiempo, ó bien la suma del capital é intereses al cabo del tiempo t.

Supongamos primeramente que t sea un número entero de años.

El interés del capital c en un año es cr; luego el valor del capital c al fin del primer año será $c+cr=c(1+r)$; es decir, que para hallar el valor de un capital cualquiera al cabo de un año, no hay mas que multiplicarle por $1+r$.

Segun esto, el valor del capital $c(1+r)$ al fin del año siguiente, ó el valor del capital c al cabo del segundo año, será $c(1+r)^2$; al cabo del tercer año el valor de dicho capital será $c(1+r)^3$; y en general, el valor del capital c al cabo de los t años será $c(1+r)^t$: y como á esta cantidad hemos llamado C, será

$$C=c(1-r)^t.$$

Supongamos ahora que el tiempo t sea un número fraccionario $\frac{p}{q}$ de año.

Para hallar en este caso la relacion pedida, llamemos x al interés de 1 en el tiempo $\frac{1}{q}$ de año: el interés de c en el tiem-

(a) Hemos resuelto ya esta cuestion (*Aritm. núm.* 207), admitiendo el principio inexacto de que el interés que produce un capital es proporcional al tiempo: actualmente tratamos de hallar la relacion verdadera que hay entre las cuatro cantidades que entran en las cuestiones del interés.

po $\frac{1}{q}$ de año será cx; luego el capital c se convertirá al cabo del tiempo $\frac{1}{q}$ en $c+cx=c(1+x)$; es decir, que para hallar el valor de un capital cualquiera al fin del tiempo $\frac{1}{q}$ de año, no hay mas que multiplicar dicho capital por $1+x$.

Segun esto, el valor del capital c al cabo del tiempo $\frac{2}{q}$ será $c(1+x)^2$; al cabo del tiempo $\frac{3}{q}$ será $c(1+x)^3$; y en general, el valor del capital c al cabo del tiempo $\frac{p}{q}$ será $c(1+x)^p$: y como á esta cantidad hemos llamado C, será $C=c(1+x)^p$ (1).

Tambien el valor de c al fin del tiempo $\frac{q}{q}$, ó un año, es $c(1+x)^q$; y como por otra parte el valor de c al cabo de un año es $c(1+r)$, será

$$c(1+x)^q=c(1+r),$$

de donde resulta

$$1+x=(1+r)^{\frac{1}{q}}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion (1), será

$$C=c\left((1+r)^{\frac{1}{q}}\right)^p=c(1+r)^{\frac{p}{q}},$$

ó bien

$$C=c(1+r)^t.$$

Vemos pues que, cualquiera que sea el tiempo, entero ó fraccionario, la fórmula es siempre $C=c(1+r)^t$; ó tomando los logaritmos de ambos miembros,

$$\log C=\log c+t\log(1+r),$$

ecuacion que nos dará cualquiera de las cuatro cantidades C, c, t y r; conociendo las otras tres.

Asi, si la incógnita es c, tendremos

$$\log c=\log C-t\log(1+r).$$

Si la incógnita es t, será

$$t=\frac{\log C-\log c}{\log(1+r)}.$$

Finalmente, si la incógnita es r, será

$$\log(1+r)=\frac{\log C-\log c}{t}.$$

Ejemplos. 1.° *¿En cuántos años se duplica un capital impuesto al 5 por 100, y no percibiendo los réditos?*

En este ejemplo conocemos el capital primitivo c, la suma del capital primitivo y de sus intereses $2c$, y el tanto por 1 que es $r=0,05$; y la incógnita es t: luego sustituyendo en la fórmula $t=\frac{\log C-\log c}{\log(1+r)}$ los valores de C y r, tendremos

$$t=\frac{\log 2c-\log c}{\log 1,05}=\frac{\log 2}{\log 1,05}=14,2 \text{ años.}$$

2.° *¿Cuál será el valor de un capital al cabo de cien años impuesto al 5 por 100, y no percibiendo los réditos?*

Conocemos el capital c, el tanto por 1 $r=0,05$, el número de años $t=100$, y la incógnita es C.

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula $C=c(1+r)^t$, será $C=c\,(1,05)^{100}$. Efectuando esta potencia por medio de logaritmos, hallaremos 131, despreciando la fraccion que además resulta: por consiguiente $C=131\,c$, es decir, que un capital cualquiera impuesto al 5 por 100, y no percibiendo los intereses, se hace al cabo de un siglo 131 veces mayor de lo que era al principio.

3.° *¿Cuál es el capital que á 4 por 100, y no cobrando los intereses, se convierte al cabo de 7 años en 9639,2 reales?*

En este caso tenemos $C=9629,2$; $r=0,04$; $t=7$; y la incógnita es c.

Sustituyendo los valores de los datos en la fórmula

$$\log c=\log C-t\log(1+r),$$

será
$$\log c=\log 9639,2-7\log 1,04.$$

Efectuando este cálculo, se halla $c=7325$ reales.

Nota. Hemos hallado la fórmula $C=c\,(1+r)^t$, admitiendo, como es cierto, que la unidad de dinero produce interés aun en el tiempo mas pequeño; de manera que el valor $c(1+r)^t$ del capital c, al concluir el tiempo t, se compone del capital primitivo, de los intereses que este produce en todos los instantes del tiempo t, y de los intereses que producen los intereses. El interés calculado de este modo, que es el verdadero, se llama interés *compuesto*, y el interés calculado en la suposicion de que los intereses de un capital son proporcionales á los tiempos, se llama interés *simple* (a).

Cálculo de la poblacion de un pais.

249. Sea h el número de habitantes de un pais, a su aumento anual por cada habitante (cuyo aumento es fácil calcular, conociendo el aumento anual de 100, 1000, etc. habitantes), t el tiempo espresado en años, y H el número de habitantes del mismo pais al cabo del tiempo t: se demostrará del mismo modo que en la cuestion del interés que, cualquiera que sea el tiempo t, se tiene $H=h(1+a)^t$, ecuacion de la cual se deducirá cualquiera de las cuatro cantidades, dadas las otras tres.

¿En cuántos años se duplicará el número de habitantes de un pais cuyo aumento anual es de $\frac{1}{189}$?

Conocemos h, $H=2h$, $a=\frac{1}{189}$, y la incógnita es t. La fórmula $H=h(1+a)^t$ nos da $t=\frac{\log H-\log h}{\log(1+a)}$; y sustituyendo los valores de H y a, $t=\frac{\log 2}{\log 190-\log 189}$. Efectuando el cálculo indicado, resulta $t=151$ años, despreciando la fraccion que además resulta.

ARTÍCULO 2°

Anualidades.

250. Se llama *anualidad* la cantidad constante que debe darse anualmente con objeto de pagar el interés de un capi-

---

(a) En mi *Memoria sobre el cálculo del interés* he demostrado que el interés compuesto, ó mas bien el interés verdadero, es menor que el interés simple, cuando el tiempo es menor que 1 año; y mayor, cuando el tiempo es mayor que 1 año.

tal recibido á rédito, y de estinguir esta deuda al cabo de un cierto número de años.

Hallar la relacion que liga á las cuatro cantidades, capital, tanto por 1 anual, número de años al cabo de los cuales se ha de estinguir la deuda, y anualidad.

Sea c el capital, r el tanto por 1 anual, t el número de años y a la anualidad.

Al fin del primer año el prestador recibe la anualidad a, la cual al cabo de los $t-1$ años, que faltan hasta la estincion de la deuda, vale $a(1+r)^{t-1}$. La anualidad a dada al fin del segundo año valdrá al fin del último año $a(1+r)^{t-2}$; la anualidad a dada al fin del tercer año valdrá al fin del último año $a(1+r)^{t-3}$, etc.; y la anualidad a dada al fin del último año vale a: de modo que todo lo recibido por el prestador vale al fin del último año

$$a(1+r)^{t-1}+a(1+r)^{t-2}+a(1+r)^{t-3}+\ldots+a(1+r)^2+a(1+r)+a.$$

Estos términos forman una progresion geométrica, cuyo primer término es a, la razon $1+r$ y el número de términos t: luego la suma de todos estos términos será (*Núm.* 239)

$$\frac{a(1+r)^t-a}{r}.$$

El capital, que ha entregado el prestador, vale $c(1+r)^t$ al cabo del tiempo t; luego, como la cantidad dada por el prestador debe ser igual á la recibida por el mismo, para quedar pagado; la relacion pedida será

$$\frac{a(1+r)^t-a}{r}=c(1+r)^t,$$

de la cual se deducirá cualquiera de las cuatro cantidades c, r, t y a, dadas las otras tres.

Asi, siendo a la incógnita, se tendrá

$$a=\frac{rc(1+r)}{(1+r)^t-1}.$$

Si la incógnita es r, hay que resolver una ecuacion del grado $t+1$.

Si la incógnita es c, se hallará

$$c=\frac{a(1+r)^t-a}{r(1+r)^t}.$$

Finalmente, si la incógnita es t, se despejará primeramente $(1+r)^t$, y será

$$(1+r)^t=\frac{a}{a-rc};$$

y por consiguiente

$$t=\frac{\log a-\log\,(a-rc)}{\log\,(1+r)}.$$

Artículo 3.°

Rentas vitalicias.

251. Se llama renta *vitalicia* la anualidad que recibe una persona por un capital prestado, con la condicion de que al fin de su vida quede estinguido su haber.

Para hallar la anualidad que debe recibir el prestador, conociendo el tanto por 100 del interés ordinario, no hay mas que suponer que el número de años en que se ha de estinguir su capital, es el número probable de años de vida del mismo.

Hé aquí la tabla de Duvillard sobre la probabilidad de la vida humana en Francia en el último siglo.

Edad de la persona.

1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85.

Tiempo probable de vida.

37, $45\frac{5}{7}$, 43, 39, $35\frac{1}{2}$, $32\frac{1}{2}$, $29\frac{1}{2}$, 26, 23, 20, 17, 14, 11, $8\frac{2}{3}$, $6\frac{5}{7}$, 5, $3\frac{1}{2}$, $2\frac{4}{5}$.

No debe considerarse esta tabla como muy exacta; pues, segun cálculos hechos en otros paises, el tiempo probable de vida es mayor que el que indica la misma tabla.

NOTA.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Sea la ecuacion $ax^2+bx+c=0$, cuyas raices queremos hallar. Pasando c el segundo miembro, será $ax^2+bx=-c$: Multipliquemos los dos miembros de esta ecuacion por $4a$, y la ecuacion será

$$4a^2x^2+4abx=-4ac.$$

Observemos ahora que el primer miembro de esta ecuacion consta de los dos primeros términos del cuadrado del binomio $2ax+b$; luego para que el primer miembro sea un cuadrado perfecto, añadiremos b^2 á ambos miembros, y entonces la ecuacion será

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac.$$

Estrayendo ahora la raiz cuadrada de ambos miembros, será

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

y por consiguiente $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

resultado que nos da la regla siguiente:

En toda ecuacion de la forma $ax^2+bx+c=0$ *la incógnita es igual al coeficiente del segundo término mudado el signo,* $\pm$ *la raiz cuadrada del cuadrado de dicho coeficiente, disminuido en el cuádruplo del producto de los coeficientes estremos, dividido todo por el duplo del coeficiente del primer término.*

Consideremos ahora la ecuacion $ax^2+2bx+c=0$.

Pasando c al segundo miembro, será $ax^2+2bx=-c$. Multiplicando los dos miembros de esta ecuacion por a, será

$$a^2x^2+2abx=-ac.$$

Como el primer miembro consta de los dos primeros términos del cuadrado del binomio $ax+b$, completaremos su cuadrado añadiendo b^2 á ambos miembros: tendremos pues

$$a^2x^2+2abx+b^2=b^2-ac;$$

y estrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros, será

$$ax+b=\pm\sqrt{b^2-ac},$$

de donde resulta

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

Luego *en toda ecuacion de la forma* $ax^2+2bx+c=0$ *la incógnita es igual á la mitad del coeficiente del segundo término mudado el signo,* $\pm$ *la raiz cuadrada del cuadrado de dicha mitad, disminuido en el producto de los coeficientes de los términos estremos, dividido todo por el coeficiente del primero.*

Estas dos reglas son de una aplicacion mucho mas ventajosa que la regla ordinaria.

En efecto, la regla ordinaria nos daria para la ecuacion $ax^2+bx+c=0$, despues de partir esta ecuacion por a, $x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$; reduciendo ahora los dos quebrados $\frac{b^2}{4a^2}$ y $\frac{c}{a}$ al comun denominador $4a^2$, estrayendo la raiz cuadrada del denominador $4a^2$, y sumando en seguida los dos quebrados $-\frac{b}{2a}$ y $\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, resultarian los valores de x, que se obtienen inmediatamente por la regla nueva.

En la ecuacion $ax^2+2bx+c=0$, despues de partir por a, tendríamos por la regla ordinaria $x=-\frac{b}{a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}}$, que despues de varias operaciones se reduce á

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a},$$

resultado que se obtiene inmediatamente por la regla nueva.

Ejemplos.

1.° $$Ay^2+(Bx+D)y+Cx^2+Ex+F=0.$$

Tendremos inmediatamente

$$y=\frac{-(Bx+D)\pm\sqrt{B^2x^2+2BDx+D^2-4A(Cx^2+Ex+F)}}{2A},$$

ó

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF}.$$

2.° $$5x^2+6x-3=0.$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{9+15}}{5}=\frac{-3\pm\sqrt{24}}{5}.$$

Volviendo á resolver estas ecuaciones por la regla ordinaria, se verá palpablemente la ventaja de las dos reglas nuevas.

INDICE.

LIBRO 1.º—CÁLCULO ALGÉBRICO.

LIBRO 2.º—ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

LIBRO 3.º—PROBLEMAS DETERMINADOS DE PRIMER GRADO.

LIBRO 4.º—POTENCIAS Y RAICES DE LAS CANTIDADES ALGÉBRICAS.

LIBRO 5.° — ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

LIBRO 6.° — PROGRESIONES Y LOGARITMOS.