Autor: Alberto Alejandro Maciel Domínguez

ALGEBRA LINEAL

UNIDAD I.

I.- Ecuaciones de primer grado (simultáneas)

1.- Sustitución.

2.- Igualación.

3.- Sumas y restas.

4.- Determinantes.

II.- Ecuaciones de primer grado de tres o más incógnitas.

1.- Método de reducción.

2.- Método de determinantes.

3.- Aplicación del método de Sarrus y Kramer.

UNIDAD II.

Matrices.

1.- Definición.

2.- Suma de matrices.

3.- Resta de matrices.

4.- Teoremas.

5.- Multiplicación de matrices.

6.- Producto de una matriz.

UNIDAD III

Inversas.

1.- Inversa de una matriz cuadrada

2.- Matriz identidad.

3.- Determinación de un determinante.

4.- Obtención de la inversa.

5.- Resolución del determinante por el método de menores.

6.- Propiedades de las matrices.

7.- Cofactores.

8.- Inversa de una matriz.

9.- Inversa de una matriz por el método de la adjunta.

UNIDAD IV.

Método de solución.

1.- Método de Gauss.

2.- Propiedades de la determinante.

3.- Método de Gauss-Jordan.

UNIDAD V.

Solución y aplicación de problemas y espacios vectoriales.

1.- Ecuaciones simultáneas de primer grado con 3 incógnitas por el método de Gauss y de Gauss-Jordan aplicado a problemas de contabilidad y administración.

2.- Problemas de ecuaciones simultáneas de 4 incógnitas de primer grado por el método de Gauss-Jordan.

3.- Espacios vectoriales.

4.- Propiedades.

5.- Resolución de ecuaciones para ver si son espacios vectoriales.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos variables por este método se siguen los siguientes pasos:

PASO 1: Despejamos una de las variables de una de las ecuaciones.

PASO 2: La sustituimos en la otra ecuación y resolvemos para encontrar el valor de la variable que corresponde.

PASO 3: Sustituimos dicho valor en la ecuación del Paso 1 y resolvemos para obtener el valor de la otra variable.

PASO 4 : Comprobamos sustituyendo los valores en ambas ecuaciones.

EJEMPLO # 1:

$3x + 5y = 7$ ---- ecuación 1

$2x - \ y = -4$ ---- ecuación 2

a) Despejamos una de las ecuaciones

Tomamos la ec. 2

$$2x - y = 4$$

$$2x = 4 - y$$

$$x = \frac{4 - y}{2} \text{ ----ecuación 3}$$

b) Sustitución de la ecuación 3 en la 1

$$3\left(\frac{-4 + y}{2}\right) + 5y = 7$$

$$\frac{-12 + 3y}{2} + 5y = 7$$

$$-12 + 3y + 10y = 14$$

$$13y = 14 + 12$$

$$13y = 26$$

$$y = 26/13$$

$$y = 2$$

c) Sustituimos el valor " y " en ecuación 3

$$x = \frac{4 - 2}{2} \qquad x = -\frac{2}{2} \qquad x = -1$$

Comprobación

$3(-1) + 5(2) = 7$	$2(-1) - 2 = 4$
$-3 + 10 = 7$	$-2 - 2 = 4$
$7 = 7$	$4 = 4$

Ejemplo # 2:

Por método de sustitución:

$3x + 2y = 8$ ---- **ecuación 1**

$6x - 5y = 4$ ---- **ecuación 2**

a) Despejamos una de las ecuaciones

Tomamos la ecuación 1

$$3x + 2y = 8$$

$$3x = 8 - 2y$$

$$x = \frac{8 - 2y}{3}$$ ----- **ecuación 3**

b) Sustituimos ecuación 3 en la 2

$$6\left(\frac{8 - 2y}{3}\right) - 5y = 4$$

$$48 - 12y - 15y = 12$$

$$-12y - 15y = 12 - 48$$

$$27y = -36$$

$$y = \frac{-36}{27} = \quad y = \frac{14}{3}$$

c) Sustituimos el valor de "y" en ecuación 3

$$x = \frac{8}{3} - \frac{2}{9}(12)$$

$$x = \frac{8}{3} - \frac{24}{9}$$

$$x = \frac{48/9}{3} = \frac{48}{27} = x = \frac{16}{9}$$

Comprobación

$$3\left(\frac{-16}{3}\right) + 2\,(2) = 8 \qquad\qquad 6\left(\frac{16}{9}\right) - 5\left(\frac{14}{3}\right) = 4$$

$$\frac{-48}{3} + 24 = 8 \qquad\qquad \frac{96}{9} - \frac{20}{3} = 4$$

$$-16 + 24 = 8 \qquad\qquad \frac{96 - 60}{9} = 4$$

$$8 = 8 \qquad\qquad \frac{36}{9} = 4 \qquad 4=4$$

Ejemplo # 3

Por método de sustitución

$$3x + 2y = 6 \text{ ---- ecuación 1}$$
$$-3x + 6y = 4 \text{ ---- ecuación 2}$$

a) Despejamos una de las ecuaciones

Tomamos la ecuación 2

$$-3x + 6y = 4$$
$$-\ 3x = 4 - 6y$$

$$x = \frac{4 - 6y}{3} \text{ ---- ecuación 3}$$

b) Sustitución de la ecuación 3 en la 1

$$3\,\frac{(4 - 6y)}{3} + 2y = 6$$

$$12 - 18y + 6y = 18$$

$$18y + 6y = 12 + 18$$

$$24y = 30$$

$$y = \frac{30}{24} = y = \frac{5}{4}$$

c) Sustituimos el valor de "y" en ecuación 3

$$x = \frac{-2\,(5/4) + 6}{3}$$

$$x = \frac{(10/ -4) + 6}{3}$$

$$x = -\frac{10}{12} + \frac{6}{3} = \frac{-10 + 24}{12} = \frac{14}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\boxed{x = \frac{7}{6}}$$

Comprobación

$$3x + 2y = 6$$

$$3\left(\frac{7}{6}\right) + 2\left(\frac{5}{4}\right) = 6$$

$$\frac{21}{6} + \frac{10}{4} = 6$$

$$42 + 30 = 72$$

$$-3\left(\frac{7}{6}\right) + 6\left(\frac{5}{4}\right) = 4$$

$$-\frac{21}{6} + \frac{30}{4} = 4$$

$$-42 + 90 = 48$$

$$48 = 48$$

$72 = 72$

EJERCICIOS:

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de sustitución.

a) $3x + 5 = 3$
$2x + 5y = 5$ — **Sol.** $x = \frac{-2}{3}$, $y = \frac{19}{15}$

b) $5a - 2b = -23$
$-8a + 3b = 18$ — **Sol.** $a = 33$, $b = 94$

c) $9r + 4t = 15$
$13r + 8t = 5$ — **Sol.** $r = 5$, $t = -\frac{15}{2}$

d) $18w + 12z = 0$
$-14w + 16z = 19$ — **Sol.** $w = \frac{-1}{2}$, $z = \frac{3}{4}$

e) $-18r + 9t = -15$
$33r - 11t = 11$ — **Sol.** $r = -\underline{2}$, $t = -3$

MÉTODO DE IGUALACIÓN

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos variables por este método se siguen los siguientes pasos:

PASO 1: Despejamos una de las variables de ambas ecuaciones

PASO 2: Igualamos dichas ecuaciones y resolvemos para la variable que queda.

PASO 3: Sustituimos el valor de esta variable en alguna de las ecuaciones del paso 1 y resolvemos para la otra variable.

PASO 4: Comprobamos la solución sustituyendo los valores de ambas ecuaciones.

EJEMPLO # 1:

Por método de Igualación

$3x + 2y = 8$ ---ecuación 1

$6x - 5y = 4$ ---ecuación 2

a) Se despeja x en las dos ecuaciones.

$3x + 2y = 8 \qquad\qquad 6x - 5y = 4$

$x = \frac{8 - 2y}{3} \qquad\qquad x = \frac{4 - 5y}{6}$

b) Igualamos las ecuaciones despejadas.

$$\frac{8 - 2y}{3} = \frac{4 - 5y}{6}$$

$$48 - 12y = \boxed{12 - 15y}$$

$$-12y - 15y = -48 + 12$$

$$-27y = -36$$

$$y = \frac{-36}{-27} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}$$

c) Sustituimos el valor de y en ecuación 1

$$3x + 2\left(\frac{4}{3}\right) = 8$$

$$3x + \frac{8}{3} = 8$$

3

$3x = 8 - \frac{8}{3}$

$3x = \frac{24 - 8}{3}$

$3x = 16 / 3$

$x = \frac{16/3}{3}$ $x = \frac{16}{9}$

Ejemplo # 2

Por el método de Igualación

$3x + 5y = 7$ --ecuación 1

$2x - y = -4$ --- ecuación 2

a) Despejamos y en las dos ecuaciones

$3x - 5y = 7$	$2x - y = -4$
$- 5y = 7 - 3x$	$-y = -4 + 2x$
$y = \frac{7 - 3x}{5}$	$y = 4 + 2x$

b)Igualamos las ecuaciones despejadas

$\frac{7 - 3x}{5} = 4 + 2x$

$7 - 3x = 5 (4 + 2x)$

$7 - 3x = 20 + 10x$

$7 - 20 = 10x + 3x$

$13 = 13x$

$x = \frac{13}{-13}$ $x = -1$

c) Sustituir el valor de x en la ecuación 2

$2x - 4 = -4$

$2(-1) - y = -4$

$-2 - y = -4$

$-y = -4 + 2$

$-y = -2$

$y = 2$

Ejemplo #3

Por método de Igualación

$2a + 3b = 11$---ecuación 1

$a - 2b = 9$ --- ecuación 2

a) Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones

$$\begin{array}{ll} 2a + 3b = 11 & a - 2b = 9 \\ \underline{\quad - 3b = \quad - 3b} & \underline{\quad + 2b = \quad +2b} \\ 2a \quad = 11 - 3b & a \quad = 9 + 2b \\ \frac{2a}{2} = \frac{11 - 3b}{2} \quad a = \frac{11 - 3b}{2} & a = 9 + 2b \end{array}$$

b) Se Igualan las dos ecuaciones

$11 - 3b = 9 + 2b$

$(2)\left(\frac{11 - 3b}{2}\right) = (9 + 2b)(2)$

$11 - 3b = 18 + 4$

$\underline{-18 + 3b = -18 + 3b}$

$-7 = 7b$

$\boxed{-1 = b}$

c) Se sustituye b en la ecuación 1

$2a + 3(-1) = 11$

$2a - 3 = 11$

$\underline{+3 = +3}$

$\boxed{2a = 14}$

$a = \frac{14}{2}$

$a = 7$

EJERCICIOS:

Resuelve por el método de igualación:

a) $n + m = 7$
$n - m = 3$ Sol. $n = 3$, $m = 4$

b) $w + 1 = 2(z - 1)$ Sol. $w = 7$, $z = 5$
$w - 1 = z + 1$

c) $a + 3b = 11$ Sol. $a = \frac{31}{5}$, $b = \frac{8}{5}$
$a - 7b = -5$

d) $9x - 6y = 11$ **Sol.** $x = \frac{7}{3}$, $y = \frac{5}{3}$

$5x + 2y = 15$

e) $7c - 3d = -4$ **Sol.** C= cualquiera y $d= \frac{7c+4}{31}$

$-14c + 6d = 8.$

MÉTODO DE SUMA Y RESTA

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos variables utilizando este método, seguimos los siguientes pasos:

PASO 1: Se multiplican las ecuaciones por los números que hagan que ambas ecuaciones tengan el coeficiente de una de las variables iguales excepto tal vez por el signo.

PASO 2: Se suman o se retan las ecuaciones para eliminar esa variable.

PASO 3: Se resuelve la ecuación resultante para la variable que quedo.

PASO 4: Se sustituye este valor en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra variable.

A este método también se le conoce como el método de reducción.

Ejemplo # 1

Por el método de suma y resta

$3x + 5y = 7$ ---ecuación 1

$2x - y = -4$ ----ecuación 2

a) Se multiplican de manera cruzada las dos ecuaciones

$(1)\ 3x + 5y = 7$

$(5)\ 2x - y = -4$

b) Se elimina “ y”

$$\begin{array}{l} 3x + 5y = 7 \\ \underline{10x - 5y = -20} \\ 13x \quad = -13 \end{array}$$

$$x = \frac{-13}{13} \quad x = -1$$

c)Sustituimos el valor de x en la ecuación 2

$2x - y = -4$

$2(-1)-y=-4$

$-y= -4 +2$

$\boxed{-y = -2}$

$y = 2$

Ejemplo #2

Por método de suma y resta

$3x + 2y = 8$---ecuación 1

$6x - 5y = 4$ ---ecuación 2

a) Se multiplican de manera cruzada las ecuaciones

$(5)\ 3x + 2y = 8$

$(2)\ 6x - 5y = 4$

b) Se elimina " y "

$$\begin{array}{l} 15x + 10y = 40 \\ \underline{12x - 10y = 8} \\ 27x \qquad\ = 48 \end{array}$$

$$x = \frac{48}{27} \qquad x = \frac{16}{9}$$

c) Sustituir en ecuación 1

$$3\left(\frac{16}{9}\right) + 2y = 8$$

$$\frac{48}{9} + 2y = 8$$

$$2y = \frac{8 - 48}{9}$$

$$2y = \frac{72 - 48}{9}$$

$$2y = \frac{24}{9}$$

$$y = \frac{24/9}{2}$$

$$y = \frac{24}{18} = \frac{12}{9} \qquad y = \frac{4}{3}$$

Ejemplo # 3

Por el método de suma y resta

$5x - 3y = -5$ --- ecuación 1

$2x + 4y = 24$ --ecuación 2

a) Se multiplica de manera cruzada las ecuaciones

$(4)\ 5x - 3y = -5$

$(3)\ 2x + 4y = 24$

b) Se elimina “y”

$$\begin{array}{l} 20x - 12y = -20 \\ \underline{6x + 12y = \ 72} \\ \qquad 26x = 52 \end{array}$$

$$x = \frac{52}{26} = 22$$

$x = 2$

c) se sustituye en la ecuación 2

$$\begin{array}{l} 2(2) + 4y = 24 \\ 4 + 4y = 24 \\ \underline{-4 \qquad = -4} \\ \qquad 4y = 20 \end{array}$$

$$y = \frac{20}{4} = 5$$

\- $y = 5$

EJERCICIOS

Resuelve por el método de suma y resta (Reducción)

a) $x + 4y - z = 6$

$2x + 5y - 7z = -9$ Sol. $y = 2$, $z = 3$, $x = 1$

$3x - 2y + z = 2$

b) $2x - y = 19$

$-x = -5 - 2y$

Sol. $x = 11$, $y = 3$

c) $7x + 21w = 10$

$14x - 7w = -1$

Sol. $x = \frac{1}{7}$, $w = \frac{3}{7}$

d) $6x + 2y = 14$

$-2x + y = 7$

Sol. $x = 0$, $y = 7$

e) $2t + u = 3$

$t + 2u = 3$

Sol. $t = 1$, $u = 1$

ECUACIONES SIMULTÁNEAS DE PRIMER GRADO POR DETERMINANTE

MÉTODO DE DETERMINANTE

Para encontrar el valor de las incógnitas por el método de determinante se sustituyen los términos independientes en la columna donde están las "x" (Cuando se requiere conocer la "x") y en el denominador se pone la matriz original, lo mismo para calcular el valor de "y".

Ejemplo #1

Por determinantes:

a) $3x + 5y = 7$---ecuación 1

$2x - y = -4$--ecuación 2

$$x = \frac{\begin{matrix} 7 & 5 \\ -4 & -1 \end{matrix}}{\begin{matrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{matrix}} = \frac{7(-1) - 5(-4)}{3(-1) - 5(2)} = \frac{7 + 20}{-3 - 10} = \frac{13}{-13} = -1$$

3 7

y = 2 -4 = 3 (-4) - 2(7) = -12 - 14 = - 26 = 2

3 5 3 (-1) - 5 (2) -13 -13

2 -1

Ejemplo #2

Por determinantes:

b) 3x + 2y = 3---ecuación 1

6x - 5y = 4---ecuación 2

8 2

x= 4 -5 = 8(-5) - 4 (2) = -40 - 8= 48 = 16

3 2 3 (-5) - 6 (2) = -15 -12 = 27 9

6 -5

3 8

y = 6 4 = 3 (4) - 8(6) = 12- 48 = 36 = 12 = 4

3 2 - 27 3

6 5

Método de Sarrus

Para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas de 3 incógnitas con determinantes se utiliza el método de Sarrus para utilizar los coeficientes, y este nos indica que debemos agregar a la matriz las primeros 2 renglones.

Para resolver esta determinante se multiplica la diagonal principal por la diagonal secundaria.

DIAGONAL PRINCIPAL

DIAGONAL SECUNDARIA

Ejemplo :

x + y + z = 4

2x + 3y + 5z =-5

3x + 4y + 7z = 10

1	1	1	
2	-3	5	
3	4	7	= (1) (-3) (7) + (2) (49 (1)+ (3) (1) (5) - (1) (-3) (3) - (5) (4) (1) -(7) (1 (2)
1	1	1	-21 +8 + 15 + 9 - 20 - 14
2	-3	5	= - 23

Método de Kramer

Para el calculo de los valores de cada una de las incógnitas del sistema de ecuaciones simultáneas los elementos o coeficientes se acomodan de acuerdo a la regla de Kramer, que nos indica que debemos de sustituir los términos independientes por los coeficientes de la variable que se va a resolver, en el denominador del determinante se pone la matriz original.

Ejemplo:

Con la misma ecuacion anterior resolvemos este ejemplo

x y z

4 1 1

-5 -3 5 = (4) (-3) (7) + (-5) (4) (1) + (10) (1) (5) - (1) (-3) (10) - (5) (4) (4)

10 4 7 (1) (-3) (7) + (2) (4) (1) + (3) (1) (5) - (1) (-3) (3) - (5) (4) (1)

4 1 1 - (7) (1) (2) = -69

x= -5 -3 5 = 3

1 1 1 = -23

2 -3 5

3 4 7

1 1 1

2 -3 5

1 4 1

2 -5 5

3 10 7 = (1) (-5) (7) +(2) (10) (1) + (3) (4) (5) - (1) (-5) (3) - (5) (10) (1)

1 4 1 (7) (4) 2) = 46

y= 2 -5 5 = 2

1 1 1 = -23

2 -3 5

3 4 7

1 1 1

2 -3 5

1 1 4

2 -3 -5

3 4 10

1 1 4 = (1) 8-3) (10) + (2) (4) (4) + (3) (1) (-5) -(4) (-3) (3) - (5) (4) (1)

Z= 2 -3 -5 -(10) (1) (2) = +23 = -1

1 1 1 =-23

2 -3 5

3 4 7

1 1 1

2 -3 -5

Ejercicios:

Resuelve por el método de determinante, Kramer, Sarrus.

a) $18x + 15y = 9$
$21x - 30y = 1$

Sol. $x = \frac{1}{3}$, $y\ \frac{1}{5}$

b) $5x + 9y = -18$
$6x + 8y = -2$

Sol. $x = 9$, $y = -7$

c) $2x - y + 7z = 8$
$3x + 5y + 10z = -21$

Sol. $x = -2$, $y = -5$, $z = 1$

9x - 4y - 2z = 0

d) 2x -8y-4z = -10

-5x + 10y - 5z = 0

-4x + 15y + 2z = 1

Sol. x= 5, y= 1, z= 3

e) x + y - 6z = 3

x + y + 5z = 11

-2x +3y -4z ¨= -5

Sol. $x = \frac{182}{23}$, $y = \frac{139}{23}$, $z = \frac{42}{23}$

DEFINICION

Una Matriz de Amxn es un arreglo rectangular de mn números dispuestos en m (renglones) y n (columnas).

$$\text{Amxn}= \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a31 & a33 \end{pmatrix} \qquad \text{Amxn}= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Renglón

Columna

$$\text{Bmxn}= \begin{pmatrix} b11 & b12 & b13 \\ b21 & b22 & b23 \\ b31 & b32 & b33 \end{pmatrix} \qquad \text{Bmxn}= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Conocer los elementos de la matriz Amxn

(2,1)	(3,2)	(1,1)	(2,3)	(3,3)
2	2	3	4	1

b) Matriz Bmxn

(1,2)	(2,3)	(3,3)	(2,2)
-1	3	5	1

IDENTIFICACION DE MATRICES:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$ Matriz de 2x2

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$ Matriz de 3x2

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$ Matriz de 3x3

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$ Matriz de 3x3

Existen diferentes tipos de Matrices:

1.- En forma **ESCALONADA.**

Una Matriz A=aij, que es una matriz escalonada o también se dice que esta en forma escalonada, es si el número de ceros anteriores a la primera componente distinta de cero en una fila, crece en la siguiente fila.

A estos elementos llamados Elementos Distinguidos de una Matriz Escalonada, y son los primeros elementos de derecha a izquierda que son diferentes de cero.

A los elementos distinguidos que están de derecha a izquierda, no deben de ser cero, si hay uno se pasa al otro número.

(El PIBOTE es igual al Elemento Distinguido).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PIBOTE.

2.-**TRANSPUESTA.**

Se dice que una matriz es Transpuesta cuando se cambian los renglones por las columnas de A y se escribe A=aij.

A^T =TRANSPUESTA

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} = A$$

3.-**MATRICEZ SIMETRICAS**

Una matriz Amxn si es simétrica si (A) es igual a A

$$Amxn= \quad 1 \begin{pmatrix} 2 & \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A= \quad 1 \begin{pmatrix} 2 & \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4.-**MATRICES TRIANGULARES**

Se dice que una matriz cuadrada es Triangular superior e inferior, si todos sus elementos arriba y abajo de la diagonal principal son ceros.

$$Amxn = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \text{Superior}$$

$$Amxn = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{Inferior}$$

5.-**INVERSA.**

Las matrices Invertidas son las que comprueban con la matriz identidad, se dice que una matriz es la matriz identidad ¨I¨ si todos sus elementos de su diagonal principal son unos (1) y los que están fuera de la diagonal principal son ceros (0).

SUMA DE MATRICES

Sólo se puede sumar matrices del mismo orden.

SUMA

$$\mathbf{Amxn}\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Bmxn}\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Cmxn}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)= \begin{pmatrix} 324 \\ 123 \\ 205 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 213 \\ 425 \\ 532 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 537 \\ 548 \\ 737 \end{pmatrix}$$

(A+B) + C

$$\begin{pmatrix} 537 \\ 548 \\ 737 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-23 \\ 05-2 \\ 2-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6110 \\ 5\ 9\ 6 \\ 2\ 9\ 11 \end{pmatrix}$$

A + (B+C)

$$\begin{pmatrix} 324 \\ 123 \\ 205 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 10 \\ 5 & 9 & 6 \\ 2 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

EJEMPLOS :

SUMA DE MATRICES.

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 8 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 10 \\ 5 & 9 & 6 \\ 9 & 2 & 11 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \end{pmatrix}$$

RESTA DE MATRICES

Estas matrices para poder realizar su resta deben ser del mismo orden igual que la suma de matrices.

EJEMPLOS.

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 3 \\ 7 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ -1 & 11 & 0 \\ 0 & -.2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & -5 & 0 \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

TEOREMAS

1.- **A + A = 0**

A toda matriz suma por un cero siempre será la matriz original.

2.- **0A = 0**

Toda matriz multiplicada por un cero el resultado siempre será cero.

3.- **A + B = B + A**

En la suma de matrices el orden de los Factores no altera el producto.

4.- **(A + B) +C = A + (B + C)**

$$\mathbf{A}= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}= \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}}_{\mathbf{(A+B)}} + C \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{12} \\ \mathbf{8} & \mathbf{16} \end{pmatrix}$$

$$C \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{(B+C)}} + A \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{12} \\ \mathbf{8} & \mathbf{16} \end{pmatrix}$$

A **B** **+B)** **C**

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \mathbf{8} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \mathbf{8} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

B **C** **(A+C)** **B**

5.- $\propto$ **(A + B) = $\propto$A + $\propto$B**

$\beta = 3$

$\propto = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\propto(A+B) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -8 & 10 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \propto 2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 4 & -16 & 20 \\ 6 & -6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\propto A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & -10 & 12 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \propto B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 8 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 4 & -16 & 20 \\ 6 & 6 & 14 \end{pmatrix}$$

A= 2 5
7 1

B= 3 1
4 9

(A+B)= 5 6 ∝2= 10 12 ∝(A) = 4 10 + ∝(B) = 6 2 1
1 10 22 20 14 2 8 18

= 10 12
22 20

6.- **(∝+B)A =∝A + ∝B**

5 15 20
(∝+β)A= 10 –25 30
5 0 10

$$\propto A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & -10 & 12 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \beta A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 6 & -15 & 18 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 20 \\ 10 & -25 & 30 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$\propto = 2$

$\beta = 6$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(\propto + \beta)A = \begin{pmatrix} 32 & 24 & 16 \\ 8 & 0 & 48 \end{pmatrix} \quad \propto A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 12 \end{pmatrix} + A\beta = \begin{pmatrix} 24 & 18 & 12 \\ 6 & 0 & 36 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 32 & 24 & 16 \\ 8 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

$\propto = 4$

$\beta = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(\propto + \beta)A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} \quad \propto A = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 16 & 20 \end{pmatrix} + A\beta = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE DOS MATRICES POR COMBINACION LINEAL.

$$\mathbf{A=}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Se toma el primer componente del multiplicador y este se multiplica por la primera linea del multiplicando.

Se toma el segundo componente del multiplicador y este se multiplica por la segunda columna; y todos estos a la vez se suman.

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

A= 2 -3 B= 1 -2

-1 4 2 -3

= 1 2 + -3 = -2 2 + -3 -3

-1 4 -1 4

2 + -6 = -4 -4 + 9 = 5

-1 8 7 2 -12 -10

2 -3 1 -2 = -4 5

-1 4 2 -3 7 10

EJERCICIOS RESUELTOS:

3 2 2 3 4

A= 2 –1 B= 1 0 2

1 4

8 9 16

= 3 6 6

6 3 12

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & -1 \\ 22 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 14 & 17 & 24 \\ 15 & 12 & 20 \\ 5 & 19 & 29 \end{pmatrix}$$

PRODUCTOS POR BLOQUES DE DOS MATRICES:

$$AB = \begin{matrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} 1 & -10 & 11 \\ 2 & 5 & 4 \\ 16 & -9 & 21 \\ 17 & 8 & 11 \end{matrix}$$

$$AB = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ \hline 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right) = \begin{array}{cc} C & D \\ E & F \end{array} \left(\begin{array}{c|c} G & A \\ \hline I & J \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} CG+DI & CH+DJ \\ \hline EG+FI & EH+FJ \end{array}\right)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ 2 & 5 & 4 \\ 16 & -9 & 21 \\ 17 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$CG = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix} = 3 + \begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix} = -1$$

2 –1 2 –1 2 -1 6 -2 4

2 1 + -1 -2 = 2 + 2 = 4
2 -1 4 1 5

DI= 2 4 1 –3 = 1 2 + 0 4 = 2 + 0 = 2
-2 3 0 -2 -2 3 -2 -2

-3 2 + -2 4 = -6 + -8 = -14
-2 3 6 -6 0

EG= 3 2 3 2 = 3 3 + 2 2 = 9 + 4 = 13
4 3 2 -1 4 3 12 6 18

2 3 + -1 2 = 6 + -2 = 4
4 3 8 -3 5

FI= 3 2 1 -3 = 1 3 + 0 2 = 3 + 0 = 3
-1 0 0 -2 -1 0 -1 -1

-3 3 + -2 2 = -9 + -4 = - 13
-1 0 3 0 3

CH= 1 -2 1 = 1 1 + 3 -2 = 1 + -6 = -5
2 -1 3 2 -1 2 -3 -1

$$DJ = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$EH = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$FJ = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 4 & 3 \\ 18 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -13 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -9 \\ 17 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTES

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a)Desarrollar el determinante y este debe ser diferente de 0:

det A = (2)(3) – (-4)(1) = 6 + 4 = 10

b)Aplicar el teorema:

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c)Multiplicar el teorema por la matriz original:

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+4 & -12+12 \\ -2+2 & 4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{10} & \frac{0}{10} \\ \frac{0}{10} & \frac{10}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO:

Calcular las inversas de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$$

PROCEDIMIENTO PARA ENCONTRAR LA INVERSA DE LA MATRIZ CUADRADA A:

1) Se escribe la matriz aumentada:

2) Se utiliza la reducción por renglones para poner la matriz A a su forma escalonada, reducida por renglones.

3) Se comprueba sí A es invertible:

a) Si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad I, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical.

b) Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A no es invertible.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R1 \to \frac{1}{2}R1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R2 \to R2-4R1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 12 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R2 \to \frac{1}{12}R2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right] \xrightarrow{R1 \to R1+\frac{3}{2}R2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right]$$

EJEMPLO:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R1 \to \frac{1}{2}R1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R2 \to R2-4R1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 12 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R2 \to \frac{1}{12}R2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right] \xrightarrow{R1 \to R1+\frac{3}{2}R2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right]$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) \\ 1 + (-1) & \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

CALCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA:

Sea:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R2 \to R2 - 2R1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R3 \to R3 + R2]{R1 \to R1 + 3R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

No puede reducirse la matriz identidad por lo que se puede concluir que A no es invertible. Sea b cualquier vector de 3 x 1 y considere el sistema de la igualdad Ax = b, si la inversa A^{-1} existiera entonces habría una solución única dada por $x = A^{-1}$ b. La conclusión que se obtiene es: si la reducción por renglones de A produce un renglón de ceros, entonces A no es invertible.

MATRICES EQUIVALENTES POR RENGLONES:

Suponga que la matriz A se puede transformar en la matriz B mediante operaciones por renglones. Entonces se dice que A y B son equivalentes por renglones.

Sea A una matriz de n x n (para que se cumpla este problema debe tener los siguientes incisos):

1) A es invertible si y solo si A es equivalente por renglones a la matriz identidad In, esto es, si la forma escalonada reducida por renglones de A es In.

2) A es invertible si y solo si el sistema Ax = b tiene una solución única para cada n vector b.

3) Si A es invertible entonces la solución única de Ax = b esta dada por x = A^{-1}b.

4) A es invertible si y solo si su forma escalonada reducida por renglones tiene n pivotes.

APLICACIÓN Y USO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES:

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6$$

$$x_2 - x_3 = -4$$

$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 7$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R1 \to \frac{1}{2}R1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R2 \to R3 - 3R1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R3 \to R3 + R2]{R1 \to R1 - 2R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R3 \to \frac{2}{3}R3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[R1 \to R1 - \frac{7}{2}R3]{R2 \to R2 + R3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -\frac{26}{6} & -\frac{14}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$A^{-1}b = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{26}{6} & -\frac{14}{6} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 + \frac{52}{3} - \frac{49}{3} \\ -6 - \frac{20}{3} + \frac{14}{3} \\ -6 - \frac{8}{3} + \frac{14}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

CALCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ POR EL METODO DE LA ADJUNTA:

1) Calcular los cofactores.
2) La adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores
3) Calcular el determinante de la matriz
4) Aplicamos la formula de la inversa.
5) Para comprobar se multiplica la matriz original por el determinante de la misma matriz y por la matriz de la adjunta.

EJEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 1(8-(-6)) = 14 \qquad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = -1(9-(-8)) = -17$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -1(4-(-8)) = 12 \qquad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 1(6-16) = -10$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = -1(-6-2) = 8 \qquad C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -1(-4-3) = 7$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -(12-(-4)) = 16 \qquad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 1(6-4) = 2$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -12 & -10 \\ 7 & 2 & -17 \\ 0 & 8 & 16 \end{bmatrix} \qquad A^{T} = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -12 & 2 & 8 \\ -10 & -17 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\det.A = 3\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = (3)(8+6) - (-2)(4+8) + (6-16) = 42 + 24 - 10 = 56$$

$$A^{-1} = \frac{1}{56}\begin{bmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -12 & 2 & 8 \\ -10 & -17 & 16 \end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$A = \frac{1}{56}\begin{bmatrix} 3-21 \\ 24-2 \\ 432 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -12 & 2 & 8 \\ -10-17 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42+24-10 & 21-4-17 & 0-16+16 \\ 28-48+20 & 14+8+34 & 0+32-32 \\ 56-36-20 & 28+6-34 & 0+24+32 \end{bmatrix} = \frac{1}{56}\begin{bmatrix} 56 & 0 & 0 \\ 0 & 56 & 0 \\ 0 & 0 & 56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN DE DETERMINANTES POR EL MÉTODO DE MENORES.

Para resolver un determinante por el método de menores se cancela la i-ésima columna con el j-ésimo renglón; de tal manera que siempre forme líneas perpendiculares y el resto de la matriz será su menor.

Ejemplo: Resolver el siguiente determinante.

*Los Signos siempre empiezan positivos en la posición A_{11} y de ahí para adelante son alternos si se manejan por renglones y/o columnas.

$$\mathbf{A}_{3x3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + = (2)(1) - (3)(-2) = 2 + 6 = 8$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - = (1)(1) - (3)(3) = 1 - 9 = -8$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + = (1)(-2) - (3)(2) = -2 - 6 = -8$$

Resolver por menores:

- Se toma la posición del menor y esta cantidad o escalar se multiplica por su menor tomando en cuenta los signos que son alternos, empezando por la posición$A_{11.}$

$$A_{3x3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - (1)\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + (3)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = (-2)(8) - (1)(-8) + (3)(-8) = -16 + 8 - 24 = -32$$

$$A_{3x3}\left[\begin{array}{c|c|c} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right] = +(-2)\begin{bmatrix} 2 \;\; 3 \\ -21 \end{bmatrix} - (1)\begin{bmatrix} 1 \;\; 3 \\ -21 \end{bmatrix} + (3)\begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix} = (-2)(8) - (1)(7) + (3)(-3) = -16 - 7 - 9 = -32$$

Resolver:

1. Por Renglon

Por Columna

$$A_{3x3}\left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\underline{2}} & \underline{\underline{-4}} & \underline{\underline{6}} \\ -3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$A_{3x3}\left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\underline{4}} & -3 & 2 \\ \underline{\underline{5}} & -2 & -6 \\ \underline{\underline{3}} & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 25 \\ 2-3 \end{bmatrix} = (2)(-3) - (5)(2) = -6 - 10 = -16$$

$$\begin{bmatrix} -35 \\ -1-3 \end{bmatrix} = (-3)(-3) - (5)(-1) = 9 + 5 = 14$$

$$\begin{bmatrix} -32 \\ -12 \end{bmatrix} = (-3)(2) - (2)(-1) = -6 + 2 = 4$$

$$= +(2)(-16) - (-4)(14) + (6)(4) = -32 + 56 + 24 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = (-2)(-1) - (-6)(2) = 2 + 12 = 14$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = (-3)(-1) - (2)(2) = 3 - 4 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} = (-3)(-6) - (2)(-2) = 18 + 4 = 22$$

$$+(4)(14) - (5)(-1) + (3)(14) = 56 + 5 + 66 = 127$$

RESOLVER POR MENORES EL DETERMINANTE

$$A_{4x4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = +(1) \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} - (2) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + (3) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} - (1) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (1)\left(1(1) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - (2) \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + (3) \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right) = -(2)\left(2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - (2) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + (3) \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= +(3)\left(+(2) \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - (1) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + (3) \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \right) = -(1)\left(2 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \right) =$$

$$(1)[(-1)(4) - (2)(12) + (3)(10)] = 1(-4 - 24 + 30) = 2$$

2)

$$(3)\left[(2)(12)+(1)(-8)+(3)(-10)\right]=(3)\left[24-8-30\right]=-42$$

$$-(2)\left[(2)(4)-(2)(-8)+(3)(-10)\right]=-(2)\left[8+16-30\right]=12$$

3)

$$-(1)\left[(2)(-2)+(1)(-8)+(2)(24)\right]=-(1)\left[-4-8+48\right]=-18$$

4)

$$A_{4x4}\begin{bmatrix}-2 & 4 & 4 & 2\\ 3 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3 & 2\\ -1 & -2 & 1 & 3\end{bmatrix}=+(-2)\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}-(4)\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}+(4)\begin{bmatrix}3 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}-(2)\begin{bmatrix}3 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=+(-2)\left((3)\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}-(2)\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\right)=-(2)\left[(-3)(7)-(2)(10)+(1)(8)\right]=+(-2)\left[-21-20+8\right]=66$$

$$=-(4)\left(+(3)\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}-(2)\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right)=-(4)\left[(3)(7)-(2)(8)+(1)(5)\right]=-(4)\left[21-16+5\right]=40$$

$$=+(4)\left(+(3)\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}-(3)\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}\right)=+(4)\left[(3)(10)-(3)(8)+(1)(-2)\right]=+(4)\left[30-24-2\right]=32$$

$$=-(2)\left(+(3)\begin{bmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}-(3)\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}+(2)\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}\right)=-(2)\left[(3)(8)-(3)(5)+(2)(-2)\right]=-(2)\left[24-15-4\right]=13$$

COFACTORES

Soluciones de Matrices(o solución de determinantes por Cofactores)

Fórmula: $C_{ij}=(-1)^{I+J}\ M_{ij}$

Obtener el determinante por el método de caracteres "por filas" con la misma matriz.

$$A_{3x3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_{3x3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2C_{11} + (-1)C_{12} + 3C_{13} \\ 1C_{21} + 0C_{22} + 2C_{23} \\ 3C_{31} + 1C_{32} + (-2)C_{33} \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 02 \\ 1-2 \end{bmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 12 \\ 3-2 \end{bmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 10 \\ 31 \end{bmatrix}$$

$$= 2(1)\begin{bmatrix} 02 \\ 1-2 \end{bmatrix} + (-1)(-1)\begin{bmatrix} 12 \\ 3-2 \end{bmatrix} + 3(1)\begin{bmatrix} 10 \\ 31 \end{bmatrix}$$

$$= 2[(0) - 2] + (1)[-2 - 6] + 3[1 - 0]$$

$$= -4 - 8 + 3$$

$$= -9$$

CALCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ POR EL METODO DE LA ADJUNTA.

1) Calcular los cofactores de las siguiente matriz.

Co n la Fórmula $C_{ij=(-1)}{}^{ij}[M_{ij]}$

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = (1)\big((2)(4) - (2)(0)\big) = 8$$

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = (-1)(4-0) = -4$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 2 - 8 = -6(1) = -6$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = (-1)\big[(-1)(4) - (2)(3)\big] = -4 - 6 = (-10)(-1) = 10$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = 8 - 12 = -4(1) = -4$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 4 + 4 = 8(-1) = -8$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 6 = -6(1) = -6$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (-1)(0-3) = 3$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = (1)(4+1) = 5$$

Matriz de cofactores

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & -6 \\ 10 & -4 & -8 \\ -6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 7 & 2 & -17 \\ -4 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

ENCONTRAR COFACTORES

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 0-2 \\ 32 \end{bmatrix} = 0 + 6 = 6(1) = 6$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 2-2 \\ 42 \end{bmatrix} = 4 + 8 = 12(-1) = -12$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 20 \\ 43 \end{bmatrix} = 6 - 0 = 6$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} -21 \\ 3 \quad 2 \end{bmatrix} = -4 - 3 = -7(-1) = 7$$

$$C_{22} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 31 \\ 42 \end{bmatrix} = 6 - 4 = 2(1) = 2$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 3-2 \\ 43 \end{bmatrix} = 9 + 8 = 17(-1) = -17$$

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} -21 \\ 0 \quad 2 \end{bmatrix} = -481) = -4$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 31 \\ 2-2 \end{bmatrix} = -6 - 2 = -8(-1) = 8$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 3-2 \\ 20 \end{bmatrix} = 0 + 4 = 4(1) = 4$$

2º La adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores

$$A^T{}_{3X3} = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 7 & 2 & -17 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 \\ -12 & 2 & 8 \\ 6 & -17 & 4 \end{bmatrix}$$

3º Calculamos el daterminante de la Matriz A_{3x3}

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{bmatrix} 0-2 \\ 32 \end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix} 2-2 \\ 42 \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} 20 \\ 43 \end{bmatrix} = 3(0+6) - (-2)(4+8) + 6$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$1.\ PASO \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.\ PASO$

$$\begin{vmatrix} 14 & -12 & -10 \\ 7 & 2 & -17 \\ 0 & 8 & -16 \end{vmatrix} \_\_\_\_ \begin{vmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -12 & 2 & 8 \\ -10 & -17 & 16 \end{vmatrix}$$

4º Aplicamos la Fórmula de Inversa

$$A^{-1}{}_{3X3} = \frac{1}{56}\begin{bmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -12 & 2 & 8 \\ -10 & -17 & 16 \end{bmatrix} ADJUNTA$$

5º Comprobar.

Se multiplica la matriz original por el determinante de la misma matriz y por la matriz de la adjunta

$A^{-1}{}_{3X3}$=1/56[MATRIZ ORIGINAL][MATRIZ ADJUNTA]

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -12 & 2 & 8 \\ -10 & -17 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42+24-10 & 21-4-17 & 0-16+16 \\ 28-48+20 & 14+8+34 & 0+32-32 \\ 56-36-20 & 28+6-34 & 0+24+32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 56 & 0 & 0 \\ 0 & 56 & 0 \\ 0 & 0 & 56 \end{bmatrix}\frac{1}{56} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculo de la Inversa por el Método de la Adjunta

$$A_{3X3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - (1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = -2[-8-3] - 1[-12-4] + 2[9-8] = 22+16+2 = 43$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = 1[-8-3] = -11$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = -1[-12-4] = 16$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 1[9-8] = 1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = -1[-4-6] = 10$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = 1[8-8] = 0$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 1[-6-4] = -10$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1[1-4] = -3$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -1[-2-6] = 8$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 1[-4-3] = -7$$

$$A_{3X3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 16 & 1 \\ 10 & 0 & 10 \\ -3 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^{T}{}_{3X3}\begin{bmatrix} -11 & 10 & -3 \\ 16 & 0 & 8 \\ 1 & 40 & -7 \end{bmatrix} ADJUNTA = A^{-1}{}_{3X3} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} -11 & 10 & -3 \\ 16 & 0 & 8 \\ 1 & 10 & -7 \end{bmatrix}$$

$COMPROBAR$

$$= \frac{1}{40}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -11 & 10 & -3 \\ 16 & 0 & 8 \\ 1 & 10 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)(-11)+16+2 & -20+0+20 & 6+8-14 \\ -33+32+1 & 30+0+10 & -9+16-7 \\ -44+48-4 & 40+0-40 & -12+24+28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{40}{40} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{40}{40} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{40}{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow MI$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMIANTES

1. Si cualquier renglón o columna del determiante de A o B es 0, entonces el determinante de A=0.
2. Si el iésimo renglón o la jésima se multiplica por la constante C, entonces llamaremos B a la matriz nueva

   (A) Det B=C Det A; C=4

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 12 & 4 & 16 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = DET = 64$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = DET = 16$$

3. Propiedad de la suma de 2 matrices: se pueden tomar renglones o columnas para sumar; se puede sumar la 1er columna con el 1er renglón. La matriz A,B,C son iguales excepto con la jésima columna además de jésima columna de C es la suma de jésimas columnas de A y B, por lo tanto el determinante de C es igual al determianate de A más el determiante de B

Det C= Det A +Det de B

$$A=\left[\begin{array}{c|c|c}1 & -1* & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & -2 & 5\end{array}\right] B=\left[\begin{array}{c|c|c}1 & -6* & 2\\ 3 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 5\end{array}\right] C=\left[\begin{array}{c|c|c}1 & =-7 & 2\\ 3 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 5\end{array}\right]$$

4. Al intercambiar dos renglones o columnas cualquiera de la matriz A siempre y cuando sean consecutivas(es decir sean adjuntas) entonces el determiante de B es igual a menos el determiante de A

Det B=-Det A

$$A=\left[\begin{array}{c|c|c}1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & -2 & 5\end{array}\right]; B=\left[\begin{array}{c|c|c}0 & -2 & 5\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{array}\right]; C=\left[\begin{array}{c|c|c}-1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ -2 & 0 & 5\end{array}\right]$$

DET=16 DET=-16 DET=-16

5. Si la matriz A tiene dos renglones o columnas iguales entonces el determiante de A=0
6. Si un renglón o columna de A es multiplo constante de otro renglon o columna de A entonces el determiante de A=0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} = 0$$

7. Si el multiplo de un renglón o columna de la matriz A, se suma a otro renglón o columna de la misma matriz; entonces el valor de la determinante no cambia.

8. Si tenemos una Matriz de A_{nxn} se dice que el determinante de A es igual al determinante de su transpuesta

$$A_{nxn}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}; A^T\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}; DET = 16$$

9. Sea la matriz A_{nxn} y la matriz B_{nxn}; entonces el determinante de un producto de AxB esa igual al determinante de AxB; siempre y cuando tenga la característica de sus elementos de la determinante cuadrática.

10. Sabemos si la matriz A es invertible entonces $AxA^{-1} = I$

El método de eliminación de gauss-jordan

El objetivó de esta sección es exponer el método de eliminación de gauss –jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales

El primer paso que se dará para lograr este objetivo va en la dirección de ahorro de notación para aclarar esta idea se debe recordar lo que motivo el estudio de la división sintética en los cursos de álgebra elemental.

Supóngase que se quiere dividir el polinomio $3x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 2x - 1$

Entre el polinomio $x-1$ realice entonces las operaciones estándar del algoritmo de la división

$$\begin{array}{r|l} & 3x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x + 4 \\ \hline x-1 & 3x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

$$\frac{-\left(3x^5 - 3x^4\right)}{x^4 + 4x^3}$$

$$\frac{-\left(x^4 - x^3\right)}{5x^3 - 3x^2}$$

$$\frac{-\left(5x^3 - 5x^4\right)}{2x^2 - 2x}$$

$$\frac{-\left(2x^2 - 2x\right)}{4x - 1}$$

$$\frac{-\left(4x - 1\right)}{3} \text{ (resto)}$$

Y se escribe el resultado como

$$\frac{3x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x-1} = 3x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x + 4\frac{3}{x-1}$$

Después de hacer repetidas veces este proceso, se da uno cuenta que existe una forma de hacer la misma división con un ahorro notable en la notación: toda la información en el proceso de la división esta contenida en los coeficientes del polinomio $3x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ y el polinomio x-1

Se llega así a la división sintética: la misma operación de división de estos polinomios puede efectuarse haciendo las operaciones solo con los coeficientes.

El algoritmo sé vera ahora

$$\begin{array}{cccccc} 3 & -2 & 4 & -3 & 2 & -1 \\ & 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{array}$$

Y se ve entonces que se llega al mismo resultado evitando escribir todas las x lo cual representa un considerable ahorro de espacio y de tinta. Al resolver un sistema de ecuaciones ocurre una situación similar: toda la información en el proceso de eliminación de incógnitas.

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_n \\ & a_1 b & (a_2 + a_1 b)b & \\ \hline a_1 & a_2 + a_1 b & a_3 + (a_2 + a_1 b)b & \end{array}$$

De nuevo, se puede evitar escribir las incógnitas $x_1 x_2 \ldots x_n$

Y trabajar solo con los coeficientes de las ecuaciones. Surge, de este modo, el concepto de matriz

Se reduce por renglones la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones, en donde en la diagonal principal se encuentran puros unos y debajo y arriba ceros.

PROCESO DE REDUCCION POR RENGLONES

(1) Ri=cRi reemplace el i-nesimo renglón por el mismo renglón multiplicado por c

(2) Rj=Rj+cRi sustituya el j-nesimo renglón por la suma del renglón j + el renglón i multiplicado por c.

(3) Ri-=Rj intercambie los renglones i y j

(4) A=B indica que las matrices aumentadas A Y B son equivalentes.

Sea $2x+4x+6x=18$

$4x+5x+6x=24$

$3x+x-2x=4$

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right\} \quad R_1 \to \tfrac{1}{2} R_1 \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} R2 \to R2-4R2 \\ R3 \to R3-3R3 \end{array} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right\}$$

$$R2 \to -\tfrac{1}{3} R2 \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} R1 \to R1-2R1 \\ R3 \to R3+5R3 \end{array} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right\}$$

$$R3 \to -R3 \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} R1 \to R1+R3 \\ R2 \to R2-2R3 \end{array} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

= X1=4 X2=-2 X3=3

ejercicios

$$\left(\begin{array}{l} x+2y+7z=1 \\ -x+y-z=2 \\ 3x-2y+5z=-5 \end{array}\right) \text{resultado} \quad \begin{array}{l} x=-3z-1 \\ y=-2z+1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l} 3y-3z=6 \\ x-y+4z=-3 \\ x+6z=4 \end{array}\right) R= \begin{array}{l} x=-6 \\ y=11/3 \\ z=5/3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} 2x+3x+x=3 \\ x+2x+x=1 \\ -x+4x+0=-2 \end{array}\right) R= \begin{array}{l} x1=2 \\ x2=0 \\ x3=-1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l} x+5y+11z=-5 \\ 2x+3y+8z=4 \\ -x+2y+3z=-9 \end{array}\right) R= \begin{array}{l} x=5 \\ Y=-2 \\ Z=0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} x+3x+5+10x=2 \\ -x+0-2x-4x=4 \\ 2x+4x+8x+16x=0 \\ 0+x+x+2x=2 \end{array}\right) R= \begin{array}{l} x1=-4 \\ x2=2 \\ x3=0 \\ x4=0 \end{array}$$

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

En la eliminación Gaussiana la matriz aumentada del sistema y los coeficientes de la matriz se encuentra ahora en 1 forma escalonada por renglones y se puede ver de inmediato que x3 tiene un valor ultimo, después se usa la sustitución de valores hacia atrás para encontrar x2 y x1 respectivamente:

Forma escalonada reducida por renglones y pilote, una matriz se encuentra en la forma escalonada y reducida por renglones si se cumplen las siguientes condiciones:

1- Todos los renglones cuyos elementos son todos ceros aparecen en la parte inferior de la matriz excepto el ultimo elemento que debe ser uno
2- El primer numero diferente de cero en cualquier renglón cuyos elementos son ceros es uno
3- Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer uno es del renglón de abajo, esta mas a la derecha que el primer uno en el renglón de arriba.
4- Cualquier columna que contiene el primer uno en el renglón tiene cero en el resto de sus elementos. El primer numero diferente de cero se llama pivote para ese renglón,
5- Pivote: el pivote se encuentra en cualquier renglón y esta a la derecha del pivote del renglón anterior.

Resumiendo la eliminación Gaussiana: se reduce por renglones la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones, se despeja el valor de la ultima incógnita y se usa la sustitución hacia atrás para las demás incógnitas

$$\begin{array}{l} 2x+4x+6x=18 \\ 4x+5x+6x=24 \\ 5x+x-2x=4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \quad R1 \rightarrow 1/2R1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R2 \rightarrow R2-4R1 \\ R3 \rightarrow R3-5R1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \quad R2 \rightarrow 1/3R2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) R3 \rightarrow R3+5R2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \quad R3 \rightarrow -R3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc|c} x1 & x2 & x3 & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right) \qquad x1=9-3x1-2x2$$

0 1 2 4 x2=4-2x3

0 0 1 3 x3=3

EJERCCICIOS

2x-x-x=4

3x-2x+4x=11 R=x1=3 x2=1 x3=1

6x+8x-4x=22

9x+12x+0+17x=4

6x+3x+3x+8x=4 R= x1=2/3 x2=-1/6 x3=1/6 x4=0

3x+6x+6x+13x=2

6x+5x-x+7x=3

Sistemas de ecuaciones homogéneas.

El sistema general de mn ecuaciones lineales se llama homogéneo si todas las constantesb1 b2....bn son iguales a cero

$$
\begin{array}{l}
a_{11} \quad a_{12} \quad a_{1n} \ldots = bn = 0 \\
a_{21} \quad a_{22} \quad a_{2n} \ldots = bn = 0 \\
\vdots \\
a_{m1} \quad a_{m2} \quad a_{mn} \ldots = bm = 0
\end{array}
$$

Para el sistema de ecuaciones lineal existen tres posibles soluciones.

1- no tenga solución
2- tenga una solución
3- tenga infinitas soluciones

para el sistema general homogéneo la situación es mas sencilla $x1=x2=xn=0$

Es siempre una solución llamada solución trivial o solución cero y existen dos posibilidades.

1- solución trivial 0

2- numero infinito de soluciones además de la trivial

la solución que no es cero se llama solución no trivial

Un sistema homogéneo que tiene solución trivial revela el siguiente sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad R1 \rightarrow 1/2R1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R2 \rightarrow R2-R1 \\ R3 \rightarrow R3-3R1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

$$R2 \rightarrow 1/2R2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R1 \rightarrow R1-2R2 \\ R3 \rightarrow R3+5R2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) R3 \rightarrow -R3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R1 \rightarrow R1+R3 \\ R3 \rightarrow R-R1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccc} x1 & x2 & x3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un sistema homogéneo con un numero infinito de soluciones desarrollara el siguiente sistema

$x_1+2x_2-x_3=0$ 1 2 -1 0   R2   R2-3R1

$3x_1-3x_2+2x_3=0$ 3 -3 2 0   R3   R3-R1

$-x_1-11x_2+6x_3=0$ -1 11 6 0

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right) \quad R2 \quad 1/2R2$$

$$R1 \rightarrow R1-2R2 \qquad R3 \rightarrow R3+9R2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 1 & -5/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc} -1/9x_3; & 5/9x_3; & x_3 \end{array}\right]$$

PROPIEDADES DE LAS DETERMINANTES

De la definición de determinantes establecida en la sucesión anterior se ve que para calcular el determinante de una matriz de orden n, se tendrán que realizar n! Productos elementales, multiplicarlos por el signo de la permutación correspondiente y luego hacer la suma de todos estos resultados. Y para una matriz de orden 5, son 5! = 120 operaciones individuales que se tienen que realizar para luego sumar los resultados. Para una matriz de orden 6 son 6! = 720 operaciones...

Algunas de sus propiedades. Resultara que por añadidura, se obtendrán también alternativas mas cortas para evaluar algunos determinantes numéricos. Sea A una matriz de orden n de elementos aij es decir A = (aij) se llama traspuesta de A, denotada por A^T a la matriz AT = (aji)i,j-1

La traspuesta de una matriz A se obtiene, entonces, intercambiando las líneas por las columnas de la matriz A.

Por ejemplo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad AT=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ya se había calculado det A (=-59). Calcúlese det AT

$$\begin{array}{ccccc} & -(6) & -(4) & -(24) & \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -1 & 4 \\ & +(9) & +(-2) & +(-32) & \end{array}$$

entonces AT= (9)+(-2)+(-32)-(6)-(4)-(24)=-59=det A

TEOREMA sea A una matriz de arden n. Entonces

Det A = det AT

DEMOSTRACION

SEA B=(BIJ)IJ=1 ....n la matriz traspuesta de A= (Aij)ij=1....n es decir,bij=aij , i,j=1,2,....,n.

Entonces la definición de det

Det AT = det B = $\sum$ (sgn π) b1n(1) b2n(2)...bn(n)

Sea j = π(i). Entonces i =π-1(j) y se puede escribir el elemento biπ como bπ-1

S dice que la matriz A = (aij)i,j=1...n es una matriz triangular superior (triangular inferior) si aij =0 para i >j(aij=0 si i < j, respectivamente)

$$\begin{pmatrix} A & A & A & A \\ 0 & A & A & A \\ 0 & 0 & A & A \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

el aspecto que tiene una matriz triangular superior

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ A & A & 0 & 0 \\ A & A & A & 0 \\ A & A & A & A \end{pmatrix}$$

El aspecto de una matriz inferior

ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{det=det} \quad \begin{pmatrix} 2 & 9 & 27 \\ 0 & 4 & 35 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad = \text{det} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 59 & 4 & 0 \\ 5 & -20 & 3 \end{pmatrix} \quad =(2)(4)(3)=24$$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONTABILIDAD Y ADMINISTRACIÓN Y SU APLICACIÓN.

Utilizaremos las ecuaciones simultáneas de primer grado con x número de incógnitas resolviéndolas con cualquiera de los siguientes métodos:

- Gauss
- Gauss-Jordan
- Por la regla de Kramer
- Sumas y Restas

PROBLEMA 1

Si en una tienda de ropa para dama se hace una venta especialmente de ropa de invierno en donde se venden sweters, abrigos y chamarras. El lunes se vendieron 5 sweteres, 3 abrigos y 7 chamarras y el total de la venta fue de $6300; el martes se vendieron 3 sweteres, 1 abrigo y 5 chamarras y el total de la venta fue $3700; el miércoles se vendieron 4 sweteres, 2 abrigos y 2 chamarras con una venta total de $3000.

Por el método de Sumas y Restas.

Datos:

X= sweter Lunes $5x+3y+7z=6300$--- 1

Y= abrigo Martes $3x+y+5z=3700$-----2

Z= chamarra Miércoles $4x+2y+2z=3000$----3

1° Comparando ecuación 1 con 2.

$5x+3y+7z=6300$ (1)

$3x+ y+ 5z =3700$ (-3)

multiplicadas por el factor respectivo

$5x+3y+7z=6300$

$-9x-3y-15z=-11100$

$\boxed{-4x-8z=-4800 \quad \text{--- } 4}$

2° Comparando ecuación 1 con 3.

$5x+3y+7z=6300$ (2)

$4x+2y+2z=3000$ (-3)

multiplicadas por el factor respectivo

$10x+6y+14z=12600$

$-12x-6y-6z=-9000$

$\boxed{-2x+8z=3600 \quad \text{----- } 5}$

3° Por comparación 4 y 5

$-4x-8z=-4800$

$$-2x+8z=3600$$

$$-6x=-1200$$

$$x=-1200/-6$$

$$\mathbf{x=200}$$

4° Sustituimos el valor de x en ecuación 5

$$-2(200)+8z=3600$$

$$z=3600+400/8$$

$$\mathbf{z=500}$$

5° Sustituimos el valor de x y de z en ecuación 2

$$3(200)+y+5(500)=3700$$

$$y=3700-600-2500$$

$$\mathbf{y=600}$$

PROBLEMA 2.

En una gasolinera se vendieron, en la mañana 5 latas de aceite, 7 botes de anticongelantes y 2 de aditivo, con un total de $750.00; en la tarde 3 latas de aceite, 5 botes de anticongelante y 4 de aditivo, con un total de $600.00 en la noche se vendió 1 lata de aceite, 3 de anticongelante y 2 de aditivo con una utilidad de $370.00. ¿Cuál es el precio de cada producto?

Datos:

x: aceite

y: anticongelante

z: aditivo

$$\begin{array}{r} \text{Mañana} \\ \text{Tarde} \\ \text{Noche} \end{array}\left\{\begin{array}{l} 5x+7y+2z=750\ \text{----}1 \\ 3x+5y+4z=600\ \text{---}2 \\ x+3y+2z=370\text{-----}3 \end{array}\right.$$

1° Comparando 1 y 2 multiplicando por (-2) la ecuación 1

$$-10x-14y-4z=-1500$$

$$3x+5y+4z=\ 600$$

$$\boxed{-7x-9y=-900\quad\text{----}4}$$

2° Comparando 1 y 3 multiplicando por (-1) la ecuación 3

$$5x+7y+2z=750$$

$$-x-3y-2z=-370$$

$$\boxed{4x+4y=380 \quad \text{-----}5}$$

3° Comparando 4 y 5 multiplicando la ecuación 4 por 4, y la ecuación 5 por 7.

$$-28x-36y=-3600$$

$$28x+28y= 2660$$

$$-8y=-940$$

$$y=-940/-8$$

$$\mathbf{y=118.7}$$

4° Sustituir Y en ecuación 4

$$-7x-9(118.7) = -1500$$

$$-7x= -1500+1068.3$$

$$x= \frac{-431.7}{-7}$$

$$\mathbf{x= 61.67}$$

5° Sustituir X y Y en ecuación 3.

$$61.67+3(118.7)+2z=370$$

$$2z=370-61.67-356.1$$

$$z=\frac{-47.77}{2}$$

$$\mathbf{z=-23.885}$$

PROBLEMA 3.

En una tienda de pan se hizo una venta especial de temporada navideña y el 22 de diciembre se vendieron 3 cuernos, 2 donas y 1 concha con una venta total de $13.00; el 23 de diciembre se vendieron 4 cuernos, no se encontraron 5 donas ni tampoco 2 conchas encontrando un faltante en caja de $9.00; el 24 de diciembre se vendió 1 cuerno e hicieron falta 2 donas y 5 conchas encontrando un faltante en caja de $9.00. Encontrar el precio de cada pan.

Datos:

x= cuerno — 22 de diciembre — $3x+2y+z=13$-----1

y= donas — 23 de diciembre — $4x-5y-2z=-9$-----2

z= conchas — 24 de diciembre — $x-2y-5z=-9$-----3

1° Comparando 1 y 2 multiplicando la ecuación 1 por 2.

$$6x+4y+2z= 26$$
$$4x-5y-2z=-9$$
$$\boxed{10x-y=17 \quad -----4}$$

2° Comparando 1 y 3 multiplicando por 5

$$15x+10y+5z= 65$$
$$x-2y-5z=-9$$
$$\boxed{16x+8y=-56 \quad ------5}$$

3° Comparando 4 y 5 multiplicando por 8 la ecuación 4

$$80x-8y=136$$
$$16x+8y=56$$
$$96x= 192$$
$$x=192 / 96$$
$$\mathbf{x=2}$$

4° Sustituir el valor de X en la ecuación 5.

$$16(2)+8y=56$$

$$8y=56-32$$

$$y=24 / 8$$

$$\mathbf{y=3}$$

5° Sustituir los valores de X y Y en la ecuación 3.

$$x-2y-5z=-9$$

$$2-2(3)-5z=-9$$

$$-5z=-9-2+6$$

$$z=-5 /-5$$

$$\mathbf{z=1}$$

PROBLEMA 4

En una dulcería se vendieron paletas de tres marcas: el lunes se vendió 1 tutsi, 4 sonric's y al hacer el balance del mes se dieron cuenta de que hacían falta 1 paleta larín con todo esto la venta fue de $6.00; el martes se vendieron 1 tutsi, 5 sonric's y al hacer el balance faltaron 7 paletas larín lo que trajo una pérdida al negocio de $9.00; el miércoles se vendieron 3 tutsi, 1 larín e hicieron falta 2 paletas sonric's y la venta del día fue de $2.00 ¿Cuánto cuesta cada paleta?

Datos:

x= paleta tutsi	Lunes	$x+4y-z=6$---------1
y= paleta sonric's	Martes	$2x+5y-7z=-9$-----2
z= paleta larín	Miércoles	$3x-2y+z=2$--------3

1° Comparando las ecuaciones 1 y 2 multiplicando por (-2) la ecuación 1

$$-2x-8y+2z=-12$$

$2x+5y-7z=-9$

$\boxed{-3y-5z=-21 \quad ------4}$

2° Comparando las ecuaciones 1 y 3 multiplicando por (-3) la ecuación 1

$-3x-12y+3z=-18$

$3x-2y+z=2$

$\boxed{-14y+4z=-16 \quad ------5}$

3° Comparando ecuaciones 4 y 5 multiplicando por 4 la ecuación 4 y por 5 la ecuación 5

$-12y-20z=-84$

$-70y+20z=-80$

$-82y=-164$

$y=-164/-82$

$y=2$

4° Sustituir el valor de Y en ecuación 4

$-3(2)-5z=-21$

$-5z=-21+6$

$z=-15/-5$

$z=3$

5° Sustituir el valor de X y Y en la ecuación 1

$x+4(2)-(3)=6$

$x=6+3-8$

$z=1$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. - Si cualquier renglón o columna del determinante de A o B es cero, entonces el determinante de A es igual a 0.

2.- Si el i-ésimo renglón o la j-ésima columna de A se multiplica por la constante C, entonces llamaremos B a la matriz nueva (a).

$$C = 4$$

Ejemplo: $A= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 12 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

0 -1 5   0 -2 5

Det.=16   Det.=64

3. - Propiedad de la suma de 2 matrices. Se pueden tomar renglones o columnas para sumar la primera columna con le primer renglón.

La matriz A, B, C, son iguales excepto por la j-ésima columna de C es la suma de las j-ésimas columnas de A y B, por lo tanto el determinante de C es igual al determinante de A mas el determinante de B (c= Det. A + Det. B)

+

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

4. - Al intercambiar 2 renglones o columnas cualquiera de la matriz A, siempre y cuando sean consecutivas (es decir adjuntas); entonces el determinante de B es igual a menos determinante de A (Det. B = -Det. A).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Det.= 16   Det.= -16   Det. = -16

5. - Si la matriz A tiene 2 renglones o columnas iguales entonces el determinante de A es igual a 0.

6. - Sí un renglón o columna de A es múltiplo constante de otro renglón o columna de A, entonces el determinante de A es igual a 0 (Det. A = 0).

$$\text{Mult. } 3 \longleftarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = 0$$

7. - Si el múltiplo de un renglón o columna de la matriz A, se suma a otro renglón o columna de la misma matriz; entonces el valor de la determinante no cambia.

8. - Si tenemos una matriz de A n x n (A nxn) se dice que el determinante de A es igual al determinante de su transpuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{t} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

su Det. es = 16 su Det. es = 16

9. - Sea la matriz A de nxn y la matriz B de nxn; (entonces el determinante de un producto de A x B es igual al determinante de A x B) siempre y cuando tenga la característica de sus elementos de la determinante cuadrática.

10. - Sabemos que si la matriz A es invertible entonces A x A-1 es igual a I:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$